Provincia de Buenos Aires
DirecciÛn General de Cultura y EducaciÛn
Instituto Superior “FundaciÛn Suzuki”
San Miguel, Buenos Aires, Argentina

“EXPRESIONES ALGEBRAICAS IRRACIONALES”

Una mirada a la descomposiciÛn en factores desde las expresiones irracionales

Tesina para optar al tÌtulo de profesor de matem·tica

Del Pin, Juan Carlos

San Miguel, Buenos Aires

Diciembre 2007

AGRADECIMIENTOS

A mi esposa Mercedes y mis hijos MatÌas, Juan Pablo y Daniela, por haber soportado durante cuatro años los apuntes y libros de matem·tica por toda la casa (también mis ausencias).

A Julio Colantonio, compañero y amigo, porque hace cuatro años me convenciÛ para que me inscriba en esta carera, y en este instituto.

Al profesor Claudio Oglietti, por acceder a corregir este trabajo y guiarme en su desarrollo; adem·s por el trato amable que supo acercarnos en estos años y que nos hizo sentir sus amigos.

A la profesora y traductora Patricia Jara, por su ayuda en la traducciÛn del abstract.

A todos los docentes de la instituciÛn por todos los gratos momentos que nos hicieron pasar.

Quiero hacer un reconocimiento especial al profesor Sergio LÛpez, una persona que daba todo en cada clase, con su humor muy particular, con su constante sencillez para explicar reiteradas veces. Su objetivo siempre fue que apreciemos la filosofÌa. Y puedo dar fe que lo consiguiÛ. Gracias Sergio, por lograr que “corra el velo a través del cual miraba las cosas”.

Y, al principio, todo fue curiosidad.[1]

Isaac Asimov

[1] Con esta frase comienza el libro "INTRODUCCIÓN A LA CIENCIA" Vol. 1, Ciencias Fisicas, de Isaac Asimov

Índice general

RESUMEN:

En el presente trabajo presentamos una herramienta-proceso desarrollada a partir de la racionalizaciÛn de expresiones irracionales. Lo dividimos en cuatro secciones: Marco TeÛrico, Desarrollo de Datos, AplicaciÛn y Documento de Trabajo.

En el marco teÛrico presentamos los contenidos previos necesarios y suficientes, para introducirnos en la herramienta-proceso que desarrollaremos en la siguiente secciÛn.

En el desarrollo de los datos se argumenta la posibilidad de escribir un polinomio primo como el producto de expresiones irracionales, partiendo desde la definiciÛn elemental de polinomios, hasta llegar a la necesidad de definir elementos b·sicos de las expresiones irracionales (grado, orden, completitud) que utilizaremos luego en el documento de trabajo.

La aplicaciÛn nos ejemplifica, cÛmo utilizamos la descomposiciÛn de expresiones irracionales, como herramienta para racionalizar una expresiÛn.

Por último, el documento de trabajo que presentaremos a los alumnos para comprobar su funciÛn did·ctica, muestra una aplicaciÛn de la descomposiciÛn de un polinomio primo en la racionalizaciÛn de fracciones.

ABSTRACT:

In this work we present a tool – process developed from the rationalization of irrational expressions.

We divided it in four sections: Theoretical Frame, Data Development, Application and Work Document.

In the Theoretical Frame we present the necessary and enough previous contents, to introduce us in the tool – process that we will develop in the following section.

In the data development, it is presented, the possibility of writing a prime polynomial as the result of irrational expressions, starting from elemental definition of polynomial and arriving to the necessity of defining the basic elements of the irrational expressions (grade, order, completeness) that we will use then along the work.

Application gives us examples of how we use the factorizing of irrational expressions as tools to rationalize an expression.

At last, the work document that we present to the students to prove its didactic function, shows an application of the factorizing of a prime polynomial in the rationalization of fractions.

DESCRIPTORES:

Polinomio primo, factoreo, expresiÛn irracional, divisiÛn, cociente exacto, exponente fraccionario, racionalizaciÛn.

INTRODUCCIÓN

Al encontrarnos con un problema, (ya sea de car·cter matem·tico, o no) ¿de que manera nos afecta interiormente?¿CÛmo nos preparamos para afrontarlo?¿Somos tolerantes al fracaso? Sin intentar responder estos interrogantes, puedo aportar algunas ideas (o por lo menos mis ideas) con relaciÛn a lo que nos sucede interiormente.

Si el problema se presenta de manera confusa o complicada, nos vemos desbordados por él, superados por su complejidad y lo consideramos irresoluble, entonces, lo abandonamos y deja de ser un problema; pero, si nos entusiasma a tal punto que podemos estar un largo tiempo pensando en él, buscando posibles alternativas, investigando literatura especÌfica, preguntando a quien pase al lado nuestro, entonces, también deja de ser un problema y se transforma en un desafÌo.

Parece mentira que esto pueda suceder con un ejercicio de matem·tica, pero asÌ es, me ocurriÛ con uno de ellos, y hace varios años. Cuando llegué al punto de la m·xima confusiÛn, al inminente abandono, y que asÌ dejara de ser un problema, por lo menos para mÌ, encontré la soluciÛn (por supuesto de casualidad) y comenzÛ mi desafÌo.

Encontrar alguna soluciÛn, aunque sea fortuitamente, produce cierta gratificaciÛn; m·s aún cuando no recibimos ayuda extra. Esa gratificaciÛn es la que nos impulsa a querer saber m·s sobre lo que logramos casualmente.

