LA FUNCION GAMMA Y SUS APLICACIONES

Pedro Pablo Cabezas O.

P R O L O G O

El término general de función, en matemáticas, es de importancia extraordinaria y de mucha utilidad. Así lo han entendido los investigadores de esta rama de la ciencia, quienes le han dedicado el tiempo suficiente y el interés por ella exigido, para desarrollar una teoría bastante exhaustiva sobre el tema.

Pero es de tener en cuenta, que tal concepto no es otra cosa que una particularización de otro más general: el de "LAS RELACIONES".

El objeto del trabajo es, ofrecer el conocimiento más a fondo de una función muy importante tanto en matemáticas como en muchas ramas del saber humano. Esta se conoce con el nombre de "FUNCION GAMMA".

Dada la última afirmación, me limitaré a dar las definiciones, propiedades, uso en la estadística matemática y ciertas aplicaciones en la investigación de operaciones, de dicha función.

El uso general está descontado, por la aplicación de la Estadística a la casi totalidad de las ciencias, entre otras: Educación, Agronomía, Biología, Física, Química, Sociología, etc.

La historia nos dice, que el primero en iniciar el estudio analítico de esta función fué el alemán EULER, quien secundado por otros insignes colegas, entre ellos LEGENDRE, lo dejó muy avanzado.

A partir de esta función, se define otra no menos importante que la primera llamada la "FUNCION BETA". Las dos comunmente se denominan "FUNCIONES EULERIANAS".

C A P I T U L O I

Definiciones de la Función Gamma

A. <u>Definición de WEIERSTRASS</u>. Para definir la función Gamma, Weierstrass utiliza el concepto de "PRODUCTO INFINITO", por lo tanto es conveniente definirlo previamente.

Sea $1 + a_1,\ 1 + a_2,\ 1 + a_3, \ldots$

una sucesión tal que ningún término es cero. Si

$$\lim_{n \to +\infty} \prod_n (1 + a_n) = a, \quad a \neq 0$$

a este límite se llama, el valor del producto infinito

$$\prod = (1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3) \ldots$$

y se dice que es convergente. La condición necesaria para la convergencia del producto $\prod$ es:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$$

y la suficiente que sea convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Ln}(1 + a_n)$$

ya que, $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} (1 + a_n) = e^{\sum_{n=1}^{m} \mathrm{Ln}(1 + a_n)}$

y $\displaystyle\lim_{m \to \infty} e^{u_m} = e^{\lim_{m \to \infty} u_m}$.

La convergencia absoluta está asegurada por el siguiente teorema:

El producto infinito $\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + a_n)$ es absolutamente convergente sii la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente.

Como último criterio de convergencia se tiene que el producto infinito es absolutamente convergente o no, si lo es o no la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Ln}(1 + a_n)$$

Weierstrass consideró el siguiente producto infinito:

$$z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \right] \qquad (1)$$

donde $z \in \mathbb{C}$ (conjunto de los números complejos), $n \in \mathbb{N}$ (conjunto de los números naturales) y $\gamma \in \mathbb{R}$ (conjunto de los números reales).

Esta γ se conoce como constante de Euler o Mascheroni, su definición es:

$$\gamma = \lim_{m \longrightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} - \log m \right]$$

La convergencia de γ se demuestra de la siguiente manera:

Sea $\gamma_m = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m} - \log m$

y $\delta_m = \gamma_m - \frac{1}{m}$

entonces

$$\gamma_{m+1} - \gamma_m = \frac{1}{m+1} - \log\left(1 + \frac{1}{m}\right)$$

Además $\delta_{m+1} - \delta_m = \frac{1}{m} - \log\left(1 + \frac{1}{m}\right)$

teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{m+1} < \log\left(1 + \frac{1}{m}\right) < \frac{1}{m}$$

se puede concluir que la sucesión γ_m decrece monótonamente, mientras que δ_m crece monótonamente, pero

$$\delta_m < \gamma_m$$

Como $\delta_1 = 0$, entonces cero es una cota inferior para γ_m. En consecuencia γ_m converge a un límite; éste es 0,5772157...

El producto infinito de WEIERSTRASS (1) representa una función analítica de z para todo z en $\mathbb{C}$.

Se dice que una función $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es analítica en un conjunto abierto A si y solo si es holomórfica en A.

Son funciones holomórficas aquellas que están definidas y son diferenciables en un conjunto abierto $A \subseteq \mathbb{C}$.

Como consecuencia, una función f es analítica en z_o perteneciente a $\mathbb{C}$ si existe una vecindad $|z - z_o| < \eta$ tal que en todos los puntos exista $f'(z)$.

