ESTUDIO DE LA ECUACION DIOFANTICA LINEAL

Saulo Mosquera

Se llaman ecuaciones diofánticas a las ecuaciones algebraicas con coeficientes enteros y con más de una incógnita. La resolución en números enteros de este tipo de ecuaciones es uno de los problemas más difíciles de la teoría de números. Estas ecuaciones reciben el nombre de diofánticas en honor a Diofanto de Alejandría quien vivió en Alejandría aproximadamente en el año 250 A.C. y escribió un tratado de álgebra casi perfecto (según los historiadores) considerando los conocimientos de la época, titulado "LAS ARITMETICAS" (Arithmetica). En esta obra Diofanto establece el método para la resolución de ecuaciones con una y varias incógnitas de primero y segundo grados (caso general) y proporciona ejemplos de solución de ecuaciones particulares de grado superior a 2.

En lo que sigue se tratará de establecer un algoritmo (método) y dar una fórmula para encontrar todas las soluciones en números enteros de la ecuación diofántica lineal en dos variables. Para ello consideremos la ecuación

$$ax + by = c \quad \text{con } a,b,c \text{ en } \mathbb{Z};\ a \neq 0,\ b \neq 0. \qquad (1)$$

Para su análisis podemos considerar que M.C.D $(a,b)=1$ ya que si M.C.D $(a,b) = d \neq 1$ entonces $a = a_1 d$ y $b = b_1 d$ que reemplazando en (1) tendríamos $d(a_1 x + b_1 y) + c = 0$

la cual puede tener soluciones enteras solo si c es divisible por d, es decir $c = c_1 d$ y (1) quedaría

$$d(a_1 x + b_1 y + c_1) = 0 \quad \text{o sea} \quad a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$

con M.C.D $(a_1, b_1, c_1) = 1$, ecuación del mismo tipo que (1), por lo cual solo se analizará la ecuación:

$$ax + by + c = 0 \quad \text{con} \quad \text{M.C.D}(a,b) = 1 \qquad (2)$$

Sea (x_0, y_0) una solución particular de (2) y (x,y) una solución cualquiera, entonces

$$ax + by + c = 0 \quad y \quad ax_0 + by_0 + c = 0$$

Restando estas dos igualdades obtenemos:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

luego $y - y_0 = \frac{a}{b}(x_0 - x)$ y como M.C.D$(a,b) = 1$ y $y - y_0$ es entero, entonces b divide a $x_0 - x$, es decir $x_0 - x = bk$, $k \in \mathbb{Z}$ y por lo tanto $y - y_0 = \frac{abk}{b}$, en consecuencia $x_0 - x = bk$ y $y - y_0 = ak$, $k \in \mathbb{Z}$; de aquí deducimos que:

$$x = x_0 - bk, \quad y = y_0 + ak, \quad k \in \mathbb{Z} \qquad (3)$$

En resumen: "Las soluciones enteras de la ecuación $ax + by + c = 0$ con M.C.D$(a,b) = 1$, a,b,c en Z, $a \neq 0$ $b \neq 0$ vienen dadas por las fórmulas $x = x_0 - bk$ y $y = y_0 + ak$ donde k es un entero cualquiera y (x_0, y_0) es una solución particular de ella".

El siguiente interrogante debe tenerlo inquieto: cómo se halla la solución particular (x_0, y_0) ?. La demostración teórica de como resulta ésta, aunque no difícil requiere conocimientos sobre las fracciones continuas que tal vez Ud. no recuerde; pero el siguiente ejemplo ilustra el método a seguir en cualquier caso.

Hallar una solución particular de la ecuación

$$107x - 37y - 1 = 0$$

Según el algoritmo de la división de Euclides:

$107 = 2 \times 37 + 33$, es decir $\dfrac{107}{37} = 2 + \dfrac{33}{37} = 2 + \dfrac{1}{\frac{37}{33}}$

Análogamente $\dfrac{37}{33} = 1 + \dfrac{4}{33} = 1 + \dfrac{1}{\frac{33}{4}}$; $\dfrac{33}{4} = 8 + \dfrac{1}{4}$

Reemplazando estos resultados en la fracción original tenemos:

$$\frac{107}{37} = 2 + \cfrac{1}{\frac{37}{33}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{33}{4}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{4}}}$$