Es aquÌ donde encaja la frase de Asimov:

“Y, al principio, todo fue curiosidad”.

La gloriosa curiosidad…

Esa curiosidad me permitiÛ dar algunos pasos m·s all· del problema (solo algunos pasos), pero me topé con un nuevo inconveniente; la visiÛn que estoy realizando del tema no est· contemplada en los textos de consulta de matem·tica de nivel superior.

Por esto, presento la investigaciÛn introductoria hasta llegar al problema del conflicto (como lo llamo), sabiendo que falta mucho m·s por descubrir.

Solo deseo que la curiosidad siga tan fuerte como para poder seguir avanzando.

FUNDAMENTACIÓN

Se ha difundido que la enseñanza de los principios del c·lculo ha sido siempre problem·tica. Si bien se puede enseñar a los estudiantes a realizar de forma m·s o menos mec·nica algunos c·lculos, se encuentran grandes dificultades para hacerlos operar en el campo del “**cálculo**”, como asÌ también hacerlos alcanzar una comprensiÛn satisfactoria de los conceptos.

En palabras de Florencio EscardÛ[2]: *“la clase magistral es la mejor manera de que las ideas pasen del apunte del profesor al apunte del alumno, sin pasar por la cabeza de ninguno de ellos”.*

Aunque las ideas matem·ticas admiten diversos marcos de representaciÛn, su lenguaje especÌfico es el resultado de la combinaciÛn de signos, sÌmbolos y términos matem·ticos. La resoluciÛn de problemas en todos los ciclos de la educaciÛn da el espacio adecuado para que los alumnos y alumnas lean, escriban y discutan ideas utilizando el lenguaje matem·tico con significado y naturalidad.

En este trabajo se presenta una **herramienta-proceso**, que surgiÛ a partir del an·lisis de la racionalizaciÛn de expresiones irracionales. En ocasiones, la búsqueda de la soluciÛn para estas fracciones irracionales se

[2] Florencio EscardÛ, el médico pediatra m·s importante que tuvo el paÌs, naciÛ en Mendoza en 1904. Quiso ser médico para imitar a su abuelo, un cirujano del ejército inglés que luchÛ contra NapoleÛn Bonaparte.
También fue un destacado escritor, poeta, humorista y periodista: con los seudÛnimos PiolÌn de Macramé y Juan de Garay, escribiÛ columnas en distintos periÛdicos, desde donde se expresÛ sobre muy diversos temas, desde médicos o farmacolÛgicos hasta filosÛficos y de vida cotidiana.
TenÌa 88 años muy bien llevados cuando muriÛ en 1992. Antes, habÌa sido nombrado Ciudadano Ilustre de la Ciudad de Buenos Aires.

torna muy complicada y tediosa, por eso, el desarrollo que proponemos aporta una herramienta valedera y efectiva para su aplicaciÛn en la soluciÛn de problemas, y posterior discusiÛn.

Galileo Galilei, en Il Saggiatore[3] expresa que *“la Filosofía está escrita en ese grandísimo libro que tenemos abierto ante los ojos, quiero decir, el Universo, pero no se puede entender si antes no se aprende su lengua, a conocer los caracteres en que está escrito. Está escrito en Lengua Matemática y sus símbolos son triángulos, círculos, y otras figuras geométricas, sin las cuales es imposible entender ni una palabra”*.

Por todo esto, si la matem·tica es la herramienta que utiliza la mente para comprender la naturaleza, el lenguaje matem·tico debe ser la voz de esa mente que conoce y quiere comunicarlo. Entonces, las nuevas herramientas que surjan para poder entender este Universo, deben ser transmitidas con el lenguaje matem·tico pertinente.

La Matemática es la herramienta de la mente para comprender y explicar los fenómenos que suceden en la Naturaleza.

[3] Galileo Galilei publica *Il Saggiatore* (El ensayador) en 1623.
Fuente consultada: www.luventicus.org/articulos/03C001/**galileo**

SUPUESTOS

1. Suponemos que los polinomios primos pueden descomponerse por medio de una multiplicaciÛn de expresiones irracionales.
2. Consideramos que la **herramienta-proceso** que se propone es extensible a todo binomio irracional.
3. Suponemos que es una herramienta valedera y de sencilla aplicaciÛn para los alumnos del nivel medio.
4. Suponemos que las expresiones a las que arribaremos tienen relaciÛn con “sucesiones”[4] conocidas.

LIMITACIONES

5. No tenemos la posibilidad de comprobar fehacientemente si esta **herramienta-proceso** es extensible a todo binomio irracional.
6. El car·cter did·ctico de esta herramienta la experimentaremos con un reducido número de alumnos de una escuela polimodal.
7. La bibliografÌa que toma la perspectiva que proponemos es muy escasa, por lo tanto cada interrogante que se nos presente en los c·lculos matem·ticos los debemos comprobar experimentalmente.
8. Los interrogantes que nos alejen del problema planteado requerir·n de un tratamiento particular, por tal motivo no lo tendremos en cuenta en el presente trabajo.

[4] Ver glosario

MARCO TEÓRICO

1. POLINOMIOS FORMALES

1.1.Revisión del concepto de polinomio.