La analiticidad de (1) se prueba así:

Dado $N \in \mathbb{N}$ tal que $|z| \leq \frac{1}{2}N$ si $n > N$ entonces

$$\left|\log\left(1 + \frac{z}{n}\right) - \frac{z}{n}\right| = \left|-\frac{1}{2}\frac{z^2}{n^2} + \frac{1}{3}\frac{z^3}{n^3} - \dots\right| \leq$$

$$\leqslant \frac{z^2}{n^2}\left[1 + \frac{z}{n} + \frac{z^2}{n^2} + \dots\right] \leqslant \frac{N^2}{4n^2}\left[1 + \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2^2} + \dots\right]$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\,\frac{N^2}{n^2}$$

teniendo en cuenta el desarrollo en serie de la función log. Pero la serie

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{N^2}{2n^2} \quad \textbf{converge}$$

luego si $|z| \leqslant \frac{1}{2}N$, $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty}\left[\log\left(1 + \frac{z}{n}\right) - \frac{z}{n}\right]$

es una serie de funciones analíticas uniformes y absolutamente convergentes y por lo tanto ella es una función analítica, igual que su exponencial

$$\prod_{n=N+1}^{\infty}\left[\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}\right]$$

y el producto

$$z e^{\gamma z} \prod_{n=N+1}^{\infty}\left[\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}\right] \quad \textbf{también lo es cuando}$$

$|z| \leqslant \frac{1}{2}N$.

Utilizando la notación $\Gamma(z)$, Weierstrass definió la función gamma de la siguiente manera:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\, e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}\right]$$

Por lo dicho anteriormente $\Gamma(z)$ es una función analítica, excepto para $z = 0, -1, -2, \dots$, donde tiene po-

los simples (Si existe n entero positivo tal que $\lim_{z \to z_o} (z - z_o)^n f(z) = A \neq 0$, entonces $z = z_o$ es un polo de orden n. Si $n = 1$, z_o es un polo simple).

B. Definición de EULER. Además del concepto de producto infinito, Euler hace uso de límite para definir la función en estudio. Teniendo en cuenta la simbología de Legendre dice que:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left[(1 + \frac{1}{n})^z (1 + \frac{z}{n})^{-1} \right] \qquad (2)$$

donde $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$

Aunque no está expreso el concepto de límite, sí lo está implicitamente involucrado, como se puede comprobar al establecer la identidad entre las dos definiciones o comprobando que

$$\Gamma(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{1.2.3. \ldots (n-1)}{z(z+1) \ldots (z+n-1)} n^z \qquad (3)$$

para tal efecto basta desarrollar los productos indicados en la (2) y tomar límite. Esta expresión es usada con relativa frecuencia, como la definición fundamental de la función Gamma; su originalidad se la disputan Euler y Gauss.

C. Definición más corriente. Dado el grado de dificultad que se presenta, en la parte operativa, para calcular casos particulares con las definiciones anteriores, los matemáticos dedicados al estudio de la función en mención trataron de facilitar, o por lo menos reducir, ese grado de dificultad. El éxito fue total, ya que por medio del cálculo integral lograron una expresión equivalente a las dadas, convirtiéndose en la manera más común de presentarla los libros que hacen alusión a ella.

La integral impropia $\int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{z-1}\, dt$ representa, en general, una función analítica de $z \in \mathcal{C}$ cuando $R(z)$ es mayor que cero ($R(z)$ significa la parte real de z).

A esta integral Legendre la denominó "Integral Euleriana de segunda clase". La de primera clase es la correspondiente a la función Beta, que luego se definirá. Whittaker y Watson en su libro "Un curso de Análisis Moderno" dicen que si $R(z) > 0$, entonces

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{z-1}\, dt \tag{4}$$

Si $R(z) > 0$, Cauchy y Saalschütz demostraron que

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} \left(e^{-t} - 1 + t - \frac{t^2}{2!} + \cdots + (-1)^{k+1} \frac{t^k}{k!}\right) t^{z-1} dt$$

donde k es el entero más cercano a $-R(z)$, es decir la función no está definida para $z = 0, -1, -2, -3, \ldots$, que como se dijo antes son los polos simples de la función.

