CARMEN VALDIVÉ, SABRINA GARBIN

ESTUDIO DE LOS ESQUEMAS CONCEPTUALES EPISTEMOLÓGICOS ASOCIADOS A LA EVOLUCIÓN HISTÓRICA DE LA NOCIÓN DE INFINITESIMAL

STUDY OF THE EPISTOMOLOGICAL CONCEPT SCHEMAS ASSOCIATED WITH THE HISTORICAL EVOLUCION OF THE INFINITESIMAL NOTION

RESUMEN. El presente estudio se inscribe en una investigación que analiza los procesos de conceptualización de la noción de infinitesimal en estudiantes de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas. La investigación surge del interés por comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje de conceptos claves del Análisis Matemático como límite, número real y continuidad entre otros. Desde el punto de vista de la matemática y la cognición, estas nociones se reconocen como complejas, que para su conceptualización, se sirven de las ideas intuitivas que poseen los estudiantes sobre los infinitesimales. En el manuscrito se presenta la descripción, análisis y caracterización de los esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción de infinitesimal. Localizamos siete esquemas conceptuales epistemológicos: el infinitesimal visto como una razón, como un indivisible, como una diferencia, como un incremento, como una razón aritmética, como un símbolo y como una función. Asimismo, las ideas, los métodos, las representaciones y las situaciones problemas que los matemáticos abordaron en un cierto contexto

PALABRAS CLAVES: Infinitesimales, esquemas conceptuales epistemológicos, evolución histórica.

ABSTRACT. This study is part of a research project that analyzes the conceptualization processes of the infinitesimal notion in college students majoring in Mathematics. The research project originates with the interest of understanding the processes of teaching and learning key concepts of Mathematical Analysis such as limit, real numbers and continuity among others. From the mathematical and cognition point of view, these notions are recognized as complex. In order to conceptualize them, student's intuition of infinitesimal is needed. In this paper we describe, analyze, and characterize the epistemological concept schemas associated with the historical evolution of the infinitesimal notion. We identify seven epistemological concept schemas: the infinitesimal as a ratio, as an indeterminate, as a difference, as an increment, as an arithmetic ratio, as a symbol, and as a function. Furthermore, ideas, methods, representations, and problems that mathematicians use in specific contexts are presented.

KEY WORDS: Infinitesimals, epistemological concept schema, historic evolution.

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2008), *11*(3): 413 - 450
Recepción: Abril 12, 2007 / Aceptación: Abril 21, 2008

RESUMO. Este estudo é parte de uma investigação que analisa os processos de conceptualização da noção de infinitesimal em alunos da Licenciatura em Ciências Matemáticas. A investigação surge do interesse pela compreensão dos processos de ensino e aprendizagem de conceitos chave da Análise Matemática como o de limite, número real, continuidade, entre outros. Do ponto de vista da Matemática e da cognição, estas noções são reconhecidas como complexas, já que para a sua conceptualização, se servem das ideias intuitivas dos alunos sobre os infinitesimais. O artigo apresenta a descrição, análise e caracterização dos esquemas conceptuais epistemológicos associados à evolução histórica da noção de infinitesimal. Identificamos sete esquemas conceptuais epistemológicos: o infinitesimal visto como uma razão, como um indivisível, como uma diferença, como um incremento, como uma razão aritmética, como um símbolo e como uma função. Além disso, as ideias, os métodos, as representações e as situações problema que os matemáticos abordaram num certo contexto.

PALAVRAS CHAVE: Infinitesimais, esquemas conceptuais epistemológicos, evolução histórica.

RÉSUMÉ. Cette étude s'inscrit dans la recherche qui a pour but l'analyse des processus entrant en jeu dans la conceptualisation de la notion d'infinitésimal chez les étudiants en Sciences Mathématiques. L'intérêt de cette recherche réside dans la compréhension des processus d'enseignement et d'apprentissage pour les concepts-clés de l'Analyse Mathématique comme, entre autres, la limite, le nombre réel et la continuité. D'un point de vue relevant à la fois des mathématiques et de la cognition, ces notions sont considérées comme complexes. Afin de les conceptualiser, les étudiants utilisent des idées intuitives relatives aux infinitésimaux. Ce texte contient la description, l'analyse et la caractérisation des schémas conceptuels épistémologiques associés à l'évolution historique de la notion d'infinitésimal. Nous constatons qu'il existe sept schémas conceptuels épistémologiques : l'infinitésimal interprété comme une raison, un tout indivisible, une différence, un accroissement, une raison arithmétique, un symbole et une fonction. De même, nous mettons en valeur les idées, les méthodes, les représentations et les situations-problèmes que les mathématiciens ont abordées dans un concept particulier.

MOTS CLÉS : Infinitésimaux, schémas conceptuels épistémologiques, évolution historique.

INTRODUCCIÓN

El estudio que se reporta es parte de una investigación en Matemática Educativa, en el que se analizan los procesos de construcción de la noción de infinitesimal en estudiantes de una licenciatura en Ciencias Matemáticas y la asignatura Análisis Matemático. Especialmente se interesa por interpretar, cómo los estudiantes construyen una teoría formal asociada con esta noción, a partir de los esquemas conceptuales (Tall & Vinner, 1981) o desde la interacción entre los esquemas formales e informales (Tall, 2001; Pinto & Tall, 1999); y por describir cómo se podría introducir la teoría formal de tal manera que en su interacción con estos esquemas conceptuales, el estudiante vaya conceptualizando y construyendo un pensamiento coherente.

La conceptualización del infinito matemático y el infinitesimal (infinitamente pequeño), ha sido objeto de estudio por matemáticos en los últimos siglos, y en los últimos tiempos por psicólogos, filósofos y didactas. Así, encontramos en la literatura un gran debate alrededor de la construcción formal, intuitiva y lógica del infinito, y sobre su enseñanza y aprendizaje. En didáctica son varias investigaciones relacionadas con este tema, desde diferentes enfoques, puntos de vista y marcos teóricos. Al respecto, Garbin (2005) afirma:

> Son muchas las investigaciones realizadas, trabajos que representan interés histórico, epistemológico, psicológico, filosófico o didáctico. D'Amore (1996, 1997) recoge numerosos títulos (280) del año 1851 al 1996 y muestra con éstos la dirección que han tomado las investigaciones. Después de 1996 siguen apareciendo nuevos trabajos pero más recientemente la revista Educational Studies in Mathematics dedica, el tema del infinito, el volumen núm. 48 (2001) (Garbin 2005, p. 61).

De la cantidad de manuscritos que se comentan en Garbin (2005), solo 56 estudian al infinito matemático en Cálculo y Análisis Matemático, y 15 analizan el papel de los infinitesimales en Análisis Matemático desde el punto de vista epistemológico, didáctico, matemático y psicológico.

Las preguntas ¿Cómo logran comprender los estudiantes algunos de los conceptos del Análisis cuando están presentes los infinitesimales?, ¿Cómo pueden entender los estudiantes el épsilon (ε) y el delta (δ), los diferenciales $(dy),(dx)$?, ¿Qué imagen formal tiene un estudiante de esos infinitesimales?, y ¿Qué significado tienen las expresiones $|f(x)-l|<\varepsilon$ ó $|x-a|<\delta$ para un estudiante que no tiene un esquema conceptual formal de los infinitesimales?, perfilan el papel de los infinitesimales como infinitamente pequeño en los conceptos claves del Cálculo y por tanto del Análisis Matemático. Recapitulan además, las evidencias que aportan los trabajos de Cornú (1981,1991), Sierspinska (1985, 1987a, 1987b) y Tall & Vinner (1981) sobre el concepto de límite.

Aún persiste el interés por el proceso de enseñanza y aprendizaje de los conceptos de límite, número real, continuidad, etc. Nociones matemáticamente y cognitivamente complejas, y que para su conceptualización, se sirven de las ideas intuitivas que poseen los estudiantes sobre los infinitesimales ("una cantidad variable que se puede hacer tan pequeña como se desee", "arbitrariamente pequeño") (Cornú, 1983, 1991; Sierpinska, 1985, 1987a, 1987b; Tall & Vinner, 1981; Vinner, 1983).

A partir de estas ideas intuitivas y en contacto con la teoría formal del Análisis Matemático, los esquemas conceptuales de los estudiantes evolucionan, los formales e informales interactúan de manera coherente o contradictoria. La meta de describir cómo se podría introducir la teoría formal de tal manera que al interactuar estos esquemas conceptuales, el estudiante pueda ir conceptualizando la noción de infinitesimal y construyendo un pensamiento coherente, nos lleva a preguntar: ¿Cuáles son los esquemas conceptuales formales e informales asociados a esta noción de los alumnos de un curso de Análisis Matemático? ¿Cómo evoluciona el esquema conceptual asociado al infinitesimal del estudiante cuando está en contacto con la teoría formal del Análisis Matemático?

La necesidad de tener un marco para el análisis de las producciones de los sujetos que participan en la investigación y poder responder a las preguntas anteriores, nos induce a otra importante cuestión, ¿Cuáles son los *esquemas conceptuales epistemológicos* asociados a la evolución histórica del infinitesimal? La respuesta a esta interrogante permite diferenciar las ideas, los métodos, las representaciones, el contexto y los conceptos asociados a la noción de infinitesimal de los matemáticos más representativos en una época histórica. El estudio que se presenta en este artículo pretende responder a esta pregunta.

El propósito de este trabajo es *aproximarnos* a la identificación, descripción y caracterización de los *esquemas conceptuales epistemológicos* asociados a la evolución histórica de la noción de infinitesimal. Se enfoca a determinar la pluralidad de puntos de vista posibles que le han sido asociados, como: conceptos, contextos, procedimientos, métodos y representaciones. Estos esquemas conceptuales epistemológicos aportan un conocimiento relevante que servirán como marco de referencia para interpretar factores determinantes de los procesos de construcción de los infinitesimales por parte de los sujetos investigados.

Los fundamentos teóricos se ubican dentro del modelo teórico *Pensamiento Matemático Avanzado* (*PMA*), teoría cognitiva desarrollada por Tall (1991, 1992, 1995, 2001, 2004, 2005) y Dreyfus (1990, 1991). Esta investigación distingue entre esquemas conceptuales cognitivos y epistemológicos. Asimismo, muestra la importancia de estudiar la evolución histórico-epistemológica de un concepto matemático. La metodología de la investigación como proceso, contribuye al logro del objetivo. En cuanto a la categorización y descripción de los esquemas conceptuales epistemológicos, se estudian desde la evolución histórico-epistemológica del concepto.

1. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

1.2 *Teoría cognitiva PMA, esquema conceptual y concepción.*

Los conceptos que interesan de esta teoría son: el *concept imagen, evoked concept image* y *met-before concept image* que traducimos como *esquema conceptual*, *esquema conceptual evocado* y *esquema conceptual previo* respectivamente.