Toda expresiÛn algebraica entera, con $a_0, \ldots, a_n$ constantes en algún anillo con a_n distinto de cero, para $n \in N_0$, se llama polinomio de grado *n,* en la variable **x,** y es un objeto de la forma:

$$F_{(x)} = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

El polinomio se puede escribir m·s concisamente usando una notaciÛn general como la siguiente:

$$F_{(x)} = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Las constantes $a_0, \ldots, a_n$ se llaman coeficientes del polinomio, y ***x*** es un sÌmbolo llamado indeterminada. A a_0 se le llama término independiente o coeficiente constante y a a_n, coeficiente principal. Cuando el coeficiente principal es 1, al polinomio se lo llama mÛnico o normado. A cada sumando $a_i\, x^i$ del polinomio se lo llama término.

1.2.Polinomio ordenado y completo.

Un polinomio est· ordenado cuando los términos o monomios que lo componen est·n escritos en forma creciente o decreciente según sus grados, por ejemplo:

El polinomio $P_{(x)} = -7x^5 + 4x^2 + 3x - 1$ est· ordenado en forma decreciente.

Un polinomio est· completo si, al estar ordenado, aparecen en él todas las potencias menores de la variable a partir de la mayor de ellas; cuando est· incompleto, se le agregan los términos faltantes, con coeficientes nulos.

El polinomio $T_{(x)} = 4x^5 + 3x^3 - 2x - 8$ est· incompleto, pero lo completamos de la siguiente manera:

$$T_{(x)} = 4x^5 + 0x^4 + 3x^3 + 0x^2 - 2x - 8$$

1.3. Secuencia en los grados.

Todo polinomio en una variable, por ejemplo x, presenta un grado que depender· del exponente de la indeterminada en cada término (Por la definiciÛn de polinomio sabemos que el exponente de la indeterminada es un número natural). Entonces, si est· completo y ordenado en forma decreciente, los grados aparecer·n con saltos de una unidad. Es decir, que en ningún polinomio aparecer· un salto decimal entre grados de términos adyacentes.

Por ejemplo:

Saltos de una unidad, de las potencias,
en forma decreciente

$$B_{(x)} = -2x^3 + 5x^2 - x^1 + 10x^0$$

2. EXPRESIONES IRRACIONALES.

2.1. Definición.

Una expresiÛn algebraica es irracional cuando al menos una de las variables est· afectada por la radicaciÛn, por ejemplo:

$$\sqrt{x} + 2x$$

Si las indeterminadas de todos los términos est·n afectadas por radicales de igual Ìndices tendremos:

$$P_{(x)} = 2\sqrt{x} + \sqrt{x^3}$$
$$P_{(x)} = 2x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}}$$

Si usamos una definiciÛn y una nomenclatura similar a la de polinomio, tendremos: “Toda expresiÛn algebraica no entera, con a_0, ..., a_k constantes en algún anillo con a_k distinto de cero, con $k \in N$, y $n \in N$ y constante, se llama expresiÛn irracional en la variable **x,** y es un objeto de la forma”:

$$F_{(x)} = a_0 x^{\frac{0}{n}} + a_1 x^{\frac{1}{n}} + a_2 x^{\frac{2}{n}} + \ldots + a_k x^{\frac{k}{n}}$$

$$F_{(x)} = \sum_{i=0}^{k} a_i x^{\frac{i}{n}}$$

2.2.Expresión irracional ordenada y completa.

Una expresiÛn irracional esta ordenada cuando los términos de la misma est·n escritos en forma creciente o decreciente según los exponentes fraccionarios de la indeterminada que la compone, a dicho exponente lo llamaremos grado del término.

Por ejemplo:

$$x^{\frac{4}{4}}+5x^{\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}x^{\frac{2}{4}}+x^{\frac{1}{4}}-4x^{\frac{0}{4}}$$

Una expresiÛn irracional est· completa si, al estar ordenada, aparecen en ella todas las potencias fraccionarias menores de la variable a partir de la mayor de ellas; cuando est· incompleto, se le agregan los términos faltantes, con coeficientes nulos.

Por ejemplo:

$$x^{\frac{4}{4}}+2x^{\frac{2}{4}}-x^{\frac{0}{4}}$$

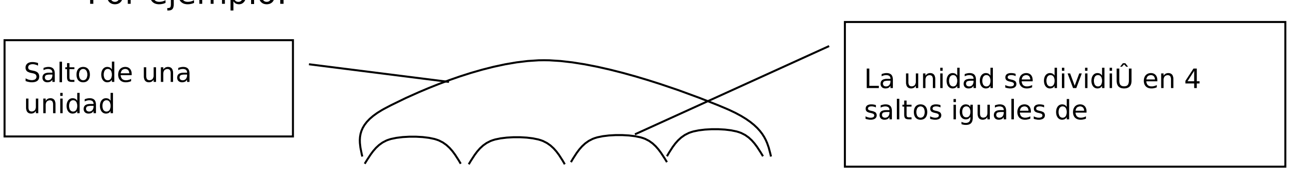
pero al completarla nos queda:

$$x^{\frac{4}{4}}+0x^{\frac{3}{4}}+2x^{\frac{2}{4}}+0x^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{0}{4}}$$

2.3. Secuencia en los grados.

Toda expresiÛn irracional en una variable, por ejemplo x, presenta un grado que depender· de los exponentes fraccionarios de la indeterminada en cada término.   Entonces, si est· completa y ordenada en forma decreciente, los grados aparecer·n con saltos fraccionarios iguales.

Por ejemplo:



$$x^{\frac{4}{4}}+5x^{\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}x^{\frac{2}{4}}+x^{\frac{1}{4}}-4x^{\frac{0}{4}}$$

2.4. Racionalización de una expresión irracional.

La racionalizaciÛn, es la operaciÛn que elimina las expresiones radicales que pueden aparecer; generalmente se utiliza para eliminar las que aparecen en los denominadores.