D. Conclusión. Analizando detenidamente las tres definiciones se puede establecer la equivalencia entre ellas. De la definición dada por Weierstrass se llega, previos ciertos cálculos, a la dada por Euler; en efecto:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\left[\lim_{m\to+\infty} e^{(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}-\mathrm{Ln}\, m)z}\right]\left[\lim_{m\to+\infty}\prod_{n=1}^{m}(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}\right]$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \lim_{m\to\infty}\left[e^{(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}-\mathrm{Ln}\, m)z}\right]\prod_{n=1}^{m}\left[(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}\right]$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \lim_{m\to+\infty}\left[m^{-z}\prod_{n=1}^{m}(1+\frac{z}{n})\right]$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \lim_{m\to+\infty}\left[\prod_{n=1}^{m-1}(1+\frac{1}{n})^{-z}\prod_{n=1}^{m}(1+\frac{z}{n})\right]$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \lim_{m\to+\infty}\left[\prod_{n=1}^{m}\left\{(1+\frac{z}{n})(1+\frac{1}{n})^{-z}\right\}(1+\frac{1}{n})^{z}\right]$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \prod_{n=1}^{\infty}\left[(1+\frac{z}{n})(1+\frac{1}{n})^{-z}\right]$$

entonces,

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left[(1+\frac{1}{n})^{z}(1+\frac{z}{n})^{-1}\right]$$

que es la definición dada por Euler. a igual resultado se llega si se compara la definición del aparte (C) con la de Euler y por consiguiente con la de Weierstrass.

C A P I T U L O II

La función Gamma es una de las más ricas en propiedades. Esta cualidad hace que tenga relaciones muy íntimas con casi todos los tópicos que abarca la matemática. Dicho de otro modo, se puede afirmar que es un factor de unidad en la matemática. Los subtemas siguientes corroboran esta afirmación.

A. La función Beta. La función Gamma sirve como soporte para definir o estudiar, según el caso, casi todas las funciones trascendentales, entre ellas a la función Beta.

Legendre le dió el nombre de Integral Euleriana de primera clase a la siguiente integral:

$$\int_0^1 x^{p-1}\,(1-x)^{q-1}\,dx$$

para $R(p) > 0$ y $R(q) > 0$.

Como se puede notar, es una integral que depende de los parámetros p y q, o sea es una función y se la denomina Beta, entonces

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}\,(1-x)^{q-1}\,dx, \quad R(p)>0,\ R(q)>$$

La primera relación que se puede establecer entre la función Gamma y la Beta es la siguiente:

Si n es un entero positivo

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} n^z \beta(z,n)$$

Dado que $\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1.2.3.\ldots.(n-1)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)} n^z$

es suficiente demostrar la igualdad:

$$\beta(z,n) = \frac{1.2.3.\ldots.(n-1)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}$$

Aplicando el método de integración por partes a la integral que define la función Beta se puede establecer el último resultado y por lo tanto comprobar la relación establecida entre las dos funciones. Pero la relación más importante la estableció Euler por medio de la expresi

$$\beta(z,n) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

cuya demostración la presenta Sokolnikoff en su libro "Advanced Calculus".

B. Relación entre las funciones Gamma y Factorial.

Otra función no menos importante que la Gamma, en el Cálculo de Probabilidades y por tanto en la Estadística, es la función factorial.

Inicialmente se definió esta función teniendo como dominio el conjunto de los números naturales y por notación ! (la cual persiste), de la siguiente forma:

Si $n \in \mathbb{N}$ entonces $n! = \prod_{i=1}^{n} i$

La teoría de la función Gamma fue desarrollada paralelamente con el problema de generalización de la funci factorial, esto es, hallar una expresión que sea igual a n! ($n \in \mathbb{N}$) y a la vez, pueda ser extendida para cualquier número real (extender el dominio). En este proceso de investigación se logra establecer que:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^n\, dt = n!$$

La prueba se obtiene integrando por partes (reiteradamente) la integral. Para n-1 se tiene:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{n-1}\, dt = (n-1)!$$

Pero

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{z-1}\, dt, \quad R(z) > 0$$

Siguiendo el proceso de generalización, teniendo en cuenta las dos últimas igualdades, se puede concluír que:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{z-1}\, dt = (z-1)!$$

igualdad que establece nexos muy íntimos entre la función Gamma y la función Factorial. Las dos funciones guardan similitud, inclusive, en la forma de autoreproducción, ya que:

$$z! = z(z-1)! \quad y \quad \Gamma(z) = (z-1)\,\Gamma(z-1)$$

propiedad que aunque no es exclusiva para ellas, porque si F es una función arbitraria definida para $-n < x < -n+1$ tal que

$$F(x) = \frac{1}{x(x+1)\ldots(x+n-1)} F(x+n)$$

la ecuacion funcional

$$F(x+1) = x F(x)$$

siempre se cumple; sin embargo son las más caracterizables de la familia y quienes hacen mejor uso de dicha propiedad.

En la práctica, el trabajo de las dos funciones es complementario, ya que si se trata de calcular la función Gamma para $n \in \mathbb{N}$, se utiliza la función factorial. Por el contrario, si es de calcular el factorial de un número real, excepto los enteros negativos (ya que $0!=1$) se aplica la función Gamma.