El esquema conceptual que tiene una persona de un concepto matemático según Tall y Vinner (1981, p. 151) es la expresión que permite referirse "*a la estructura cognitiva de un individuo asociada a un concepto matemático y que incluye todas las imágenes mentales (imágenes asociadas al concepto en su mente, incluyendo cualquier representación del concepto: gráfica, numérica, simbólica,...), las propiedades y los procesos asociados al concepto*". Este constructo como herramienta de investigación, ha originado interés en muchos investigadores y se ha ido empleando y matizando a través de investigaciones empíricas (Tall (2001, 2004, 2005); Pinto & Tall (1999, 2001); Przenioslo (2004, 2005); Chin & Tall (2001, 2000); Chae & Tall (2005); Watson, Spyrou & Tall (2004), Watson & Tall (2002) y Garbin (2005)).

Por otra parte, según Tall y Vinner (1981, p. 152, traducción libre) *"la parte del esquema conceptual que es activado en un tiempo particular es llamado esquema conceptual evocado. Aparentemente, varias veces pueden ser evocadas imágenes contradictorias. Sólo cuando los aspectos contradictorios son evocados simultáneamente, tiene que haber un conflicto o una confusión, en un sentido real."*

En las investigaciones actuales, observamos que se establece una diferencia entre el esquema conceptual previo, *met-before* (Chin & Tall, 2001; Tall, 2004; Tall, 2005) y un esquema conceptual. El *met-before* se considera asociado a los conocimientos o experiencia previa y que es evocada para darle sentido a una situación. Estos son esenciales en las construcciones de los currículos concebidos como secuencias lógicas. Estas experiencias previas proveen esquemas conceptuales, construidos desde esas experiencias y con tareas cognitivas que pueden soportar pruebas formales (Chin & Tall, 2001).

Algunos autores, para aproximarse a los esquemas conceptuales de los sujetos proponen tipologías, en función de cómo se originaron y de su eficiencia. Distinguen, en primer término, esquema conceptual formal, esquema conceptual informal, esquema conceptual embodied, met-before, esquema conceptual independiente. En función de la efectividad se distinguen esquema conceptual eficiente y esquema conceptual degenerado (Tall, 2001; Pinto & Tall, 1999, 2001; Przenioslo, 2004; Chin & Tall, 2001; Watson et al., 2004 y Tall, 2005). En otros, es posible observar cómo destacan aspectos particulares de los esquemas conceptuales, como los modelos, las representaciones y las concepciones. Estos aspectos requieren de la descripción de los esquemas conceptuales del sujeto para su estudio y análisis (Cornú, 1991; Sierpinska (1987a,1987b); Ruiz, 1998; Robert, 1982; Harel, Selden & Selden, 2006).

Nos interesa rescatar la descripción particular que hacen Tall y Vinner de la noción de esquema conceptual y la proximidad de dicho constructo a la noción de concepción, para introducir la acepción cognitiva y epistemológica del esquema conceptual.

La noción de concepción se considera importante en Matemática Educativa, y de ello da cuenta la literatura, que es extensa. En Ruiz (1998) por ejemplo, se presenta una revisión sistemática alrededor de este término, en la que completa el análisis realizado tanto por Artigue (1989) como por El Bouaizzaoui (1988). Interesa aquí, resaltar el sentido epistemológico de la noción de concepción y la diferenciación entre la acepción cognitiva y epistemológica.

Respecto de la noción de concepción, en el análisis reportado por Ruiz (1998) se reconocen dos sentidos complementarios para este término. Uno desde el punto de vista cognitivo, que está en conexión con los conocimientos y competencias del sujeto con relación a un objeto matemático y el otro, desde el punto de vista epistemológico, que se identifica al estudiar tanto la génesis histórica como la evolución de un concepto. Ruiz señala que *"para un mismo concepto matemático se han ido sucediendo una diversidad de puntos de vista sobre el mismo que, en su momento, fueron considerados como correctos y posteriormente han sido rechazados o revisados"* (p.40).

Al considerar en su estudio el uso de la expresión de concepciones colectivas (El Bouaizzaoui, 1988), Ruiz (1998) diferencia la acepción cognitiva, concepciones del sujeto, con la acepción epistemológica de esta noción. La primera para referirse a los conocimientos del sujeto con relación a un objeto originado por el proceso de enseñanza y aprendizaje. La segunda cuando trata la evolución histórica de los objetos del saber matemático, así como a los programas oficiales y libros de texto de los alumnos.

Coincidimos con Ruiz (1998) cuando cita a Artigue para afirmar la proximidad del constructo esquema conceptual con el de concepción: "*la noción de concept image está muy próxima a la de concepción del sujeto en su sentido* *más global*" Artigue (1989, p.15). Se asume que aun cuando ambos términos tienen definiciones diferentes desde dos marcos teóricos distintos, comparten significados.

Esa proximidad nos permite diferenciar entre la acepción cognitiva y epistemológica del término esquema conceptual. Por *acepción cognitiva del esquema conceptual* del sujeto, entendemos a los conocimientos que este evoca sobre un concepto específico y que son accesibles a la investigación didáctica para representar y describir cada concepto que la persona conoce.

Dado que la noción esquema conceptual en su acepción cognitiva requiere de tareas, situaciones, problemas que lo hacen emerger, de las representaciones, contextos, métodos, conceptos asociados a la noción, y de los procedimientos que el sujeto usa en la solución de dichas situaciones o tareas, caracterizamos en el esquema conceptual refiriéndonos a:

- Las ideas que el sujeto asocia al concepto;
- Las representaciones asociadas que hacen emerger la noción y representaciones propias de la noción. Ambas son imágenes (dibujos, gráficas, palabras, gestos, símbolos) que el sujeto percibe del objeto o concepto y que evoca ante una situación problema o tarea;
- Los procedimientos (algorítmicos, aritméticos, algebraicos, geométricos, manipulaciones simbólicas) que el sujeto activa ante la tarea cognitiva;
- Las ideas más representativas asociadas al objeto matemático;
- El contexto (geométrico, analítico, algebraico, aritmético o físico) que el sujeto asocia ante la situación, y;
- Los métodos (matemáticos) que el sujeto implementa para resolver el problema.

El *esquema conceptual en su carácter epistemológico*, puede referirse a la evolución histórica de los conceptos matemáticos o a los tipos de conocimientos asociados a la noción matemática, así como también a las representaciones, los procedimientos y métodos que los matemáticos usaron para resolver una situación en un contexto específico. Elementos que existieron en un cierto período histórico y que se aceptaron por la comunidad matemática en ese período de tiempo y en ese escenario particular.

La caracterización de la acepción cognitiva descrita en el párrafo anterior contribuyó en la descripción de distintos tipos de esquemas conceptuales epistemológicos, que atendieron a las seis caracterizaciones señaladas previamente, en un tiempo determinado de la historia.

Interesa señalar, que si bien esta caracterización resulta operativa para una tarea de análisis, en la pretensión de acercarse a los esquemas conceptuales asociados a una noción matemática en ambas acepciones, es claro que los "bordes" son difusos y que hay una delicada dependencia entre ellos. Por ejemplo, a la vez que se está representando una situación matemática, también puede estar expresándose una idea de un concepto, e iniciando un método, todo ello en un contexto matemático específico.

1.2. *Importancia del estudio de la evolución histórico-epistemológica de un concepto matemático*

Son varios los investigadores que han señalado la importancia de los análisis epistemológicos para el análisis didáctico (Bergé y Sessa, 2003). Artigue (1989, 1990, 1992, 1995) distingue sus potencialidades y alcances, y la necesidad que el didacta tiene de realizar un estudio epistemológico. Sierpinska (1985, 1992) y Brousseau (1983) lo utilizan para identificar concepciones y obstáculos ligados al desarrollo de una noción matemática. Godino, Ruiz, Roa, Pareja y Recio (2003) lo usan en el análisis de *recursos interactivos*, empleando algunas herramientas de la *teoría de las funciones semióticas* (Godino, 2002a; 2002b). Bergé y Sessa (2003) identifican tres "modos de uso didáctico" del análisis histórico-epistemológico. Afirman que permite recuperar la complejidad de los objetos estudiados y amplía las concepciones epistemológicas, amplía la capacidad del investigador para interpretar las conductas y respuestas de los alumnos y por último provee insumos para pensar una problematización adaptada al aula.

Un estudio sobre la evolución histórica de la génesis del concepto de función, se presenta en Sastré, Boubée, Rey, Maldonado y Villacampa (2006). Estos autores identifican las metáforas subyacentes en su desarrollo histórico, que les permitirá en un trabajo posterior, analizar el desarrollo de las explicaciones sobre gráficos de funciones, presentadas en los libros de texto. El propósito es reconocer en ellas la existencia, o no, de expresiones que hacen referencia a metáforas, y así poder ulteriormente analizar las producciones de los alumnos que hayan utilizado determinados textos, a fin de determinar los efectos que dichas metáforas producen en la compresión evidenciada por los alumnos.

El estudio histórico epistemológico de Crespo (2006) presenta algunos problemas clásicos y no clásicos relacionados con el infinito matemático. Estos problemas generan reflexiones acerca de las argumentaciones empleadas por los matemáticos en la historia y las dificultades que se podrían presentar en el aula de clases. Crespo afirma que el estudio de la evolución histórica y epistemológica de un concepto puede, dar luz de cómo nace y se desarrolla, cómo se plantean y construyen los procedimientos relacionados y qué limitaciones conceptuales aparecen en el aprendizaje de la noción.

El estudio de la evolución histórica de la noción de infinitesimal ha sido fundamental en este trabajo, pues permitió diferenciar las ideas, los métodos, las representaciones, el contexto y los conceptos asociados a la noción en una época histórica, a partir del trabajo realizado por matemáticos representativos. Asimismo, desde la caracterización que se hizo de los esquemas conceptuales en su acepción epistemológica. Todo ello contribuyó a aproximarnos a los esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la noción matemática, y evidenciados por las producciones y resultados matemáticos logrados por los matemáticos.

2. METODOLOGÍA

El estudio es de tipo cualitativo e interpretativo, de carácter descriptivo e inductivo. En este trabajo asumimos la postura de Rodríguez, Gil y García (1999), quienes dicen que "*La naturaleza de las cuestiones de investigación guía y orienta el proceso de indagación, y por tanto, la elección de unos métodos u otros. Luego los métodos surgen bajo las concepciones y necesidades de los investigadores que trabajan desde una disciplina del saber, la cual determina en cierta medida, a su vez, la utilización de los métodos concretos y las posibles cuestiones a tratar*" (p. 40). Para nuestro caso, la cuestión de investigación es de proceso. Significa que la experiencia y los significados que los matemáticos a lo largo del tiempo le otorgan a los infinitesimales pueden ser considerados en etapas y fases.