2.5. Racionalización de denominadores.

Racionalizar un denominador significa transformar una fracciÛn cuyo denominador es un número irracional (que contiene un radical) en otra fracciÛn equivalente a la dada cuyo denominador sea racional.

Al racionalizar desaparece del denominador todo signo radical que se presente en el ejercicio inicial.

- ✓ 1° Caso:

  Si el denominador de un cociente contiene un factor de la forma $\sqrt[n]{a^n}$, con ***k<n*** y ***a > 0***, entonces al multiplicar numerador y denominador por $\sqrt[n]{a^{n-k}}$ eliminaremos el radical del denominador.

Ejemplos:

$$\frac{2}{\sqrt{5}}=$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{2.\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}}=\frac{2.\sqrt{5}}{5}=\frac{2}{5}\sqrt{5}$$

$$\frac{3a^2}{4\sqrt[7]{b^2}} =$$

$$\frac{3a^2}{4\sqrt[7]{b^2}} \cdot \frac{\sqrt[7]{b^5}}{\sqrt[7]{b^5}} = \frac{3a^2\ \sqrt[7]{b^5}}{4\sqrt[7]{b^7}} = \frac{3a^2\ \sqrt[7]{b^5}}{4\,b}$$

- ✓ 2° Caso:

  Si el denominador de un cociente es un binomio (2 términos) formado por raìces cuadradas (en ambos términos o en uno solo), se multiplica numerador y denominador por el conjugado del binomio.

Ejemplo:

> **Nota:**
> El conjugado de un binomio ***(a + b)***, es ***(a – b)*** ; y el conjugado de un binomio ***(a – b)*** , es ***(a + b)***.

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1.\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}+1\right).\left(\sqrt{2}-1\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}-1}{\left(\sqrt{2}\right)^2-1} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2}-1$$

2.6. Factorización

Gracias a la TeorÌa de Números[5], podemos afirmar que una ecuaciÛn de la forma $ax = b$, no siempre tiene soluciÛn entera. Cuando existe tal soluciÛn decimos que “b” es divisible por “a”. Cuando “b” es divisible por “a”, también se dice que “a” es divisor o factor de “b”, y que “b” es múltiplo de “a”.

También sabemos que un entero “p” es primo si, siendo distinto de 0 y de ± 1, es divisible únicamente por $\pm 1 \; y \pm p$. Un número que sea distinto de 0 y ± 1 y que no sea primo, se llama compuesto.

Esta teorÌa de números nos dice que se llama “factorizar un número” a la operaciÛn de descomponer en factores primos todo número compuesto, por ejemplo:

$$128 = 2^7$$
$$672 = 7 * 3 * 2^5$$
$$90 = 2 * 5 * 3^2$$

Lo expuesto anteriormente esta garantizado por el **“Teorema fundamental de la aritmética”**

---

[5] La teorÌa de números es una parte del ·lgebra en la que se estudian las operaciones en (Z), que no arrojan resultados fuera del mismo. Esta condiciÛn hace que por ejemplo las operaciones divisiÛn y raÌz queden fuera, ya que pueden producir resultados no enteros.

Es por eso que se necesita desarrollar un ·lgebra especial, y hay dos herramientas que nos ayudan a resolver problemas en el campo de los enteros:

1. **Las ecuaciones Diofánticas:** Estas son ecuaciones del tipo:

   a.x+b.y=c

   donde a, b, c son coeficientes enteros y las incÛgnitas son x, y también enteras.

2. **Congruencia:** Se trata de una relaciÛn del tipo:

   a $\equiv$ b (m)

donde a, b, m son enteros y el sÌmbolo $\equiv$ es el de congruencia. La ecuaciÛn se lee como: ***a es congruente con b módulo m***, y se verifica si **a-b es divisible por m**.

<u>Teorema</u>: *"Todo entero distinto de 0 puede expresarse como el producto de (± 1) por factores primos positivos. Esta expresión es única, salvo el orden en que los factores se consideren".*

Entonces todo número primo no puede expresarse como producto de primos, pero si como producto de reales, es decir:

$$p = a * b$$

Donde:
p = primo
a, b $\in R$

por ejemplo:

$$3 = \sqrt{3} * \sqrt{3}$$

$$3 = \frac{3}{5} * 5$$

Esta idea de descomposiciÛn de un primo "p" en factores reales, ¿puede extenderse a los polinomios considerados irreducibles (primos)?

Por el "teorema de la factorizaciÛn única", todo polinomio $A_{(x)}$, no constante, puede expresarse como el producto de una constante "c" por otros polinomios mÛnicos primos. Esta descomposiciÛn es única, salvo el orden de los factores.

Por ejemplo:

$$A_{(x)} = c * P_{(x)} * T_{(x)} * \ldots$$

Donde:
$P_{(x)}; T_{(x)}; \ldots$ *son irreducible*

Al igual que los números primos, los polinomios primos no pueden descomponerse en otros polinomios que también lo sean, pero ¿podremos descomponerlos en productos de expresiones algebraicas irracionales?

ANÁLISIS DE DATOS

1. POLINOMIO PRIMO VS EXPRESIÓN IRRACIONAL.

Un polinomio primo de la forma $(x \pm a)$, con $a \in R$, puede completarse de acuerdo a potencias fraccionarias como si se tratase de una expresiÛn irracional.