C. <u>Relación entre las funciones gamma y goniométricas</u>

Whittaker y Watson en su libro citado anteriormente y Emil Artin en "the Gamma Function", traen la siguiente ecuación funcional;

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z}$$

o también

$$\operatorname{sen} \pi z = \frac{\pi}{-z\Gamma(z)\Gamma(-z)}$$

las cuales ponen de manifiesto la relación entre la función Gamma y la función sen., pero cualquier función goniométrica fundamental se puede expresar en función de las restantes; esto hace que se extienda la aplicabilidad de la función Gamma a las goniométricas y a todos los campos donde éstas se utilicen.

Sería interminable tratar casos donde la función en estudio interviene, esto hace necesario presentar su aplicabilidad en un caso muy especial, pero no menos importante, como es en la Estadística.

C A P I T U L O III

La Función Gamma en la Estadística

Como introducción y para mayor comprensión del tema de este capítulo, es conveniente definir los siguientes conceptos de probabilidad.

A.- Conceptos probabilísticos:

a) Espacio muestral, eventos y sucesos aleatorios: Se entiende por espacio muestral el conjunto formado por todos los resultados posibles de un experimento, su símbolo es Ω. A los elementos de Ω se les llama eventos o sucesos elementales y a cualquier subconjunto de Ω , suceso.

Cuando se trata de experimentos cuyos resultados no se pueden predecir, se dice que son experimentos que ocurren al azar o aleatoriamente, los eventos y sucesos se denominan estocásticos o aleatorios.

b) Variable aleatoria: Variable aleatoria es una función que aplicada a sucesos estadísticos le hace corresponder un número real, o sea $A \subseteq \Omega$, un suceso y X una función tal que $X; A \subseteq \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $X(A) = m \in \mathbb{R}$; de X se dice que es una variable aleatoria. La variable aleatoria puede ser discreta o continua, ya sea que esté asociada a un espacio muestral discreto o continuo respectivamente.

c) Función de distribución de probabilidad. Determinado el espacio muestral y los sucesos de un experimento es importante saber con qué grado de confianza se puede afirmar que va a ocurrir un suceso cualquiera, esto es, conocer su probabilidad. Esta se puede presentar por medio de tablas o a partir de una función de co-dominio el intervalo unitario (I). Además, la función debe ser no negativa y su sumatoria o integral, en todo el recorrido, igual a la unidad; cualquier función que cumpla con estas propiedades se la denomina función de distribución de probabilidad. Esto es, f es una función de distribución de probabilidad si

$$f: R(X) \longrightarrow I \qquad (R = \text{recorrido})$$

tal que

$$f(x) \geqslant 0 \quad \text{para todo } x \text{ en } X, \quad y$$

$$\sum_{\forall\, x \in X}(x) = 1 \quad v \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$$

Si f es discreta, f(x) es la probabilidad de que su variable aleatoria tome el valor x; en el caso de ser continua, indica la probabilidad de que la variable aleatoria tome los valores comprendidos entre x y x+dx (dx = diferencial de x).

d) Función Acumulativa de Probabilidad. Para responder a preguntas como "cuál es la probabilidad de que una variable aleatoria sea menor o igual que un número determinado", $P(X \leqslant x)$; o a "hallar la probabilidad de que una variable aleatoria sea mayor que x", $P(X > x)$, etc., se define una función F, así;

$$F: R(X) \longrightarrow I$$

tal que

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} \sum_{X \leq x} f(x) & \text{si } X \text{ es discreta} \\ \int_{-\infty}^{x} f(x)dx & \text{si } X \text{ es continua} \end{cases}$$

F_X se denomina "Función Acumulativa de Probabilidad".

Entre las propiedades de esta función está la siguiente;

$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

la cual tiene que ver mucho con el teorema fundamental del Cálculo.

Es de observar que todo lo dicho está restringido para variables aleatorias univariantes. La generalización sería trabajo para presentar en otro artículo.

B.- Funciones de distribuciones de Probabilidad Especiales.

a) Función de distribución Gamma. La función Gamma se utiliza en la definición de no pocas funciones de distribuciones de probabilidades continuas, entre ellas, la función de distribución de probabilidad que lleva su nombre y que es de uso frecuente en problemas que tienen que ver con sumas de cuadrados o formas cuadráticas de variables aleatorias con distribuciones normales.

Sea X una variable aleatoria continua tal que su función de distribución de probabilidad asociada es;

$$f(x,\alpha,\beta) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

para $\alpha > 0$, $\beta > 0$ y $\Gamma(\alpha)$ la función Gamma.

En realidad $f(x,\alpha,\beta)$ representa una familia de curvas, la determinación de una de ellas se logra al valorar α y β. A $f(x,\alpha,\beta)$ se denomina función de probabilidad Gamma, $f(x,\alpha,\beta) = g(x,\alpha,\beta)$.