El método acorde con esta cuestión, es el inductivo, *"la información se obtiene por etapas en un proceso cíclico. La información se analiza, amplia y modifica para llegar a las descripciones, conclusiones, hallazgos e implicaciones"* (Rodríguez, Gil y García, 1999, p.100). Para estudiar la evolución histórico-epistemológica de la noción de infinitesimal y categorizar los esquemas conceptuales epistemológicos, se inicia con una recolección, lectura y análisis de información desde diferentes fuentes bibliográficas (primarias, secundarias y terciarias). La información de las fuentes primarias (Euler, 2000; Cauchy 1821; L'Hospital, 1696) permiten comprender la noción en el propio contexto donde emergió y la de las fuentes secundarias (Vallejo, 1819; Stromholm, 1968; Edwards, 1979; Puertas, 1994; Boyer, 2003) y terciarias (Ruiz, 1998; Cantoral, 2001; Cantoral y Farfán, 2004; Kleiner, 2001) para contrastar esa interpretación con la mostrada más recientemente por reconocidos investigadores.

La estrategia de recogida de información es el análisis de los materiales escritos, considerados como instrumentos cuasi-observables, que en cierto modo reemplazan al observador y al entrevistador en situaciones inaccesibles (Woods, 1987), y el uso de las redes sistémicas (Bliss, Monk & Ogborn, 1983) como sistema de clasificación y representación de los datos cualitativos obtenidos.

2.1. *Metodologías específicas de análisis.*

Se desarrollaron cuatro actividades, que fueron la base para la recolección y análisis de la información, siguiendo el método propuesto por Rodríguez, Gil y García (1999). Estas actividades no definieron un proceso lineal de análisis, en el que se pasa secuencialmente de unas tareas a otras, sino que algunas se presentaron de manera simultánea. Este proceso no lineal permite hacer una reconstrucción de la evolución histórica del concepto, a partir de las fuentes nombradas en el párrafo anterior.

Para poder aproximarse a los esquemas conceptuales epistemológicos asociados al infinitesimal, se utilizan las actividades de análisis, y las fuentes, del mismo modo como los cuestionarios, entrevistas y producciones de los alumnos, permiten acercarse a los esquemas conceptuales en su acepción cognitiva. Las fuentes primarias y secundarias, nos acercan a los elementos caracterizadores de los esquemas conceptuales, mediante los problemas matemáticos, métodos de resolución, etc., que los matemáticos representativos afrontaron y resolvieron, y que se dejan explícitamente en evidencia en estos escritos[1]. Se opta por el uso de las redes sistémicas (Bliss, Monk y Ogborn, 1983) como sistema de clasificación y representación de los datos cualitativos obtenidos a partir del estudio y análisis de la evolución histórica. Se elaboran redes sistémicas para los esquemas conceptuales

[1] De las fuentes secundarias y terciarias, no nos resultan relevantes (salvo para contrastar la situación problema), las interpretaciones que hacen los autores, según sus propios objetivos de investigación y/o búsquedas históricas y epistemológicas.

epistemológicos categorizados (Figuras 1-15). Las redes se estructuran en forma de árbol con ramas que se subdividen en "clases" (se usa como formalismo la barra (|), que son categorías que se excluyen entre ellas), y en "aspectos" (se usa la llave ({) para indicar que son categorías no excluyentes). Con la llave (}) se indica que la nueva categoría incluye las anteriores. Al final de cada rama aparece el nombre del matemático representativo de cada categoría y/o subcategoría.

2.2. *Actividades de análisis*

2.2.1. *Fragmentación de la información*

La información se redujo al hacer una reconstrucción histórica provisoria de la noción. Se consideraron siete períodos históricos, por lo que hubo que separar la información en unidades de análisis (segmentos relevantes y significativos). Se siguieron para ello, los criterios temporales, temáticos y sociales. En el temporal, se segmentó la información, tomando referencias por siglos y épocas desde la aparición intuitiva de la noción en la antigua Grecia hasta el siglo XIX, época donde se destierran los infinitesimales. En el criterio temático se incluyeron las situaciones, las actividades, los procedimientos, los métodos, los conceptos asociados, las ideas sobresalientes que algunos matemáticos más representativos de cada época o siglos utilizaron y desarrollaron (atendiendo a la caracterización del esquema conceptual). Finalmente, el criterio social lo consideramos en el sentido de Rodríguez, Gil y García (Ob.cit., p. 207) quienes afirman que "*cada segmento diferenciado en el texto que podría corresponderse con información relativa a sujetos que ocupan un mismo rol social*". El criterio anterior se asume como el segmento del texto que contiene la información concerniente a los matemáticos que otorgaron un significado a la noción o aceptaron acuerdos sobre ésta, bajo el rol de matemático, físico, astrónomo, filósofo, entre otros.

El estudio histórico en esta primera tarea de análisis, se separó en siete épocas o períodos desde las ideas de los matemáticos representativos y concepciones aceptadas y/o convenidas por ellos (que se describen detalladamente en el apartado *Los hallazgos*). Cada época se identifica con un título caracterizador:

a) *La Grecia antigua (500 años antes de Cristo): Hacia una búsqueda de medidas de figuras curvilíneas*

Los matemáticos de esta época (Hipócrates de Chios, Demócrito, Eudoxio y Arquímedes) para buscar áreas de figuras curvilíneas, inscribieron figuras rectilíneas –área del círculo, una región cerrada de un arco parabólico, lúnulas, entre otras– lo que produjo "ideas nacientes" asociadas a la noción de infinitesimal con relación a los conceptos de razón y proporción en contexto geométrico. Ideas asociadas a los procesos infinitos y a la noción intuitiva de límite, 500 años antes de Cristo.

b) *La edad medieval (529- 1436): La cuantificación de las magnitudes geométricas y el infinitesimal como un segmento que cuantifica*

En estos siglos, las ideas se encuentran representadas en Oresme, quien junto con otros escolásticos, a partir del concepto aristotélico de movimiento, otorgaron el significado de indivisibles, a los segmentos verticales o rectángulos muy estrechos. Cada uno de ellos, representa una velocidad constante que actúa durante un intervalo de tiempo. Al estudiar y representar la distancia recorrida como el área bajo la curva (velocidad-tiempo), se encuentra un nuevo significado de la noción infinitesimal.

c) *Época posterior a la renacentista y de avance a la matemática moderna: Siglos XVI e inicios del XVII con una apertura a las técnicas infinitesimales*

El razonamiento proporcionado por los griegos después de Eudoxio, cambia en esta época. Se logra el cambio, cuando los matemáticos representativos (Stevin, Kepler, Galileo y Cavalieri) usan el concepto de límite. Expresan con este concepto, que las cantidades relacionadas con el área del círculo y el área de los polígonos regulares inscritos o circunscritos, son iguales y que por tanto los polígonos en el límite, exhaustan al círculo. Este descubrimiento implicó el surgimiento de las ideas de los indivisibles como aquello a lo que tienden los objetos geométricos.

d) *Mitad del siglo XVII, época de Fermat, Wallis y Barrow: Hacia una construcción de la geometría a través de la longitud de los segmentos*

Los matemáticos trataron de buscar en esta época, un método que estableciese las relaciones numéricas de los cuerpos geométricos para resolver problemas de máximos y mínimos con rectas tangentes y subtangentes. A partir de esta inquietud, surgió la aritmetización de la geometría de forma rudimental y con ello la eliminación de las cantidades y magnitudes despreciables (el misterioso "E" de Fermat), en las relaciones de dependencia entre variables matemáticas y geométricas.

e) *Segunda mitad del siglo XVII hasta inicios del XVIII, las ideas de Newton, Leibniz y L´Hospital: Hacia una sistematización de los infinitesimales como incrementos (aumentos o disminución) muy pequeños de una variable*

La búsqueda de aplicación de las soluciones encontradas a los problemas de cuadraturas y tangentes en el siglo XVI y en la primera mitad del siglo XVII, condujo a la aplicación de métodos especiales para problemas particulares. Produjo a su vez, el surgimiento y el uso de la idea de infinitesimal asociada a la relación funcional no analítica entre variables geométricas en función del tiempo, y a la relación entre cantidades geométricas asociadas a una curva. Se asoció un infinitesimal, a un incremento o decremento muy pequeño dado a una variable.

f) *El Siglo XVIII e inicios del XIX. Del cálculo diferencial de Newton, Leibniz y L'Hospital al cálculo de funciones de Euler y D'Alembert. Los infinitesimales como símbolos, como cantidades variables*

El estudio de los procesos infinitos que se hicieron implícitos en los planteamientos dados en los siglos anteriores, derivó en la formulación del concepto de función y con ello una metodología que permitió algebrizar el Cálculo y eliminar los infinitesimales. En esta época se observa una concepción diferente de modo de trabajo sobre los infinitesimales. Los infinitesimales fueron considerados como símbolos que representaban cantidades que son cero.

g) *El Cálculo acordado de Cauchy y Weierstrass, un Cálculo aritmético, y estático para el concepto de límite, sin referencia al movimiento ni a la geometría: El destierro de los infinitesimales del Cálculo*

En esta época se construyeron los números reales y con ello se aritmetizó el Cálculo. En consecuencia, no se apeló a la geometría ni al álgebra. Se definió el concepto de límite desde la aritmética de los números reales, lo que permitió dejar atrás los procesos infinitos y con ello los infinitesimales como diferencias, incrementos o decrementos. El paso del álgebra a la aritmética en el Cálculo, dejó una manera de concebir las cantidades infinitamente pequeñas en términos de límites y excluyó la variabilidad continua. Esto condujo al abandono de los infinitesimales en el Cálculo.

2.2.2. *Los siete períodos encontrados: Identificación y clasificación de las unidades de análisis*

Se examina cada unidad de análisis (por período histórico) para identificar en ellas, componentes temáticos que contribuyan a su clasificación en una u otra categoría temporal, temática o social. La categorización es una herramienta utilizada en esta tarea de análisis, dado que es posible clasificar conceptualmente las unidades que son cubiertas por un mismo tópico, en este caso, la noción infinitesimal, los matemáticos que otorgan significado en esa época y las nociones, métodos, situaciones, contexto y conceptos asociados otorgados, siguiendo un procedimiento inductivo. Al examinar cada período, se reflexiona acerca del contenido de los mismos, nos preguntamos por el tópico capaz de cubrir cada uno. Se proponen categorías que en unos primeros momentos son provisionales, luego modificadas o suprimidas, a partir de la comparación entre las informaciones agrupadas bajo una misma categoría en cada período o a partir de la comparación con la información incluida en otros períodos.