Ejemplo:

$P_{(x)} = x - 1$ Polinomio primo, ordenado y completo, de grado 1

Podemos completarlo, considerando una secuencia fraccionaria decreciente de, por ejemplo, $\frac{1}{4}$.

$$P_{(x)} = x^{\frac{4}{4}} + 0x^{\frac{3}{4}} + 0x^{\frac{2}{4}} + 0x^{\frac{1}{4}} + 1x^{\frac{0}{4}}$$

Si consideramos una secuencia fraccionaria decreciente de $\frac{1}{3}$, nos queda:

$$P_{(x)} = x^{\frac{3}{3}} + 0x^{\frac{2}{3}} + 0x^{\frac{1}{3}} + 1x^{\frac{0}{3}}$$

Entonces, podemos tener infinitas formas completas irracionales del polinomio (x – 1), de acuerdo a la secuencia fraccionaria que consideremos para completar.

2.DIVISIÓN DE UN POLINOMIO PRIMO.

2.1..Polinomio primo.

Todo polinomio de la forma $(x \pm a)$ tiene las mismas caracterÌsticas de los números primos, es decir, solo pueden dividirse por si mismos y por ± 1, pero si intentamos dividirlos por expresiones irracionales de la forma $\left(x^{\frac{1}{n}} \pm a^{\frac{1}{n}}\right)$, encontraremos que obtenemos, en algunos casos, cocientes exactos.

Ejemplo:

$$(x-1) \div \left(x^{\frac{1}{3}} - 1\right)$$

$$\begin{array}{r|l}
x + 0x^{\frac{2}{3}}1^{\frac{1}{3}} + 0x^{\frac{1}{3}}1^{\frac{2}{3}} - 1 & x^{\frac{1}{3}} - 1^{\frac{1}{3}} \\ \cline{2-2}
\underline{-x + x^{\frac{2}{3}}1^{\frac{1}{3}}} \qquad\qquad\qquad & x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}1^{\frac{1}{3}} + 1^{\frac{2}{3}} \\
x^{\frac{2}{3}}1^{\frac{1}{3}} + 0x^{\frac{1}{3}}1^{\frac{2}{3}} \qquad & \\
\underline{-x^{\frac{2}{3}}1^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}}1^{\frac{2}{3}}} \qquad & \\
x^{\frac{1}{3}}1^{\frac{2}{3}} - 1 & \\
\underline{-x^{\frac{1}{3}}1^{\frac{2}{3}} + 1} & \\
0 \quad &
\end{array}$$

Los números 1 con potencias fraccionarias se ubicaron para que sea mas sencillo el seguimiento de la operaciÛn, compar·ndola con la divisiÛn tradicional de polinomios.

Entonces podemos decir que:

$$x - 1 = \left(x^{\frac{1}{3}} - 1\right) * \left(x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} + 1\right)$$

Hemos logrado escribir el polinomio primo irreducible $(x-1)$, como producto de dos expresiones irracionales.

Si analizamos la divisiÛn anterior, observamos que si el divisor es $\left(x^{\frac{1}{3}} + 1\right)$, el cociente no es exacto.

$$\begin{array}{r|l}
x + 0x^{\frac{2}{3}}1^{\frac{1}{3}} + 0x^{\frac{1}{3}}1^{\frac{2}{3}} - 1 & x^{\frac{1}{3}} + 1^{\frac{1}{3}} \\ \cline{2-2}
\underline{-x - x^{\frac{2}{3}}1^{\frac{1}{3}}} \qquad\qquad\qquad & x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}1^{\frac{1}{3}} + 1^{\frac{2}{3}} \\
- x^{\frac{2}{3}}1^{\frac{1}{3}} + 0x^{\frac{1}{3}}1^{\frac{2}{3}} \qquad & \\
\underline{x^{\frac{2}{3}}1^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}}1^{\frac{2}{3}}} \qquad & \\
x^{\frac{1}{3}}1^{\frac{2}{3}} - 1 & \\
\underline{-x^{\frac{1}{3}}1^{\frac{2}{3}} - 1} & \\
2 \quad &
\end{array}$$

Para verificar si esto sucede con todas las secuencias fraccionarias de denominador impar probamos con las siguientes divisiones:

$(x-1)\div\left(x^{\frac{1}{5}}-1\right)=$ Tiene cociente exacto $x^{\frac{4}{5}}+x^{\frac{3}{5}}+x^{\frac{2}{5}}+x^{\frac{1}{5}}+1$

$(x-1)\div\left(x^{\frac{1}{5}}+1\right)=$ No tiene cociente exacto

$(x-1)\div\left(x^{\frac{1}{7}}-1\right)=$ Tiene cociente exacto $x^{\frac{6}{7}}+x^{\frac{5}{7}}+x^{\frac{4}{7}}+x^{\frac{3}{7}}+x^{\frac{2}{7}}+x^{\frac{1}{7}}+1$

$(x-1)\div\left(x^{\frac{1}{7}}+1\right)=$ No tiene cociente exacto

$\vdots$

Esto nos demuestra lo que habÌamos supuesto en el p·rrafo anterior: cuando el binomio primo irreducible es una diferencia, sÛlo se consigue cociente exacto con divisores que presenten también una diferencia.

Trabajamos, ahora con el polinomio $(x+1)$, y analizamos que divisores acepta. Comenzamos con una secuencia de potencias fraccionarias de denominador impar.