(Aquí lo que se ha hecho es desarrollar 107/37 en fracción continua). Si suprimimos el último término de este desarrollo o sea 1/4 y reducimos lo restante a una fracción ordinaria tenemos:

$$2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8}} = 2 + \cfrac{1}{\frac{9}{8}} = 2 + \frac{8}{9} = \frac{26}{9}$$

Si ahora efectuamos la diferencia entre la fracción original 107/37 y 26/9 obtenemos:

$$\frac{107}{37} - \frac{26}{9} = \frac{1}{37 \times 9} \quad \text{luego} \quad \frac{107}{37} - \frac{26}{9} - \frac{1}{37 \times 9} = 0$$

es decir $107 \times 9 - 37 \times 26 - 1 = 0$, la cual comparada con la ecuación $107x - 37y - 1 = 0$ nos dice que (x_o, y_o)

= (9,26) es una solución particular de ella; luego todas las soluciones enteras de la ecuación $107x - 37y - 1 = 0$ vienen dadas por:

$$x = 9 + 37k, \quad y = 26 + 107k, \quad k \text{ en } Z$$

A manera de aplicación se resuelve el siguiente problema: "Al cambiar un cheque una persona, el cajero del banco se equivoca y le entrega tantos pesos como centavos aparecen en el cheque y tantos centavos como pesos aparecen en el cheque. Si después de haber gastado \$1.50 todavía le queda una cantidad de dinero equivalente al doble del valor girado, cuál era el valor mínimo del cheque ?".

Sea x: número de pesos del cheque

y: número de centavos del cheque

luego: $100x + y$ valor real del cheque (en centavos) y $100y + x$ valor entregado a la persona por el cajero y según las condiciones tenemos que:

$$100y + x - 150 = 2(100x + y)$$

es decir, $$199x - 98y + 150 = 0$$

Desarrollamos 199/98 en fracción continua:

$$\frac{199}{98} = 2 + \frac{3}{98} = 2 + \frac{1}{\frac{98}{3}} = 2 + \cfrac{1}{32 + \frac{2}{3}} = 2 + \cfrac{1}{32 + \cfrac{1}{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{199}{98} = 2 + \cfrac{1}{32 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$$

Suprimimos la última fracción ($\frac{1}{1}$) y reducimos la fracción restante a fracción ordinaria, es decir:

$$2 + \cfrac{1}{32 + \cfrac{1}{1}} = 2 + \frac{1}{33} = \frac{67}{33}$$

Efectuamos la diferencia $\frac{199}{98} - \frac{67}{33} = \frac{1}{98x33}$, en la cual dando común denominador y suprimiéndolo se obtiene:

$$199x33 - 98x67 - 1 = 0$$

Multiplicando por -150 tenemos:

$$199(-4950) - 98(-10050) + 150 = 0$$

(obsérvese que en la ecuación original el término independiente no es -1, sino 150). Comparando esta última igualdad con la ecuación $199x - 98y + 150 = 0$ se observa que $(-4950, -10050)$ es una solución particular de ella y por lo tanto la solución general es:

$$x = -4950 + 98k, \quad y = -10050 + 199k, \quad k \text{ en } \mathbb{Z}$$

pero según las condiciones del problema nos interesa la solución positiva mínima (valor mínimo del cheque). Esta solución se halla cuando $k = 51$ y es:

$$x = -4950 + 98x51, \quad y = -10050 + 199x51$$

es decir: $x = 48$, $y = 99$ y por tanto el valor mínimo del cheque era de $ 48.99.

Un ejercicio interesante es que Ud. trate de hallar un método para encontrar soluciones enteras de la ecuación $ax + by + cz + d = 0$; a,b,c,d en $\mathbb{Z}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ $c \neq 0$.

NOTA: Es importante observar que recíprocamente todo par de números (x_1, y_1) obtenidos a partir de las fórmulas (3) es una solución de la ecuación (2) ya que si:

$x_1 = x_0 - bk_1$ y $y_1 = y_0 + ak_1$ en entonces

$$ax_1 + by_1 + c = a(x_0 - bk_1) + b(y_0 + ak_1) + c =$$

$$= ax_0 - abk_1 + by_0 + bak_1 + c =$$

$$= ax_0 + by_0 + c = 0$$

porque (x_0, y_0) es una solución de la ecuación (2) por lo tanto $ax_1 + by_1 + c = 0$ es decir (x_1, y_1) es una solución de la ecuación $ax + by + c = 0$ con M.C.D.$(a, b) = 1$.