2.2.3. *Disposición y organización de la información*

Situamos y transformamos los períodos, en un conjunto organizado de información, presentándolos en forma de matriz (Tabla I), en la que se muestran los esquemas conceptuales epistemológicos por períodos. Se usan como sistema de representación las redes sistémicas, las cuales se van modificando según la dinámica de análisis. Los sistemas de categorías (lo que hace único cada período) se caracterizan por su corrección lógica, siguiendo los requisitos de exhaustividad de las categorías, exclusión mutua y el principio clasificatorio. A partir de las redes sistémicas y el análisis, se extraen siete esquemas conceptuales epistemológicos (ECE_n)[2], dos de ellos *met-before* ($ECME_n$).

TABLA I
Esquemas conceptuales epistemológicos por período histórico (parte 1)

Período Histórico	ECE
Grecia Antigua	($ECME_1$): El infinitesimal asociado a una la razón
Edad medieval (529-1436)	($ECME_2$): Un infinitesimal asociado a una unidad indivisible
Siglos XVI e inicios del XVII	(ECE_1): El infinitesimal como una diferencia

[2] La "n" indica el número del esquema conceptual epistemológico

TABLA I

Esquemas conceptuales epistemológicos por período histórico (parte 2)

A mitad del siglo XVII	(ECE_2): El infinitesimal como una razón aritmética
Segunda mitad del siglo XVII hasta inicios del XVIII	(ECE_3): El infinitesimal asociado a un incremento
El Siglo XVIII e inicios del XIX	(ECE_4): El infinitesimal como símbolo
Finales del Siglo XIX	(ECE_5): El Infinitesimal como una función

2.2.4. Descripción estructurada: Los hallazgos

La descripción y los hallazgos se detallan en el apartado tres.

3. HALLAZGOS: DIFERENTES ESQUEMAS CONCEPTUALES EPISTEMOLÓGICOS ASOCIADOS A LA EVOLUCIÓN HISTÓRICA DEL INFINITESIMAL

El análisis que se hizo de las situaciones problemas, tratados por matemáticos en los diferentes períodos históricos, dio lugar a una descripción de las representaciones, procedimientos y métodos usados por ellos en la solución de problemas matemáticos, así como de los conceptos que asociaron y los contextos en donde abordaron las situaciones. Esto pone de manifiesto los 7 esquemas conceptuales epistemológicos encontrados.

Se presenta en este apartado la descripción y análisis holístico de cada esquema conceptual epistemológico, la representación en las redes sistémicas, las ideas epistemológicas que expresan y su caracterización de forma sintética.

3.1. ($ECEM_1$): *El infinitesimal asociado a una razón.* (Figuras 1, 2, 3)

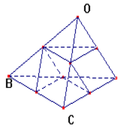
El infinitesimales asociado a una razón ($ECEM_1$)
- Razón geométrica (RG), (Hipócrates y Demócrito)
- Razón numérica (RN), (Eudoxio y Arquímedes)

Figura 1

Razón geométrica

Viene a ser un patrón común (secciones planas), patrón como unidad de medida y como parte de un todo

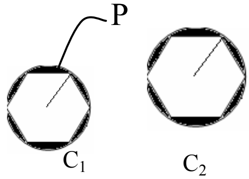
Se llena el sólido o cuerpo geométrico con secciones que tienen espesor (Demócrito)



El volumen de la pirámide v(P) es la tercera parte de un *prisma V*

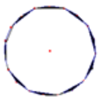
Es tan pequeña como se quiera

Se comparan magnitudes entre objetos geométricos para calcular áreas



Las áreas de los dos polígonos a(P) inscritos están a la "misma razón" que la de los cuadrados de los radios. Sucede igual para las áreas de los círculos a(C). (Hipócrates)

Diferencia tan pequeña como se quiera



Se incrementa indefinidamente el número de lados del polígono inscrito y se exhausta el círculo. (Hipócrates).

Figura 2

Razón numérica

Es menor que cualquier magnitud prefijada. (Eudoxio y Arquímedes)

Se establece que: $a(\ C\ )/\ r^2$ está entre 223/71 y 22/7

V - $v(P)$ es menor que una magnitud prefijada.

Figura 3

3.1.1. *Descripción del* ECEM_1

El uso de las razones para hallar el área del círculo, hace posible expresar la razón en términos de unidades geométricas y ulteriormente en numéricas.

Las razón geométrica es expresada en términos geométricos por Hipócrates de Chios y Demócrito, ya que en el trabajo de estos matemáticos, las razones no pueden expresarse como números, a raíz de la inconmensurabilidad de algunos segmentos y porque la teoría de la Proporcionalidad está en proceso de definición.

Utilizando la razón geométrica Hipócrates deduce que: *"las áreas de los dos polígonos inscritos están a la "misma razón" que la de los cuadrados de los dos radios de los dos círculos. Sucede igual para las áreas de los círculos. Asimismo, que la diferencia entre el área del círculo y el polígono inscrito se puede hacer tan pequeña como se quiera."*(Edwards, 1979; p.7). En notación moderna las deducciones anteriores las podemos escribir como: $a(C_1)/a(C_2)=r_1^2/r_2^2$ y $a(C)-a(P)$[3] tan pequeña como se quiera. (C_1 y C_2 en Fig. 2).

Demócrito logra fragmentar o descomponer el sólido (pirámides, cilindros) en partes, al calcular el volumen de un cuerpo geométrico. Con ello infiere por ejemplo, que el volumen de un cono es la tercera parte de un cilindro. Las dos visiones descritas, la de Hipócrates y Demócrito, requieren de los procesos infinitos y probablemente de la idea intuitiva de proporción.

Sin embargo, para los momentos de los trabajos de estos matemáticos, es difícil llegar a la certeza de la inferencia pues la Teoría de la Proporcionalidad era incipiente.

Años posteriores a Hipócrito y Demócrito, Eudoxio proporciona un salto epistemológico que recoge la esencia del pensamiento griego. Define a la razón numérica con su Teoría de la Proporcionalidad. Eudoxio deduce, que el área del círculo y el polígono inscrito era menor que cualquier otra magnitud prefijada de antemano (Puertas, 1994). En simbología actual podemos expresarlo como sigue, $a(C)-a(P) < \varepsilon$. Se toma la magnitud ε como patrón común o como una magnitud de medida entre objetos.

La Teoría de la Proporcionalidad incluye la magnitud de los segmentos inconmensurables (orden entre las razones). La definición que recoge la idea de Eudoxio, es escrita por Euclides (1994) en el Libro V[4]. Así, la proporción $a:b::c:d$, significa –apelando a la simbología moderna– que, para todo par de números naturales m,n, si $ma < nb$ entonces $mc < nd$, o si $ma=nb$ entonces $mc = nd$. Análogamente para $ma > nb$.

Pasar de una razón que se puede hacer tan pequeña como se quiera (como idea intuitiva), a una menor que cualquiera prefijada producto de la definición anterior, implica el surgimiento de las "ideas nacientes" de un infinitesimal en

[3] En la expresión $a(C_1)/a(C_2) = r_1^2/r_2^2$ y $a(C)$-$a(P)$, llamamos a los símbolos $a(C)$, r y $a(P)$, área y radio del círculo respectivamente y por $a(P)$, área del polígono regular.

[4] Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera excedan a la par, sean iguales a la par o resulten inferiores a la par, que cualquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en orden correspondiente (Def. V.5 de Euclides).

contexto geométrico. Podemos decir, que las representaciones no están asociadas a la noción propiamente, sino que son imágenes que permiten que emerja. Esas representaciones están ligadas a una razón geométrica o numérica y a la idea central pitagórica "todo es número" por ser estos, los conceptos prevalecientes en que se movían los matemáticos. Sin embargo surgen indicios o "ideas nacientes" (en términos de Newton) asociados a la noción de infinitesimal.

3.1.2. *Caracterización del* $ECEM_1$

Ideas: La razón asociada a las "ideas nacientes" de la noción infinitesimal.

Representaciones asociadas al concepto que lo hacen emerger: a) Gráficas de polígonos inscritos en figuras curvilíneas; cuerpos geométricos descompuestos en partes indivisibles; divisiones indefinidas de segmentos y lados de polígonos.

Contexto: Geométrico

Procedimientos: a) Geométricos: comparar magnitudes e inscribir y circunscribir polígonos, encontrar razones geométricas; fragmentar o descomponer un sólido en partes y b) Aritmético: encontrar la razón numérica.

Conceptos asociados: Teoría de la Proporcionalidad entre razones de magnitudes de diferentes y del mismo tipo (números, longitudes, áreas y volúmenes), razón geométrica y numérica.

Métodos: 1) Método de exhausción de Eudoxio y 2) "El método" de Arquímedes.

Matemáticos representativos: Hipócrates de Chios, Demócrito, Eudoxio y Arquímedes.

Momento histórico: Desde siglo V al año 212 antes de Cristo.

3.1. ($ECEM_2$): *Un infinitesimal asociado a un indivisible.* (Figuras 4, 5, 6, 7)

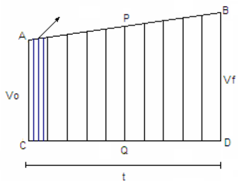
El infinitesimal es asociado a un indivisible ($ECEM_2$)

- El indivisible es considerado como una unidad geométrica. (Oresme y Stevin)
- El indivisible es visto como un infinito pequeño (Kepler y Galileo)
- El indivisible viene a ser una parte menor del todo. (Cavalieri)

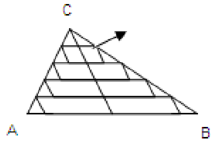
Figura 4

El indivisible es considerado como una unidad geométrica

La unidad geométrica es el segmento/latitud o paralelogramo que está asociado a un infinitesimal



El área del trapezoide está constituida por infinitos segmentos verticales (ordenadas PQ) o indivisibles (Oresme)

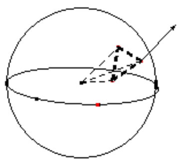


A mayor número de paralelogramos inscritos, menor será la diferencia entre las figuras inscritas y el triángulo. (Stevin)

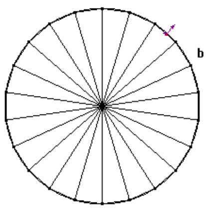
Figura 5

El indivisible es visto como un infinito pequeño

Es aquello a lo que tienden los cuerpos geométricos



El sólido (esfera) está compuesto de una cantidad infinita de elementos de volumen infinitesimalmente pequeños. (Kepler)

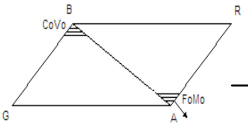


El área del círculo está formada por triángulos infinitamente pequeños (indivisibles), con las alturas "casi iguales" al radio del círculo (indivisibles)

Figura 6

El indivisible es considerado una parte menor del todo

Es menor que cualquier magnitud prefijada



Los triángulos ABR y ABG son iguales por la correspondencia uno a uno entre los indivisibles geométricos C_oV_o y F_oM_o, C_1M_1 y F_1M_1,…de los triángulos. El área del paralelogramo es la suma de los indivisibles en los dos triángulos. (Cavalieri)

Figura 7

3.2.1. *Descripción del* $ECEM_2$

La representación gráfica de la cantidad de una cualidad (cambio, variación, velocidad), y la aplicación del principio físico de los momentos para determinar centros de gravedad permite asociar un infinitesimal a un indivisible a través del uso del segmento como una unidad de medida. Con esto se otorga (Oresme) el significado de indivisibles, a los segmentos verticales o rectángulos muy estrechos. "*Cada segmento representa una velocidad constante que actúa durante un intervalo de tiempo*" (Stevin, 1583, citado en Cantoral y Farfán, 2004). Luego, el infinitesimal es asociado a un indivisible siendo éste concebido como un momento de tiempo.