No tiene cociente exacto

Tiene cociente exacto $x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}+1$

No tiene cociente exacto

Tiene cociente exacto $x^{\frac{4}{5}}-x^{\frac{3}{5}}+x^{\frac{2}{5}}-x^{\frac{1}{5}}+1$

No tiene cociente exacto

Tiene cociente exacto $x^{\frac{6}{7}}-x^{\frac{5}{7}}+x^{\frac{4}{7}}-x^{\frac{3}{7}}+x^{\frac{2}{7}}-x^{\frac{1}{7}}+1$

$$(x+1)\div\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)=$$
$$(x+1)\div\left(x^{\frac{1}{3}}+1\right)=$$
$$(x+1)\div\left(x^{\frac{1}{5}}-1\right)=$$
$$(x+1)\div\left(x^{\frac{1}{5}}+1\right)=$$
$$(x+1)\div\left(x^{\frac{1}{7}}-1\right)=$$
$$(x+1)\div\left(x^{\frac{1}{7}}+1\right)=$$
$$\vdots$$

Si el binomio primo irreducible es una suma de términos, sÛlo se consigue cociente exacto con divisores que presenten una suma.

Si ahora volvemos con $(x-1)$, pero tomando divisores con una secuencia de potencia fraccionaria de denominador par, es decir, si dividimos:

$$(x-1)\div\begin{cases}\left(x^{\frac{1}{4}}-1\right)\\ o\\ \left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)\end{cases}$$

tendremos que analizar las 2 posibilidades que se nos presentan.

Comenzamos dividiendo por el binomio resta:

$$
\begin{array}{l|l}
x+0x^{\frac{3}{4}}+0x^{\frac{2}{4}}+0x^{\frac{1}{4}}-1 & x^{\frac{1}{4}}-1 \\
\cline{2-2}
\underline{-x+\ x^{\frac{3}{4}}} & x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{2}{4}}+x^{\frac{1}{4}}+1 \\
\quad x^{\frac{3}{4}}+0x^{\frac{2}{4}} & \\
\quad \underline{-x^{\frac{3}{4}}+\ \ x^{\frac{2}{4}}} & \\
\qquad x^{\frac{2}{4}}+0x^{\frac{1}{4}} & \\
\qquad \underline{-x^{\frac{1}{3}}+\ x^{\frac{1}{4}}} & \\
\qquad\quad x^{\frac{1}{4}}-1 & \\
\qquad\quad \underline{-x^{\frac{1}{4}}+1} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Encontramos cociente exacto

Si analizamos la divisiÛn anterior, observamos que si el divisor es $\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)$, nos queda:

$$
\begin{array}{l|l}
x+0x^{\frac{3}{4}}+0x^{\frac{2}{4}}+0x^{\frac{1}{4}}-1 & x^{\frac{1}{4}}+1 \\
\cline{2-2}
\underline{-x-\ x^{\frac{3}{4}}} & x^{\frac{3}{4}}-x^{\frac{2}{4}}+x^{\frac{1}{4}}-1 \\
\quad -x^{\frac{3}{4}}+0x^{\frac{2}{4}} & \\
\quad \underline{\ x^{\frac{3}{4}}+\ \ x^{\frac{2}{4}}} & \\
\qquad x^{\frac{2}{4}}+0x^{\frac{1}{4}} & \\
\qquad \underline{-x^{\frac{1}{3}}-\ x^{\frac{1}{4}}} & \\
\qquad\quad -x^{\frac{1}{4}}-1 & \\
\qquad\quad \underline{\ \ x^{\frac{1}{4}}+1} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

También encontramos cociente exacto

El binomio primo irreducible resta, acepta ser dividido por binomios suma y resta con secuencia de potencias fraccionarias de denominador par.

La tarea ahora es probar con binomios primos irreducibles suma:

$$\left(x+1\right) \div \left\{ \begin{array}{l} \left(x^{\frac{1}{4}}-1\right) \\ o \\ \left(x^{\frac{1}{4}}+1\right) \end{array} \right.$$

tenemos que analizar las dos posibilidades que se nos presentan.

Comenzamos dividiendo por el binomio resta.

$$\begin{array}{l|l} x+0x^{\frac{3}{4}}+0x^{\frac{2}{4}}+0x^{\frac{1}{4}}+1 & x^{\frac{1}{4}}-1 \\ \cline{2-2} \underline{-x+\ x^{\frac{3}{4}}} & x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{2}{4}}+x^{\frac{1}{4}}+1 \\ \quad x^{\frac{3}{4}}+0x^{\frac{2}{4}} & \\ \quad \underline{-x^{\frac{3}{4}}+\ x^{\frac{2}{4}}} & \\ \qquad x^{\frac{2}{4}}+0x^{\frac{1}{4}} & \\ \qquad \underline{-x^{\frac{1}{3}}+\ x^{\frac{1}{4}}} & \\ \qquad\quad x^{\frac{1}{4}}+1 & \\ \qquad\quad \underline{-x^{\frac{1}{4}}+1} & \\ \qquad\qquad 2 & \end{array}$$

El cociente no es exacto

Y dividiendo por el binomio suma:

$$
\begin{array}{l|l}
x + 0x^{\frac{3}{4}} + 0x^{\frac{2}{4}} + 0x^{\frac{1}{4}} + 1 & x^{\frac{1}{4}} + 1 \\
\hline
\underline{-x - x^{\frac{3}{4}}} & x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{2}{4}} + x^{\frac{1}{4}} - 1 \\
\quad -x^{\frac{3}{4}} + 0x^{\frac{2}{4}} & \\
\quad \underline{+x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{2}{4}}} & \\
\qquad x^{\frac{2}{4}} + 0x^{\frac{1}{4}} & \\
\qquad \underline{-x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{4}}} & \\
\qquad\quad -x^{\frac{1}{4}} + 1 & \\
\qquad\quad \underline{+x^{\frac{1}{4}} + 1} & \\
\qquad\qquad 2 &
\end{array}
$$

El cociente no es exacto

El binomio primo irreducible suma, no acepta ser dividido por binomios suma y resta con secuencia de potencias fraccionarias de denominador par.