La comprobación de que $f = g$ es una función de distribución se obtiene demostrando que su integral, en todo su recorrido, es igual a la unidad. En efecto,

$$\int_0^{+\infty} f(x,\alpha,\beta)dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} dx$$

$$= \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx$$

$$= \frac{\beta^{\alpha}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy$$

$$= \frac{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} = 1$$

b) <u>Casos particulares de la función de distribución Gamma</u>. Cuando a los parámetros (α,β) de la distribución se les asignan ciertos valores, la fórmula general se convierte en casos particulares de uso muy frecuente. Entre otras tenemos las siguientes:

Si $\beta = 1$, entonces

$$g(x,\alpha,1) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1} e^{-x}}{\Gamma(\alpha)} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

esta fórmula es la que usan la mayoría de los textos para presentar a la función de distribución Gamma. Algunos la identifican como "Distribución tipo III de Pearson". En este caso se puede demostrar que el valor esperado y la varianza de la variable aleatoria es igual, justamente, al parámetro de la distribución (α), coincidiendo en esta propiedad con la distribución (discreta) de Poisson.

Para el caso general, aquellos valores son $\alpha\beta$ y $\alpha\beta^2$ respectivamente, dando el mismo resultado, considerado en el párrafo anterior para $\beta = 1$.

De la misma manera como la función Gamma genera otras funciones, la función de distribución Gamma es generadora, también, de otras funciones de distribuciones de probabilidad. Esto ocurre para los siguientes valores particulares de los parámetros α y β.

Si $\alpha = 1$, entonces

$$g(x, 1, \beta) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

la cual es la función de distribución de probabilidad exponencial de parámetro $\lambda = \frac{1}{\beta}$, distribución que es muy útil en los procesos estocásticos y la teoría de Colas.

Si $\alpha = \frac{n}{2}$ $(n \in \mathbb{N})$ y $\beta = 2$

$$g(x, \tfrac{n}{2}, 2) = \begin{cases} \dfrac{x^{(n/2)-1} \cdot e^{-(x/2)}}{2^{(n/2)}\,\Gamma(n/2)} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

función de distribución que recibe el nombre de ji cuadrado con n grados de libertad (o valores independientes que puede tomar la variable), en forma simbólica $\chi^2_{(n)}$.

Una consecuencia importante de esta distribución es que: si X es una variable aleatoria cuya distribución es normal de media (Esperanza) cero y de varianza 1, entonces la variable aleatoria X^2 tendrá como distribución una $X^2_{(1)}$ (ji cuadrado con 1 grado de libertad).

La función acumulativa de probabilidad es, según la definición general,

$$F_X(\alpha,\beta) = G_X(\alpha,\beta) = \int_0^x \frac{x^{\alpha-1}\, e^{-(x/\beta)}}{\beta^\alpha\, \Gamma(\alpha)}\, dx$$

que, como se verá más adelante, es la distribución del tiempo de ocurrencia del evento r-ésimo, después del tiempo inicial, de un proceso de Poisson con parámetro $\lambda = \frac{1}{\beta}$ (parámetro de la exponencial).

c) La distribución Beta. Otra distribución continua de frecuente ocurrencia en la teoría estadística y que - utiliza como soporte a la función Gamma, es la función de distribución Beta.

Una variable aleatoria X sigue una distribución Beta si:

$$f(x,p,q) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\, x^{p-1}(1-x)^{q-1} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde p y q son parámetros reales positivos.

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}$$

entonces

$$f(x,p,q) = \begin{cases} B(p,q)\, x^{p-1}(1-x)^{q-1} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La relación entre las funciones Gamma y Beta se prolonga hasta sus respectivas distribuciones. Esto es, si X y Y son variables aleatorias independientes cuyas distribuciones son Gammas de parámetros α_1 y α_2 respectivamente, entonces la variable aleatoria

$$Z = \frac{X}{X+Y}$$

tiene una distribución Beta de parámetros α_1 y α_2.

d) Las distribuciones de Student y Snedecor (F). De la combinación de variables aleatorias con distribuciones adecuadas se obtienen las de Student y Snedecor que con la ji cuadrado se constituyen en tres distribuciones que guardan estrecha relación con la Gamma y la Beta; además, son fundamentales en el análisis de la varianza, lo mismo que en otros procedimientos basados en variables aleatorias normalmente distribuídas.