Se puede decir, que a partir de las ideas de Oresme y Stevin queda atrás la comparación entre las magnitudes, tal como lo expresan Cantoral y Farfán (2004, p.165): "*A partir de aquí, ya no se hablaba de que la diferencia entre dos cantidades se podía hacer menor que cualquier cantidad prefijada, sino que tales cantidades ¡eran iguales!".* Esta idea produjo un razonamiento que trastoca la definición de proporcionalidad griega.

Los matemáticos (Kepler y Galileo) para aplicar los infinitesimales en la astronomía y en la física lo usan como "infinito pequeño" (concepto usado por Galileo, 1638, citado en Kleiner, 2001, p.168) con la operación del paso al límite. Identifican una curva con la suma de segmentos infinitamente cortos y su área (cuando la curva es cerrada) con la suma de rectángulos infinitamente numerosos e infinitamente pequeños. Asimismo, Galileo consideró a la variable, en un sentido como constante, al expresar: *puede suceder que un móvil recorra espacios iguales en determinados tiempos iguales, mientras que distancias recorridas en fracciones de tiempo más pequeñas puedan no ser iguales, aunque lo sean dichos intervalos más pequeños* (Galileo, 1638, citado en Cantoral, 2001, p.14). Consideran (Kepler y Galileo) a los indivisibles como aquello a lo que tienden los cuerpos, áreas o líneas cuando se hacen infinitamente pequeños y como un incremento de tiempo que es infinitamente pequeño.

Sin embargo, Cavalieri, al colocar en correspondencia, una a una las piezas indivisibles de dos figuras, evita el proceso de suma que usaron los anteriores matemáticos. Esas piezas tienen una dimensión menor que el objeto al que pertenecen. Las piezas de Cavalieri, permiten extraer las características del cuerpo geométrico. Esto es, los indivisibles de las curvas son los puntos, de las áreas son los segmentos de recta y de los volúmenes son las áreas. (Cavalieri, 1635, citado en Cantoral, 2001).

En esta categoría, la idea del infinitesimal ($ECEM_2$) está asociada a un indivisible. En este momento, el esquema conceptual previo asociado al infinitesimal podríamos decir, que está relacionado a los conocimientos o experiencias previas que le dan sentido a la noción de infinitesimal. Las representaciones siguen no estando vinculadas a la noción propiamente, sino que son imágenes que permiten que ella emerja.

Pasar de una "idea naciente" de un infinitesimal asociado a una razón a una idea relacionada a un indivisible, implicó el surgimiento de un esquema conceptual previo vinculado a la noción de infinitesimal en contexto geométrico, físico y astronómico.

3.2.2. *Caracterización del* $ECEM_2$

Ideas: El indivisible e infinito pequeño.

Representaciones que hacen emerger al concepto: a) Gráfica de figuras que representan los movimientos, b) Gráficas de relaciones causa/efecto, de polígonos regulares y de sólidos y c) Gráfica de figuras diformes y uniformes.

Contexto: Geométrico y físico-astronómico.

Procedimientos a) Aritmético: sumar indivisibles, b) Geométricos: fragmentar un cuerpo en indivisibles; c) Algebraico: comparar los indivisibles con correspondencia uno a uno.

Conceptos asociados: Razón, proporción racional, aceleración uniforme, velocidad, movimiento uniforme, mediana, ley de la palanca, noción intuitiva de límite, centro de masa, correspondencia uno a uno.

Métodos: De cálculo rudimentario (Oresme y Galileo). De los momentos en la Física (Stevin). Método de correspondencia biunívoca (Cavalieri).

Matemáticos representativos: Oresme, Galileo, Stevin, Kepler y Cavalieri.
Momento Histórico*:* Siglo XIV, XV, XVI y principios del siglo XVII.

3.3. (ECE_1): *Un infinitesimal asociado a una diferencia*. (Figura 8).

3.3.1. *Descripción del* ECE_1

La resolución de problemas de máximos y mínimos de una función (Fermat y Barrow) condujo a la búsqueda de un método que estableciera las relaciones numéricas de los cuerpos geométricos a través del uso de rectas tangentes y subtangentes.

Utilizando el álgebra, Fermat (Fermat, 1635, citado en Stromholm, 1968), logra calcular la pendiente de una recta tangente a una curva, cuando compara el valor de $f(x)$ en un cierto punto con el valor $f(x + E)$ en un punto próximo. Cambia el valor de la variable para considerar valores próximos a uno dado. Concibe E menor que 1*,* y luego lo "elimina" de la expresión. Llama a "E" imperceptible o cantidad "evanescente" y asocia la idea de diferencia imperceptible con la noción de un infinitesimal en contexto algebraico.

Barrow a diferencia de Fermat, asocia la noción de infinitesimal a la idea de diferencia indivisible en contexto geométrico y numérico.

Trabajando en contexto geométrico, Barrow (Barrow, 1670, citado en Edwards, 1979) toma de una curva un arco CM infinitamente pequeño. Incrementa las dos variables x e y con valores muy pequeños, e ignora la distinción entre este arco y el segmento de línea recta CM[5] (hipotenusa del triángulo CMV). Considera a la línea formada por indivisibles. Compara el tiempo con una línea y dota al tiempo y a la diferencia geométrica de la idea de indivisible.

Al trabajar en contexto numérico, Barrow indica que la diferencia geométrica entre el triángulo rectángulo y el triángulo curvo es cero. Usa la idea de límite con nociones netamente geométricas y con concepciones cinemáticas, para llegar a estos resultados.

Algunas de las representaciones están asociadas a la noción propiamente. Estas representaciones dan ideas de un infinitesimal. Ideas ligadas a cantidades

[5] El segmento CM tiene como extremos los puntos C(x, y) y M($x + e$, $y + a$) de una curva. Donde "e" y "a" son los incrementos muy pequeños de la variable "x" y "y" respectivamente (Figura 8).

evanescentes e imperceptibles y que hacen identificar la noción con ellas. Otras representaciones son imágenes que permiten que emerja el infinitesimal.

Pasar de una idea previa de infinitesimal como razón a una diferencia imperceptible e indivisible, implicó el surgimiento de un esquema conceptual epistemológico (ECE_1) asociado a la noción de infinitesimal en contextos algebraico, geométrico y numérico.

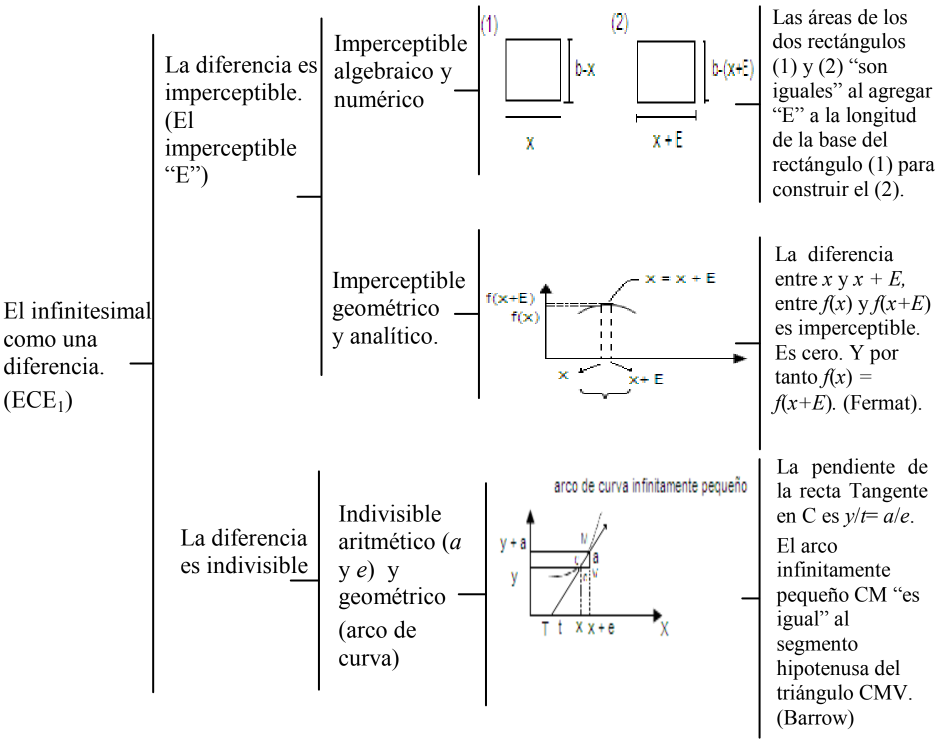


Figura 8

3.3.2. *Caracterización del* ECE_1

Ideas: El imperceptible E, el indivisible e, a, el arco de una curva y el segmento hipotenusa de un triángulo asociados a la noción de infinitesimal.

Representaciones que hacen emerger la noción: Gráficas de relaciones entre variables dependientes e independientes. Curvas con rectángulos inscritos como indivisibles. Gráficas con rectas tangentes a una curva, gráficas velocidad/tiempo.

Representaciones propias de la noción:"E", "e", "a", "arco de una curva".

Procedimientos: a) Analítico: aplicar los infinitesimales a problemas algebraicos, geométricos y cinemáticas, b) Algebraico: dar incremento muy pequeño a una variable: cantidades despreciables o evanescentes, c) Geométrico calcular distancia de un punto con el método de la tangente.

Conceptos asociados: Razón, valores máximos y mínimos, noción intuitiva de límite, variable, recta tangente, recta subtangente, tiempo, recta tangente como posición límite y movimiento de un punto en una curva.