2.2.Resumen de resultados.

Dividendo	Divisor	n	Cociente
$(x \pm 1)$	$\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right)$	Par o impar	Exacto
$(x - 1)$	$\left(x^{\frac{1}{n}} + 1\right)$	Impar	No es exacto
$(x - 1)$	$\left(x^{\frac{1}{n}} + 1\right)$	Par	Exacto
$(x + 1)$	$\left(x^{\frac{1}{n}} + 1\right)$	Impar	Exacto
$(x + 1)$	$\left(x^{\frac{1}{n}} \pm 1\right)$	Par	No exacto

2.3.Generalización de la división

Si observamos los cocientes de las divisiones realizadas, dentro del mismo grupo representados por los renglones de la tabla anterior, podemos encontrar caracterÌsticas generales. Es asÌ, que tenemos:

1) $(x-a)\div\left(x^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n}}\right)=$ con “*n*” par o impar

Los cocientes se comportan como:

$$x^{\frac{n-1}{n}}*a^{\frac{0}{n}}+x^{\frac{n-2}{n}}*a^{\frac{1}{n}}+\ldots x^{\frac{n-n}{n}}*a^{\frac{n-1}{n}}$$

2) $(x-a)\div\left(x^{\frac{1}{n}}+a^{\frac{1}{n}}\right)=$ con “*n*” par

Los cocientes se comportan como:

$$x^{\frac{n-1}{n}}*a^{\frac{0}{n}}-x^{\frac{n-2}{n}}*a^{\frac{1}{n}}+x^{\frac{n-3}{n}}*a^{\frac{2}{n}}-\ldots-x^{\frac{n-n}{n}}*a^{\frac{n-1}{n}}$$

3) $(x+a)\div\left(x^{\frac{1}{n}}+a^{\frac{1}{n}}\right)=$ con “*n*” impar

Los cocientes se comportan como:

$$x^{\frac{n-1}{n}}*a^{\frac{0}{n}}-x^{\frac{n-2}{n}}*a^{\frac{1}{n}}+x^{\frac{n-3}{n}}*a^{\frac{2}{n}}-\ldots+x^{\frac{n-n}{n}}*a^{\frac{n-1}{n}}$$

Es asÌ, que podemos escribir fÛrmulas generales para cada una de ellas:

1) Cuando n es par o impar y el dividendo es $(x-a)$:

$$(x-a)\div\left(x^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n}}\right)=x^{\frac{n-1}{n}}+x^{\frac{n-2}{n}}*a^{\frac{1}{n}}+x^{\frac{n-3}{n}}*a^{\frac{2}{n}}+\ldots+x^{\frac{n-n}{n}}*a^{\frac{n-1}{n}}$$

$$\boxed{\frac{(x-a)}{\left(x^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n}}\right)}=\sum_{i=1}^{n}x^{\frac{n-i}{n}}*a^{\frac{i-1}{n}}}$$

2) Con divisor suma y n par:

$$(x-a)\div\left(x^{\frac{1}{n}}+a^{\frac{1}{n}}\right)=x^{\frac{n-1}{n}}-x^{\frac{n-2}{n}}*a^{\frac{1}{n}}+x^{\frac{n-3}{n}}*a^{\frac{2}{n}}-\ldots-x^{\frac{n-n}{n}}*a^{\frac{n-1}{n}}$$

$$\boxed{\frac{(x-a)}{\left(x^{\frac{1}{n}}+a^{\frac{1}{n}}\right)}=\sum_{i=1}^{n} x^{\frac{n-i}{n}} * a^{\frac{i-1}{n}} *(-1)^{i-1}}$$

3) Cuando n es impar y el dividendo es $(x+a)$:

$$(x+a) \div\left(x^{\frac{1}{n}}+a^{\frac{1}{n}}\right)=x^{\frac{n-1}{n}}-x^{\frac{n-2}{n}} * a^{\frac{1}{n}}+x^{\frac{n-3}{n}} * a^{\frac{2}{n}}-\ldots+x^{\frac{n-n}{n}} * a^{\frac{n-1}{n}}$$

$$\boxed{\frac{(x+a)}{\left(x^{\frac{1}{n}}+a^{\frac{1}{n}}\right)}=\sum_{i=1}^{n} x^{\frac{n-i}{n}} * a^{\frac{i-1}{n}} *(-1)^{i-1}}$$

2.4. Descomposición en factores de polinomios primos de la forma $(x \pm a)$.

Si trabajamos con las expresiones generales del apartado **2.3.)**, podemos escribir las fÛrmulas de las descomposiciones de los polinomios primos de la forma $(x \pm a)$**:**

1) Cuando n es par o impar :

$$\boxed{(x-a)=\left(x^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n}}\right) *\left(\sum_{i=1}^{n} x^{\frac{n-i}{n}} * a^{\frac{i-1}{n}}\right)}$$