En el caso de la t de Student se obtiene así:

Sea X variable aleatoria con distribución normal de media cero y varianza 1, Y variable aleatoria con distribución $X^2_{(n)}$ si X y Y son independientes, la variable aleatoria

$$t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

tiene por función de distribución de probabilidad

$$f(t,n) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(n/2)\sqrt{n\pi}}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{1}{2}(n+1)} , -\infty < x < +\infty$$

Esta es la función de distribución de Student con n grados de libertad. Su relación con la distribución Beta queda establecida por la siguiente proposición: Si t es una variable aleatoria cuya distribución es la de Student con n grados de libertad, entonces, la variable aleatoria

$$X = \frac{1}{1+t^2/n}$$

tiene una distribución Beta con parámetros n/2 y 1/2. Para establecer la distribución de Snedecor o F se tiene si X y Y son variables aleatorias independientes con distribuciones ji cuadrados de n_1 y n_2 grados de libertad respectivamente, la variable aleatoria

$$F = \frac{n_2 X}{n_1 Y}$$

tiene por función de distribución de probabilidad

$$f(F,n_1,n_2) = \frac{\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2})}{\Gamma(\frac{n_1}{2})\Gamma(\frac{n_2}{2})}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{n_1/2} \frac{F^{\frac{n_1-2}{2}}}{\left(1+\frac{n_1 F}{n}\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}$$

la cual es la distribución de Snedecor con n_1 y n_2 grados de libertad.

Existe también una conexión entre las distribuciones de Snedecor y la Beta. Esto es, si F es una variable aleatoria que se distribuye según Snedecor con n_1 y n_2 grados de libertad, entonces la variable aleatoria

$$\left[1+\frac{n_1 F}{n_2}\right]^{-1}$$

tiene distribución Beta con $n_1/2$ y $n_2/2$ grados de libertad y la variable aleatoria

$$\frac{n_1 F}{n_2+n_1 F}$$

tiene distribución Beta con $n_1/2$ y $n_2/2$ grados de libertad.

Como se decía anteriormente, estas tres distribuciones son de uso frecuente en la investigación, lo que contribuye a la universalidad de la función Gamma.

Pero es de observar la aplicabilidad que tiene en tópicos tan nuevos como la investigación de operaciones y la confiabilidad.

C A P I T U L O IV

La Función Gamma en los Procesos Estocásticos y en la Confiabilidad.

La aplicación de la función y la distribución Gamma en temas tan novedosos como la investigación de operaciones y la confiabilidad es sorprendente. Para notar la funcionalidad se presenta un caso muy concreto en cada uno de los tópicos.

A.- <u>La Gamma en los Procesos Estocásticos.</u> Un proceso estocástico es un modelo en donde una o varias magnitudes varían en forma aleatoria en función del tiempo. Por extensión, el concepto se aplica a modelos en los cuales la variable no es el tiempo. También se puede definir un proceso estocástico como una familia arbitraria de variables aleatorias reales $\{x(t),\ t \in T\}$, en general t se refiere al tiempo y T es un conjunto de índices. Por fin se puede decir que un proceso estocástico es la representación matemática de un proceso empírico cuyo desarrollo es controlado por leyes probabilísticas.

Si T es una secuencia infinita numerable $\{x(t)\}$ es un proceso estocástico con parámetro discreto o cadena estocástica. En cambio si T es un intervalo infinito no numerable, x(t) es un proceso estocástico con parámetro continuo, o simplemente es un proceso estocástico. Si t se refiere al parámetro tiempo, T es el intervalo considerado y x(t) la observación en el tiempo.

El caso más importante de los procesos estocásticos con parámetros discretos son las cadenas de Markov.

Una cadena de Markov es una secuencia X_n de variables aleatorias reales tal que para todo $n \in \mathbb{Z} - \mathbb{Z}^-$ (conjunto de los números enteros no negativos) y para todos los valores posibles de las variables aleatorias se tiene que

$$P\left|x_n = j \,|\, x_o = i_o, x_1 = i_1, \ldots, x_{n-1} = i_{n-1}\right\} = P\left\{x_n = j \,|\, x_{n-1} = i_{n-1}\right\}$$

o sea, la probabilidad del valor que la variable aleatoria tome en el estado (etapa) n sólo depende de lo que ocurrió en el estado o etapa inmediatamente anterior.

El proceso de Poisson es el más sencillo de los Procesos o Cadenas de Markov y el más útil en la práctica. Una cantidad de fenómenos empíricos pueden ser representados mediante un proceso de Poisson.

Este es un proceso de eventos puntuales que ocurren en el tiempo.

En forma analítica se puede decir que si $N(t, t + \Delta t)$ (Δt = delta t) es el número de eventos que ocurren en un intervalo $(t, t + \Delta t)$ y existe λ (constante positiva), un proceso estocástico es de Poisson si se satisfacen los siguientes postulados para $\Delta t \to 0$.