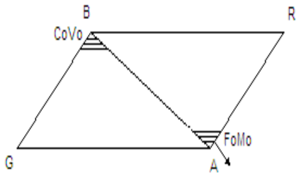
Métodos: 1) Pseudo igualdad de Fermat y 2) De rectas tangentes y subtangentes (Barrow)

3.4. (ECE_2)*: Un infinitesimal asociado a una razón aritmética.* (Figura 9)

ECE_2

La razón aritmética es asociada a un indivisible

A cada indivisible (C_oV_o, F_oM_o, C_1M_1, F_1M_1, …) se le asigna un número.



La razón de la suma de los cuadrados de los dos indivisibles en los dos triángulos, es:

$\frac{0^2+1^2}{1^2+1^2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$, ya que la longitud del indivisible C_oV_o y F_oM_o es cero, la de C_1M_1 y F_1M_1 es uno y asi sucesivamente.

Para n + 1 indivisible, la razón es

$$\frac{0^2+1^2+\ldots(n-1)^2+n^2}{n^2+n^2+\ldots n^2+n^2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6n}$$

Y por ser n infinito, la razón es 1/3 ya que 1/6n se convierte en cero. (Wallis)

Figura 9

3.4.1. *Descripción del* ECE_2

Wallis retoma los indivisibles de Cavalieri y le asigna valores numéricos a los infinitos indivisibles de las figuras que utiliza Cavalieri para la demostración que asegura el cálculo del área de un paralelogramo.

Wallis (Wallis, 1655, citado en Boyer, 2003) indica que si se quieren comparar, por ejemplo, los cuadrados de los indivisibles en un triángulo con los cuadrados indivisibles en un paralelogramo, se puede tomar la longitud del primer indivisible en el triángulo como cero, la del segundo como uno, la del tercero como dos, y así sucesivamente hasta el último, de longitud n-1, si hay en total de n indivisibles. Este tratamiento (la aritmetización del infinito) para las razones, deja de lado la razón geométrica que había dominado el pensamiento griego.

Pasar de una idea de infinitesimal asociada a una diferencia (E, e, a), a una idea como razón aritmética, implicó el surgimiento de un infinitesimal en contexto aritmético.

En esta categoría, la concepción del infinitesimal (ECE_2) está asociada a una razón aritmética cuando se considera la Teoría de las Proporciones, reducible a conceptos aritméticos. Este hecho, marca la pauta para casi todas las concepciones próximas de los matemáticos, en cuanto a los infinitesimales.

Las representaciones que están asociadas a la noción están ligadas a la razón numérica y hacen identificar la noción con ellas. Otras representaciones son imágenes que permiten que ella emerja.

3.4.2. *Caracterización del* ECE_2

Ideas: Las razones aritméticas asociadas a un infinitesimal.

Representaciones asociadas a la noción: Una razón numérica a/b como la suma de los cuadrados de los indivisibles.

Representaciones que hacen emerger la noción: Las gráficas que muestren el cálculo de áreas o volúmenes al estilo de los indivisibles de Cavalieri.

Contexto: a) Aritmético y b) Geométrico.

Procedimientos: a) Aritmético: asignar valores numéricos a los infinitos indivisibles de la figura; b) Geométrico: graficar las relaciones geométricas y aritméticas

Conceptos asociados: Indivisible, razón aritmética.

Método: Aritmetización de la geometría, método de interpolación y aproximación.

Matemático representativo: Wallis.

Momento histórico: Siglo XVII

3.5. (ECE_3): *Un infinitesimal asociado a incremento.* (Figuras 10,11, 12, 13)

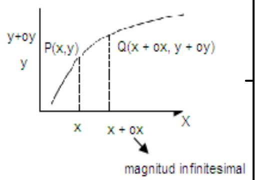
El infinitesimal es asociado a un incremento. (ECE_3)

- El incremento de una variable es un "momento". Es "o". (Newton)
- El incremento de una variable es "*dx*" o "*ds*" (Leibniz)
- El incremento (o decremento) de una variable es un objeto matemático (L'Hospital)

Figura 10

El incremento de una variable es un "momento". Es "o". (Newton)

El momento "o" es un intervalo de tiempo infinitamente corto de la variable (período de tiempo infinitesimal) de un punto P(*x,y*) moviéndose en una curva.



Q(*x* +*ox*, *y* + *oy*) es un punto en la curva infinitesimalmente cerca de P(*x,y*).

Figura 11

El incremento de una variable es "*dx*" o "*ds*" (Leibniz)

Es "*dx*" en términos numéricos.

$$\frac{1}{1}\quad \frac{1}{2}\quad \frac{1}{3}\quad \frac{1}{4}\ldots\quad \frac{1}{2}\quad \frac{1}{6}\quad \frac{1}{12}\quad \frac{1}{20}\ldots\quad \frac{1}{3}\quad \frac{1}{12}\quad \frac{1}{30}\quad \frac{1}{60}\ldots$$

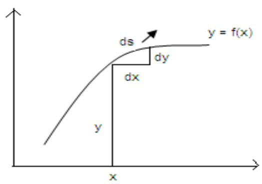
Cada término que no está en la primera fila, es la diferencia de los dos términos, el que está encima de él y encima de él a su derecha. Cada elemento es la suma de todos los términos en la línea inferior a él y a la derecha.

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots$$

Así que, ½+1/6+1/12+1/20+1/30+... = 1

El triángulo armónico permite representar el "*dx*", al buscar la diferencia numérica entre dos valores sucesivos de la variable "*x*" (Leibniz)

Es "*ds*" en términos geométricos.



El triángulo característico permite representar el "*ds*" (el infinitesimal) ya que el segmento hipotenusa del triángulo es el arco ds la curva *f*(*x*). (Leibniz)

Figura 12

- El incremento (o decremento) de una variable es un objeto matemático (L'Hospital).
  - Es una diferencia entre dos números. Esa diferencia como una cantidad infinitamente pequeña.
    - Si $c = 2{,}001$ y $v = 2$, se puede usar indistintamente c o v.
      - La diferencia entre c y v e infinitamente pequeña.
  - Es un arco infinitesimal.
    - 

      - Un arco de una curva está compuesto por una infinidad de segmentos infinitamente pequeños. (L´Hospital).

Figura 13

3.5.1. *Descripción del* ECE$_3$

La aplicación a las soluciones encontradas hasta el siglo XVI de los problemas de cuadraturas y tangentes, produjo (Newton, Leibniz, L´Hospital) la idea de infinitesimal asociada a la relación funcional pero no analítica entre variables geométricas en función del tiempo y a la relación entre cantidades geométricas asociadas a una curva.

Al trabajar Newton con un incremento muy pequeño dado a una variable (fluente) geométrica en el cálculo de áreas y velocidad de los movimientos, asocia un infinitesimal con un rectángulo de base infinitesimal, con el arco de una curva o con un momento[6] (las diferenciales actuales). Newton en 1704, expresa "*las fluxiones son, los más cercano posible, como aumentos producidos en iguales partículas pequeñísimas de tiempo y para hablar con exactitud, están en la primera razón de los aumentos nacientes*,.."(Newton, 1704, citado en Cantoral, 2001, p. 21)

Newton compone de movimientos horizontales y verticales, el movimiento de un punto (x, y) en una curva. Estas ideas se describen en términos geométricos pero en contexto físico (dinámico temporal).

---

[6] Así, (x + xo, y + yo) es un punto en la curva infinitesimalmente cerca del punto (x, y). Y como "o" es infinitamente pequeño, los desecha en la ecuación $f(x, y) = 0$. Luego "o" representa los momentos de las cantidades.

Leibniz (Leibniz, 1714, citado en Kleiner, 2001) asocia la idea de un incremento muy pequeño dado a una variable, como objeto geométrico. Busca las diferencias entre los incrementos de las variables, calcula la suma de todas esas diferencias y extrapola ese resultado a las variables asociadas a gráficas de ecuaciones. En simbología moderna según Edwards (1979), se puede llamar al incremento *dx* o diferencial. De manera similar a Barrow, indica que el triángulo curvo es indistinguible del triángulo rectángulo.

Por su parte, L'Hospital, no trabaja las variables con cantidades que recorren una sucesión de valores infinitamente próximos, sino con cantidades que crecen o decrecen de manera continua. Las "diferencias" son las partes infinitamente pequeñas en que aumenta o disminuye una variable tanto en contexto geométrico como algebraico (L'Hospital, 1715, citado en Cantoral, 2001). *"Pedimos a esas variables disminuir o aumentar continuamente"* L´Hospital (1696, p.1, traducción libre) y para Vallejo (1819, p. 313-314) *"se llama cantidad constante la que en una misma cuestión no puede tener más de un solo valor; y cantidad variable, la que en una misma cuestión puede tener los valores que se quiera".*

Pasar de un infinitesimal como razón aritmética a un infinitesimal como un incremento de variable geométrica y algebraica implicó la idea de un infinitesimal, desde una concepción (ECE_3).

Las representaciones que están asociadas a la noción están ligadas a los incrementos. Imágenes ligadas a cantidades desechables, a los momentos y a las diferenciales. Otras representaciones son imágenes que permiten que emerja el infinitesimal.

3.5.2. *Caracterización del* ECE_3

Ideas: Los momentos, las diferencias muy pequeñas entre dos valores sucesivos de una variable y los incrementos.

Representaciones asociados a la noción: "o", "dx".

Representaciones que lo hacen emerger: a) Gráficas que muestran el cálculo de áreas o volúmenes al estilo de Oresme, Fermat y Wallis; b) Gráficas que representen puntos moviéndose en una curva; c) Gráficas que representen las rectas tangentes a una curva; d) Gráficas con una infinidad de arcos.

Procedimientos: a) Aritméticos: asignar valores numéricos a las diferencias entre los valores sucesivos de una variable, despreciar las diferencias (incrementos o decrementos); b) Geométricos: inscribir rectángulos de base infinitesimal bajo una curva. Calcular el área como la suma de esos infinitos rectángulos y despreciar el triángulo característico (el triángulo curvo es indistinguible del triángulo rectángulo) y d) Intuitivos: uso de la noción de límite y de función.

Conceptos asociados: Noción de límite, velocidad, tiempo, fórmula, ecuación, función (no analítica), diferencia y suma infinita.

Contexto: Geométrico, físico y algebraico.

Métodos: 1*)* Fluxión y de las primeras y últimas razones; 2) De las diferencias o triángulo característico y 3) Regla de L´Hospital.

Matemáticos representativos: Newton, Leibniz y L´Hospital.

Momento histórico: Finales del siglo XVII e inicios del siglo XVIII.