2) Cuando n es solamente par:

$$\boxed{(x-a)=\left(x^{\frac{1}{n}}+a^{\frac{1}{n}}\right) *\left(\sum_{i=1}^{n} x^{\frac{n-i}{n}} * a^{\frac{i-1}{n}} *(-1)^{i-1}\right)}$$

3) Cuando n es solamente impar:

$$\boxed{(x+a)=\left(x^{\frac{1}{n}}+a^{\frac{1}{n}}\right)*\left(\sum_{i=1}^{n}x^{\frac{n-i}{n}}*a^{\frac{i-1}{n}}*(-1)^{i-1}\right)}$$

APLICACIÓN

1.FRACCIONES CON DENOMINADOR IRRACIONAL

La eliminaciÛn de radicales de denominadores, representa uno de los temas de aplicaciÛn de las expresiones irracionales.

Cuando se trabaja con radicales, es frecuente encontrarse con expresiones algebraicas fraccionarias que tienen radicales en el denominador, y para facilitar los c·lculos, se busca expresar estas fracciones a través de expresiones equivalentes a ellas, pero sin radicales en el denominador.

Recordemos que, dada una fracciÛn numérica, las equivalentes a ellas son todas aquellas que se obtienen de multiplicar numerador y denominador por un mismo número, o sea, por una fracciÛn aparente.

1.1.Racionalización.

Tenemos una fracciÛn irracional, cuyo denominador es un binomio de la forma $\left(\sqrt[n]{x} \pm \sqrt[n]{a}\right)$, por ejemplo:

$$\frac{3}{\sqrt[5]{a}+\sqrt[5]{b}} =$$

Para eliminar las raÌces del denominador, debo multiplicar por una fracciÛn aparente que me garantice la obtenciÛn, en el denominador de $(a+b)$.

Si tengo que multiplicar $\sqrt[5]{a}+\sqrt[5]{b}$ por una expresiÛn que no conozco, para obtener $a+b$, entonces realizo la divisiÛn $(a+b)\div\left(\sqrt[5]{a}+\sqrt[5]{b}\right)$ y dicho cociente (desconocido) ser· lo que estoy buscando.

$$\underbrace{\frac{3}{\sqrt[5]{a}+\sqrt[5]{b}}}*\frac{(Desconocido)}{\underbrace{(Desconocido)}}=\frac{3*(Desconocido)}{\underbrace{(a+b)}}$$

$$\begin{array}{l|l}
a \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + b & a^{\frac{1}{5}}+b^{\frac{1}{5}} \\ \cline{2-2}
\underline{-a^{\frac{5}{5}}-a^{\frac{4}{5}}b^{\frac{1}{5}}} & a^{\frac{4}{5}}-a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{1}{5}}+a^{\frac{2}{5}}b^{\frac{2}{5}}-a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{3}{5}}+b^{\frac{4}{5}} \\
\quad -a^{\frac{4}{5}}b^{\frac{1}{5}} & \\
\quad \underline{a^{\frac{4}{5}}b^{\frac{1}{5}}+a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{5}}} & \\
\qquad a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{5}} & \\
\qquad \underline{-a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{5}}-a^{\frac{2}{5}}b^{\frac{3}{5}}} & \\
\qquad\quad -a^{\frac{2}{5}}b^{\frac{3}{5}} & \\
\qquad\quad \underline{a^{\frac{2}{5}}b^{\frac{3}{5}}+a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{4}{5}}} & \\
\qquad\qquad a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{4}{5}}+b & \\
\qquad\qquad \underline{-a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{4}{5}}-b^{\frac{5}{5}}} & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

De acuerdo a lo establecido en el apartado **2.4.)** , item 3), podemos escribir:

$$(a+b)=\left(a^{\frac{1}{5}}+b^{\frac{1}{5}}\right)*\left(a^{\frac{4}{5}}-a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{1}{5}}+a^{\frac{2}{5}}b^{\frac{2}{5}}-a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{3}{5}}+b^{\frac{4}{5}}\right)$$

Entonces la expresiÛn irracional desconocida que estamos buscando ser·:

$$\left(a^{\frac{4}{5}} - a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{1}{5}} + a^{\frac{2}{5}}b^{\frac{2}{5}} - a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{3}{5}} + b^{\frac{4}{5}}\right)$$

Y el proceso de racionalizaciÛn nos queda:

$$\frac{3}{a^{\frac{1}{5}} + b^{\frac{1}{5}}} * \frac{\left(a^{\frac{4}{5}} - a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{1}{5}} + a^{\frac{2}{5}}b^{\frac{2}{5}} - a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{3}{5}} + b^{\frac{4}{5}}\right)}{\left(a^{\frac{4}{5}} - a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{1}{5}} + a^{\frac{2}{5}}b^{\frac{2}{5}} - a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{3}{5}} + b^{\frac{4}{5}}\right)} = \frac{3 * \left(a^{\frac{4}{5}} - a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{1}{5}} + a^{\frac{2}{5}}b^{\frac{2}{5}} - a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{3}{5}} + b^{\frac{4}{5}}\right)}{(a+b)} =$$

$$= \frac{3 * \left(\sqrt[5]{a^4} - \sqrt[5]{a^3 b} + \sqrt[5]{a^2 b^2} - \sqrt[5]{ab^3} + \sqrt[5]{b^4}\right)}{(a+b)}$$

DOCUMENTO DE TRABAJO