1) $P\{N(t, t + \Delta t) = 0\} = 1 - \lambda \Delta t + 0(\Delta t)$

2) $P\{N(t, t + \Delta t) = 1\} = \lambda \Delta t + 0(\Delta t)$

3) $P\{N(t, t + \Delta t) > 1\} = 0(\Delta t)$

4) $P\{N(t, t + \Delta t) = x / N(0,t) = y\} = P\{N(t, t+ \Delta t)=x\}$

($O(\Delta t)$ es un infinitésino).

Por lo tanto, en un proceso de Poisson los eventos ocurren uno a uno en el tiempo y en forma aleatoria.

Con esta información previa, se puede notar el papel que desempeña la función Gamma en los siguientes teoremas.

<u>Teorema 1.</u> En un proceso de Poisson los intervalos de tiempo entre dos eventos sucesivos siguen una distribución exponencial.

Esto quiere decir que el tiempo entre la ocurrencia de dos eventos es una variable aleatoria cuya función de distribución es $f(x, \alpha, 1)$, vista en el capítulo anterior.

<u>Demostración del teorema.</u> Sea to un evento fijo de referencia, x el intervalo de tiempo entre t_o y la ocurrencia de un primer evento y

$$F(x) = P\{X > x\}$$

para $\Delta x > 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} F(x + \Delta x) &= P(X > x + \Delta x) \\ &= P(X > x)\, P\{N(t_o + x,\ t_o + x + \Delta x) = 0 / X > x\} \end{aligned}$$

Para el proceso de Poisson

$$F(x + \Delta x) = F(x)(1 - \lambda \Delta x) + O(\Delta x)$$

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = -\lambda f(x) + O(\Delta x)$$

tomando límites

$$F'(x) = -\lambda F(x)$$

que es una ecuación diferencial cuya solución está dada por

$$F(x) = F(0)\, e^{-\lambda x} , \quad F(0) = 1$$

$$F(x) = e^{-\lambda x} = P(X > x), \quad P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

luego

$$F(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

que es la función de distribución exponencial.

Teorema 2. En un proceso de Poisson el intervalo de tiempo entre el origen y el momento de ocurrencia del r-ésimo evento sigue una distribución Gamma con parámetros r y λ.

Demostración. Sea Wr el tiempo de espera hasta la ocurrencia del evento r-ésimo, entonces

$Wr = \sum_{i=1}^{r} x_i$ donde x_i $(i=1,\ldots,r)$ es el intervalo de tiempo entre la ocurrencia del evento i-1 y el i. Las x_i son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas (tienen distribución exponencial según el teorema 1).

La función generatriz de momento para cada x_i es:

$$E\left[e^{-\alpha x}\right] = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-(\lambda+\alpha)x}\, dx$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda+\alpha}$$

por lo tanto la función generatriz de momento de Wr est dada por

$$E(e^{-\alpha Wr}) = \left\{E\left[e^{-\alpha x}\right]\right\}^r = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\alpha}\right)^r = \frac{\lambda^r}{(\lambda+\alpha)^r}$$

lo que implica que la función de distribución para la variable Wr es

$$f_{Wr}(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda(\lambda x)^{r-1}\, e^{-\lambda x}}{(r-1)!} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

que la hemos definido como la función de distribución Gamma, comprobándose de esta manera el teorema 2.

En la teoría de Colas o fenómenos de espera que es un subtema de los sistemas estocásticos de servicios, también la función Gamma tiene su aplicabilidad, como ejemplo está la distribución del tiempo de espera en la Cola.

Para un modelo M/M/1, cuyas características son:

1) Disciplina de espera: primero que llega, primero se atiende.
2) Llegadas: individuales según distribución de Poisson con parámetro λ.
3) Servicio: individual, duración con distribución exponencial con parámetro μ.

Teniendo en cuenta que una unidad arbitraria A que llegue al sistema debe esperar en las colas un tiempo comprendido entre x y $x + dx$, sii ocurren los siguientes eventos:

1) Que en el sistema haya $n \geq 1$ unidades
2) Que en el intervalo de tiempo x se despache a $n-1$ unidades
3) Que en el intervalo de tiempo dx se despache una unidad,

se tiene que:

$$P(x)\,dx = P\{x \leq w \leq x + dx\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\{x \leq w < x + dx / N = n\}\, \rho n$$

pero

$$P\{x \leq w < x + dx/\ N = n\} = \frac{\mu(\mu x)^{n-1} e^{-\mu x}}{(n-1)!}\, dx$$

por el teorema 2.