3.6. (ECE_4): *El infinitesimal asociado a un símbolo*. (Figura 14)

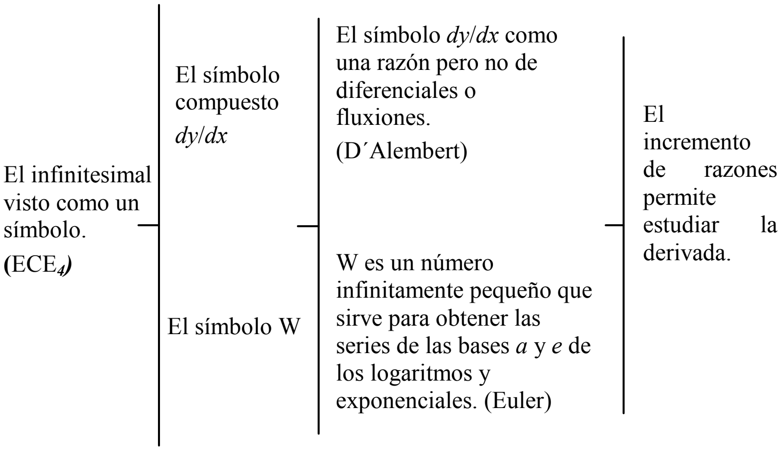


Figura 14

3.6.1. *Descripción del* ECE_4

El estudio de los procesos infinitos que se hacen implícitos en los planteamientos de algunos matemáticos en los siglos XIV; XV, XVI y XVII, produjo (Euler y D'Alembert) la formulación del concepto de función y con ella una metodología que permite algebrizar el cálculo y el surgimiento de una simbología funcional.

Euler (2000) introduce la teoría formal de funciones y con ello evade y rechaza los argumentos geométricos para el Cálculo Infinitesimal. Trabaja las funciones exponencial y logarítmica como series, a partir del desarrollo de las cantidades exponenciales y logarítmicas de un conjunto de números reales. Euler obtiene la serie infinita para el número $a > 1$, a partir de la relación $a^w = 1 + y$, donde el símbolo w, es un número infinitamente pequeño y a partir de esa serie obtiene la serie para el número e.

D'Alembert estudia la derivada como el incremento de razones e interpreta la razón *dy/dx* como un símbolo compuesto y no como una razón de diferenciales o fluxiones. Llama a una cantidad, el límite de una segunda cantidad variable, si la segunda puede aproximarse a la primera hasta diferir de ella en menos que cualquier cantidad dada (sin llegar nunca a coincidir con ella). En ambos casos se usa el concepto de límite pero de forma algebraica, otorgando al infinitesimal el significado simbólico que el álgebra le asigna.

En esta época se observa una concepción diferente para trabajar los infinitesimales. Pasar de un infinitesimal como incremento a un infinitesimal como símbolo, implica el surgimiento de un infinitesimal en contexto algebraico, desde una concepción (ECE_4).

Las representaciones que están asociadas a la noción son símbolos. Otras representaciones son imágenes que permiten que emerja el infinitesimal.

3.6.2. *Caracterización del* ECE_4

El infinitesimal visto como un símbolo, es un esquema conceptual particular que está demarcado por el estudio de las derivadas, los logaritmos y los exponenciales.

Idea: Un símbolo como un número real infinitamente pequeño.

Representaciones asociadas a la noción: "w", "dy/dx"

Representaciones que la hacen emerger: a) Las ecuaciones y fórmulas asociadas a funciones, b) Las series infinitas para "*a*" y "*e*".

Contexto: Algebraico y analítico.

Procedimientos: a) Algebraico: encontrar la serie logarítmica y sustituir *a* y *e* por una serie infinita.

Conceptos asociados: Derivada de una función, variables, función, series infinitas.

Método: Algebrizar el Cálculo.

Matemáticos representativos**:** Euler y D'Alember.

Momento histórico: Siglo XVIII.

3.7. (ECE_5)*: El infinitesimal asociado a una función.* (Figura 15)

El infinitesimal como una función (ECE_5)

- El infinitesimal como una cantidad variable α
  - $f(x + \alpha) - f(x)$ es una cantidad infinitamente pequeña, siempre que la variable α lo sea.
    - Un infinitesimal o la cantidad infinitamente pequeña es una variable con el cero como su límite. α es un infinitesimal. (Cauchy)
- El infinitesimal como un valor numérico
  - ε y δ son valores numéricos en la definición aritmética de límite.
    - Dado $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta>0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ si $0 < |x - a| < \delta$ (Weierstrass)

Figura 15

3.7.1. *Descripción del* ECE_5

El estudio de las series infinitas que había dominado el pensamiento de los matemáticos en diferentes siglos (XIV, XV, XVI, XVII y XVIII), hizo posible definir los números reales (Cauchy, Dedekin y Weierstrass) con su aritmética propia que permitiese reducir el análisis a la aritmética. Todo, producto del abordaje de la unificación de los aspectos continuos y discretos de la matemática bajo el concepto de grupo. La definición de los números reales se desliga de las magnitudes intuitivas heredadas de la geometría euclidea.

En su definición de límite, Cauchy prescinde tanto de la geometría como de los infinitésimos y de las velocidades de cambio. Define límite en los siguientes términos: "*Cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por diferir de él en tan poco como queramos, este último valor se llama el límite de todos los demás"*

(Cauchy, 1821, p.4, traducción libre). Otorga una nueva definición para un infinitésimo, diferente a los matemáticos predecesores para quienes el infinitésimo era considerado un número constante muy pequeño[7].

Weierstrass al dar la definición de límite la fundamenta únicamente con el concepto de número. Para ello, define irracional de manera independiente del concepto de límite. Identifica la sucesión convergente con el número límite. Elimina las expresiones “valores sucesivos”, “aproximarse indefinidamente” o “tan pequeño como se quiera” del concepto de límite dado por Cauchy[8].

Al límite, Weierstrass lo define en los siguientes términos: Si, dado cualquier ε, existe un η_0 tal que para $0<\eta<\eta_0$, la diferencia $f(x_0 \pm \eta) - L$ es menor en valor absoluto que ε, entonces se dice que L es el límite de $f(x)$ para $x = x_0$ (Boyer, 2003; Vallejo, 1819). Con esta definición se aritmetiza el Cálculo. Podríamos decir que a partir de esta definición, sólo se trabaja con números reales, y con las operaciones de sumar y restar entre dichos números. También se usa, la relación “menor que” entre números reales. Actualmente la letra η ha sido reemplazada en notación moderna por la letra griega δ[9].

En este momento (finales del siglo XIX), se observa una concepción diferente para los infinitesimales. Son cantidades variables y valores reales de esas variables, lo que hace otorgarle una categorización de función al esquema conceptual.

El infinitesimal es visto como una función, ya que para Cauchy es una cantidad variable y para Weierstrass es el valor numérico de una función, es el número real delta para la diferencia $x - x_0$ y en el caso de $f(x) - L$, es épsilon. Esas diferencias como valor absoluto.

---

[7] Cauchy lo define con toda claridad como una variable: On dira qu'un montant variable est infiniment petit lorsque sa valeur numérique diminue indéfiniment afin que converge vers le bord…Un accroissement infiniment petit "α" de la variable x, conduit toujours à une augmentation infiniment petit septies $f(x + \alpha) - f(x)$ de la même fonction (Cauchy, 1821; p. 5).

[8] Bolzano desarrolla una teoría de números reales como límites de sucesiones de números racionales deja un intento de demostración de que una sucesión de que converge en sí misma; es decir, una S_n tal que S_{m+p} difiere de S_m (para m suficientemente grande y p cualquier número natural) en menos que cualquier magnitud ε dada de antemano, también converge en el sentido de su relación externa *con un número real S*, el límite de la sucesión cero.

[9] La definición de límite en notación moderna, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ / si $|x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$

Pasar de un infinitesimal asociado a un símbolo, a un infinitesimal asociado a una variable y a un número real, implica el surgimiento de un infinitesimal visto como función, en contexto aritmético, desde una concepción (ECE_5) que está demarcado por el lenguaje expresado en la definición de límite.

Las representaciones que están asociadas a la noción son los números reales y las variables. Otras representaciones son imágenes que permiten que emerja el infinitesimal.

3.7.2. *Caracterización del* ECE_5

Idea: El número real, los valores numéricos de las variables.

Representaciones asociadas a la noción: "η", "ε", "δ", "$f(x)$", "x", "L, "α", "$f(x+\alpha) - f(x)$", $|x - x_0| < \delta$, $|f(x) - L| < \varepsilon$

Representaciones que la hacen emerger: a) El lenguaje natural y simbólico usado para la definición de límite y b) Las manipulaciones simbólicas en la definición estática de límite.

Contexto: Aritmético y analítico.

Procedimientos: a) Aritmético: encontrar el valor η_0, sumar y restar los valores $x_0 \pm \eta$ y $f(x_0 \pm \eta) - L$, comparar η_0 y η así como también $f(x_0 \pm \eta) - L$ con ε; *encontrar el valor de* "α", $f(x+\alpha)$, $f(x+\alpha) - f(x)$.

Conceptos asociados: Límite de una función, valor numérico de una función, variable, números reales, sucesiones convergentes, continuidad, valor absoluto.

Método: Épsilon-Delta.

Matemáticos representativos: Cauchy y Weierstrass

Momento histórico: Finales del siglo XIX.

4. A MODO DE CONCLUSIÓN

El análisis y caracterización de los esquemas conceptuales epistemológicos permitió comprender la existencia de una pluralidad de puntos de vista, ideas, representaciones, etc., asociados a la noción de infinitesimal. Las experiencias y significados que los matemáticos otorgaron a esta noción a lo largo de la historia no se mantuvo, más bien evolucionó y se enriqueció, así como sucedió con los esquemas conceptuales asociados a la noción de infinitesimal de los matemáticos, tal como lo muestran los hallazgos encontrados producto de la descripción estructurada de la actividad de análisis. Esto permitió tener una visión retrospectiva de los diferentes "momentos" (en términos de Newton) por los cuales ha pasado.

El análisis reporta que en un primer "momento" los infinitesimales son "vistos" como "ideas nacientes" asociadas a una razón como conocimiento previo, manteniéndose este esquema conceptual hasta inicios del siglo XIV. En un segundo "momento", las ideas evolucionan sobre la base de las experiencias de los matemáticos en el campo de la Física y la Astronomía; se concibe el infinitesimal asociado a un indivisible. En el siglo XVII, acontece un salto epistemológico con el surgimiento de ideas ligadas a la noción que nos permite asociarlas a ellas. En este "momento", el infinitesimal es "visto" como imperceptible e indivisible y como una razón aritmética. Para finales del siglo XVII e inicios del XVIII, el infinitesimal se representa con los símbolos: *dx, dy, o, w, ox, oy, ds, dy/dx.* Finalmente, podemos decir que la definición de los números reales en el siglo XIX, hizo posible otorgar una definición para un infinitésimo. El infinitesimal es una variable y es un valor numérico real δ o ε de esa variable, lo que permite otorgarle una caracterización de función al esquema conceptual epistemológico.