Luego,

$$P(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(\mu x)^{n-1}\ e^{-\mu x}}{(n-1)!}(1-\rho)\rho^{n}\ dx$$

$$= \mu\rho(1-\rho)\ e^{-\mu x}\ dx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu\rho x)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \mu\rho(1-\rho)\ e^{-\mu x + \mu\rho x} dx$$

$$= \mu\rho(1-\rho)\ e^{-\mu x(1-\rho)}\ dx, \quad y$$

$$P(x) = \begin{cases} \rho(\mu-\lambda)\ e^{-(\mu-\lambda)x} & x > 0 \\ 1-\rho & x \leq 0 \end{cases}$$

Haciendo el cambio $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ y teniendo en cuenta que si $n = 0$, $P(0) = 1 - \rho$ = probabilidad de que el servicio esté libre.

B.- La Función Gamma en la Confiabilidad. Se entiende por confiabilidad de una componente, equipo o sistema, la probabilidad de que funcione satisfactoriamente durante el período especificado y bajo las condiciones de operaciones dadas.

Tratando en este tema el caso de redundancia de Stand

by en sistemas renovables se tiene que la confiabilida
del sistema, representada por P_o, es:

$$P_o(t) = \int_t^{+\infty} f_o(x)\, dx$$

donde

$$f_o(x) = f_1(x) * f_2(x) * \ldots * f_n(x)$$

es la función de distribución de probabilidad de la va
riable aleatoria τ_o, esta representa el tiempo de func
namiento del sistema. Las f_i $(i = 1,2, \ldots, n)$ son las
funciones de distribución de las n componentes del sis
ma. El símbolo $*$ es un operador, que se lee convolució

Si se trata de n componentes iguales e igualmente d
tribuídas (exponencial), aplicando transformadas de La-
place y las propiedades de las convoluciones, la anter
expresión queda así:

$$\mathcal{L} f_o(x) = f_o^*(s) = \frac{\lambda^n}{(s+\lambda)^n}$$

La tabla de transformadas da:

$$f_o(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!}$$

que es la distribución Gamma. Siendo la confiabilidad
del sistema,

$$P_o(t) = \int_t^{+\infty} \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!}\, dx = \frac{\lambda}{(n-1)!}\int_t^{+\infty} (\lambda x)^{n-1} e^{-\lambda}$$

$$= \frac{\lambda}{(n-1)!}\int_{\lambda t}^{+\infty} \frac{y^{n-1}\,e^{-y}}{\lambda}\,dy$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\left[\int_{0}^{+\infty} y^{n-1}\,e^{-y}\,dy - \int_{0}^{t} y^{n-1}\,e^{-y}\,dy\right]$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\left[\Gamma(n) - \int_{0}^{t} y^{n-1}\,e^{-y}\,dy\right]$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\left[(n-1)! - \int_{0}^{t} y^{n-1}\,e^{-y}\,dy\right]$$

$$= 1 - \int_{0}^{t} \frac{y^{n-1}\,e^{-y}}{(n-1)!}\,dy$$

efectuando la integral por partes reiteradamente se concluye que

$$P_0(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k\,e^{-t}}{k!}$$

En verdad sería muy prolijo continuar exponiendo casos de aplicación directa o indirecta de la función Gamma en sus múltiples modalidades. Queda por lo tanto, abierta la brecha para continuar tal estudio que puede ofrecer excelentes éxitos a quienes gustan de las revisiones bibliográficas o están en la capacidad de hacer aportes efectivos a las Ciencias.

B I B L I O G R A F I A

1.- ARTIN, Emil, translated by Butler Michael, The Gamma Function, London, 1964

2.- BLUM R., Julias and Judahi Rosemblantt, Probability and Statisties, W.B. Company, Philadelphia,1972

3.- CRAMER, Harold, T. Calleja, Anselmo, Elementos de Teoría de Probabilidades y aplicaciones, Aguilar S.A. de Ediciones Madrid, 1968

4.- FELLER, William, An Introduction to Probability and its aplications, Vol. 1. John Wiley and sons Inc. New York, 1970.

5.- KAUFMANN A. y Cruon R., Los Fenómenos de Espera, Compañía Editorial Continental, S.A., México, 1966.

6.- LA VALLE H. Irving, An Introduction to Probability, Decision and Inference, Holt, Rinehart and Winston, Inc. New York, 1970.

7.- LOZANO CONEJERO Antonio, Confiabilidad, Teoría y Práctica, Editorial Universitaria de Buenos Aires, Buenos Aires, 1969.

8.- RIOS Sixto, Métodos Estadísticos, McGraw Hill Book Company, Edición del Castillo S.A., Madrid,1967

9.- ROJAS Jaime, Procesos Estadísticos y Teoría de Colas, Cienes 17773 (150), Santiago, 1970

10.- WILKS Samuel, Mathematical Statisties, Jonh Wiley and Sons Inc., New York, 1963.

11.- WHITTAKER E.T., and Watson G. N., A Course of Modern Analysis, Cambridge University Press, 1969.