A partir de la proximidad que existe entre la noción de esquema conceptual y la de concepción, hemos diferenciado dos acepciones en la noción de esquema conceptual: la cognitiva y la epistemológica. En este estudio el interés prevalece particularmente por la epistemológica.

El esquema conceptual en su carácter epistemológico, se refiere a la evolución histórica de los conceptos matemáticos o a los tipos de conocimientos asociados a la noción matemática, así como también a las representaciones, los procedimientos y métodos que los matemáticos usaron para resolver una situación en un cierto contexto y momento histórico.

Esta acepción, y el estudio de la evolución histórico-epistemológica realizado, han permitido acercarnos a la identificación, descripción y caracterización de siete esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción de infinitesimal. Cinco esquemas están asociados a una diferencia, a una razón aritmética, a un incremento, a un símbolo y a una función. Dos son identificados como esquemas epistemológicos previos (*met-before*), consideramos como "ideas nacientes" o experiencias previas que le dan sentido a la noción de infinitesimal. Estas ideas nacientes están asociadas a una razón y a un indivisible.

Este trabajo y en especial las caracterizaciones realizadas de los esquemas conceptuales epistemológicos, aporta un conocimiento relevante que servirá como marco de referencia para interpretar factores determinantes de los procesos de conceptualización de los infinitesimales por parte de los alumnos. En particular amplía nuestra capacidad como investigadoras, para interpretar las conductas, las respuestas y las prácticas explícitas desarrolladas por los sujetos que serán investigados en el proceso de resolución de una situación matemática.

Asimismo, la categorización realizada no sólo provee de insumos para la interpretación o análisis posteriores, sino también para pensar en el diseño de cuestionarios, evaluaciones y entrevistas en las que se pongan de manifiesto una muestra de tareas adaptadas a los tipos de elementos que caracterizan los diferentes esquemas conceptuales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (1989). Epistemologie et Didactique. Cahier de DIDIRENT, *3*. IREM. Université Paris VII.

Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10* (2/3), 241-286.

Artigue, M. (1992). The importance and limits of epistemological work in didactics. *Proceedings of the 16th Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education 16,* Durham, 3, 195-216.

Artigue, M. (1995). The role of epistemology in the analysis of teaching/learning relationships in mathematics education. *Planary Lecture,* CMESG, *Proceedings* 7-21.

Bergé, A. y Sessa, C. (2003). Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6*(3), 163-197.

Bliss, J., Monk, M. y Ogborn, J. (1983). *Qualitative Data Analysis for Educational Research*. Londres: Coom Helm.

Boyer, C. (2003). *Historia de la Matemática*. Madrid: Editorial Alianza.

Brousseau, G. (1983). Les Obstacles épistémologiques et les problemas en Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4(2),*164-198.

Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa: Un estudio de la formación social de la analiticidad*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. y Farfan, R. (2004). *Desarrollo Conceptual del Cálculo*. México: Thomson Editores.

Cauchy, A. (1821). Tours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechinique. Ire partie. Analyse Algébrique. París: l'Imprimerie Royale. Obtenido en junio 4, 2005, de http://gallica.bnf.fr/

Chae, S. & Tall, D. (2005). Student´s Concept Images for Period Doublings as Embodied Objets in Chaos Theory. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics 2*, 121-132.

Chin, E. & Tall. D. (2000). Making, having and compressing formal mathematical concepts. In Nakara, T. & Koyama, M. (Eds.), *Proceedings of the 24th International Conference of the*

International Group for the Psychology of Mathematics Education, *2*, 177-184.

Chin, E. & Tall, D. (2001). Developing Formal Mathematical Concepts Over Time. In Marja Van Den Heuvwel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Educations, 4*, 241-248. Utrecth, The Netherlands.

Cornu, B. (1981). Apprentissage de la notion de limite: modéles spontanés et modéles propres', *Actes du Cinquiéme Colloque du Groupe Internationale PME* (pp. 322-326.). Grenoble.

Cornu, B. (1983). Quelques obstacles á l'apprentissage des notion des limite. *Recherches en Didactiqué des Mathématiques 4*, 236-268.

Cornu, B. (1991). Limits. En David. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*. *1,* 153-166. Boston/London: Kluwer Academic Prés Dordrecht.

Crespo, C. (2005). Un paseo por el paraíso de cantor: problemas y reflexiones acerca del infinito. En Martínez, G. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 19,* 28-34. México: CLAME.

Dreyfus, T. (1990). Advanced mathematical thinking. En Nesher, P. & Kilpatrick, J. (Eds.), *Mathematics and Cognition*, 113-134. Cambridge: Cambridge University Press.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En Tall, D. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, 3-21. Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer Academic Publishers.

Edwards, C. (1979). *The Historical Development of the Calculus*. New York: Springer-Verlag.

El Bouaizzaui, H. (1988). Conceptions des eleves et des professeurs á propos de la notion de continuité d´une fonction. Thése Ph. D; non publié, Université Laval.

Euclides (1994). *Elementos V-IX.* (Puertas, Mª L., Trad.). Madrid, España: Gredos.(Trabajo original publicado 1482).

Euler, L. (2000). *Introducción al Análisis de los Infinitos*. España: SAEM Thales.

Garbin, S. (2005). ¿Cómo piensan los estudiantes entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8* (2)*,* 169-193.

Godino, J. D. (2002a). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques 22* (2/3), 237-284.

Godino, J. (2002b). Studying the median: a framework to analyse instructional processes in statistics education. En Phillips, B. (Ed.), *ICOTS-6 papers for school teachers*. Cape Town: International Association for Statistics Education (CD Rom).

Godino, J.; Ruiz, F.; Roa, R.; Pareja, J. y Recio, A. (2003). Análisis Didáctico de Recursos Interactivos para la Enseñanza de la Estadística en la Escuela *.IASE Satellite Conference on Statistics Education and the Internet.* Berlin, Germany, 11-12 August, 2003. Obtenido en agosto 26, 2006, de http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm.

Harel, G.; Selden, A. y Selden, J. (2006). Advanced Mathematical Thinking. Some PME Perspectivas. En Gutiérrez, A y Boero, P. (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, 147-172. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Kleiner, I. (2001). The Infinitely small and the infinitely large in calculus. *Educational Studies in Mathematics 48*(2-3), 137-174.

L'Hospital, G. (1696). *Analyse des infiniment petits*. Paris: L'Imprimmerie Royale. Obtenido en noviembre 5, 2005, de http://www.math-doc.ujf-grenoble.fr/OEUVRES/.

Pinto, M. & Tall, D. (1999). Students constructions of formal theory: living and extracting meaning. *Proceedings of the 23th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Educations 2*, 41-48. Haifa, Israel.

Pinto, M. & Tall, D. (2001). Following students' development in a traditional university classroom, in Marja Van Den Heuvwel-Panhuizen (Eds.), *Proceedings of the 25th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Educations 4*, 57-64. Utrecth, The Netherlands.

Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics 55* (1 y 3), 103-132.

Przenioslo, M. (2005). Introducing the concept of convergence of a sequence in secondary shoool. *Educational Studies in Mathematics 60* (1), 71-93.

Puertas, M. (1994). Los Elementos de Euclides. Colombia: Gredos.

Rodríguez, G.; Gil, J. y García E. (1998). *Metodología de la Investigación Cualitativa*. Málaga: Ediciones Aljibe.

Robert, A. (1982). L´Acquisition de la notion de convergente des suites numériques dans l´Enseignement Supérieur. *Recherches en Didactique des Mathématiques 3*(3), 307-341.

Ruiz, L. (1998). *La noción de función: Análisis Epistemológico y didáctico*. Tesis doctoral; no publicada, Universidad de Jaen, España.

Sastré, P., Boubée, C., Rey, Maldonado, S. y Villacampa, Y. (2006). Evolución histórica de las metáforas en el concepto de función. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19,* 22-27. México: CLAME.

Sierpinska, A. (1985). La notion d'obstacle épistémologique dans l'enseignement des mathématiques. *Actes de la 37e Rencontre CIEAEM*, 73-95. Leiden.

Sierpinska, A. (1987a). Obstacles épistémologique relatifs à la notion de limite . *Recherches en Didactiqué des Mathématiques, 6*(1)*,* 5-67.

Sierpinska, A. (1987b). Trying to overcome epistemological obstacles relative to limits. *In 17 year old Humanities Students Proceedings of the 38th Cieaem's Meeting,* 183-193. Southampton.

Sierpinska, A. (1992). Understanding the notion of function. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds.), *The concept function. Aspect Epistemology and pedagogy,* 25-58. USA: Mathematical Association of America.

Stake, R. (1983). La evaluación de programas; en especial la evaluación de réplica. En W.B. Dockrell y Hamilton (Eds.), *Nuevas Reflexiones sobre la Investigación Educativa*. Madrid: Nancea.

Stromholm, P. (1968). Fermat's methods of maxima and minima and tangents. A recoconstruction. Arch His Sci. *5*, 47-69.

Tall, D. (2005). The transition form embodied thought experiment and symbolic manipulation to formal proof. *Proceedings of the Delta Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1-16. Frazer, Island, Australia.

Tall, D. (2004). Thinking Through Three Worlds of Mathematics. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1-16. Bergen, Norway.

Tall, D. (2001). Natural and formal infinities. *Educational Studies en Mathematics, 48* (2 y 3), 200-238.

Tall, D. (1995). Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinkhing. *Proceedings of the 19th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Educations,* 61-75. Recife, Brasil.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking functions, limits, infinity, and proof. En Grouws, D. (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* 495-511. *Reston, Va: National Council Of Teachers Of Mathematics, Inc.*

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. En Tall, D. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, 3-21. Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, whit particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics 12*, 151-169.

Vallejo, J. (1819). *Compendio de Matemáticas Puras y Mixtas*. Madrid: Garrasayaza.

Vinner (1983). Concept definition, concept image and notion of function. *International Journal of Mathematical in Sciencie and Technology*, *20*, 293-305.

Watson, A. & Tall, D. (2002). Embodied action, effect and symbol in mathematical growth. *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4*, 369-376. Norwich, UK.

Watson, A., Spyrou, P. & Tall, D. (2004). The relationship between physical embodiment and mathematical symbolism: The concept of vector. *The Mediterranean Journal of Mathematics Education*. 1 2, 73-97.

Woods, P. (1987). *La escuela por dentro. La etnografía en la investigación educativa*. Barcelona: Paidós.

Autoras

Carmen Valdivé. Universidad Centroccidental Lizandro Alvarado, Barquisimeto,Venezuela; valfer16@yahoo.com

Sabrina, Garbin Dall´Alba. Universidad Simón Bolívar Sartenejas- Edo. Miranda, Venezuela; sgarbin@usb.ve