

# LAS IGUALDADES INCORRECTAS PRODUCIDAS EN EL PROCESO DE TRADUCCION ALGEBRAICO. UN CATÁLOGO DE ERRORES<sup>1</sup>.

Fernando Cerdán Pérez

Departamento de Didáctica de la Matemática. Universitat de València.

**Resumen.** *En este trabajo se propone un catálogo para los errores que puedan encontrarse al realizar el proceso de traducción algebraico. Catálogo que está dividido en tres categorías: errores en el uso de letras, errores en la construcción de expresiones algebraicas y errores en la construcción de la igualdad. La validez del catálogo se contrasta con las igualdades incorrectas producidas por una población de 258 estudiantes de bachillerato a los que se propusieron 13 problemas. Se encontró que las producciones persistentes daban cuenta de una parte sustantiva del error total y que estas producciones contenían errores de las categorías antes citadas. Además determinados errores se podrían asociar con tipos de problemas.*

**Abstract.** *In this piece of work we propose a catalogue for the errors we can find in the process of algebraic translation. This catalogue has been divided into three categories: errors in the use of letters, error in the construction of algebraic expressions and errors in the construction of the equal sign between two algebraic expressions. A sample of 258 secondary school students (aged 15 – 18 years) was provided with 13 problems. From the incorrect equalities produced by the students the utility of the catalogue was contrasted with. Finally, it was found that great part of the total error could be explained by means of persistent productions in which we could find errors belonging to the three categories of the catalogue. Furthermore, we could conclude that some kinds of errors were related to specific types of problems.*

## Introducción

Es conocido que en la realización de muchas tareas algebraicas los escolares producen multitud de errores. Socas y Paralea (1997) apuntan que éstos son la manifestación en la práctica de dificultades y obstáculos que tienen que ver: con la complejidad de los objetos del álgebra, con los procesos de pensamiento algebraico, con el desarrollo cognitivo de los alumnos y alumnas, con los métodos de enseñanza y con actitudes afectivas y emocionales hacia el álgebra.

Para los errores que cometen los estudiantes cuando la tarea que se les propone consiste en el cálculo o transformación de expresiones aritméticas o algebraicas, la sustitución formal en las mismas o la resolución de ecuaciones, Matz (1980) organizó un catálogo que da cuenta y trata de explicar la mayoría de estos errores.

Cuando la tarea que se propone a los estudiantes es poner un problema en ecuaciones, desde que Clements (1982) dio cuenta del “reversal error” se han detectado muchos otros errores. Nosotros mismos hemos encontrado, (Cerdán 2008), que únicamente un

---

<sup>1</sup> Estudio financiado en parte por M.E.C.D.G. de I.S.G. de Proyectos de Investigación. Proyecto de investigación: SEJ2005-06697/EDUC. “Modelos de Enseñanza para el desarrollo de Competencias de Modelización y Resolución de Problemas Aritmético-Algebraicos

32,1 % , una de cada tres de las igualdades producidas por los estudiantes son correctas, esto es, conducen al resultado del problema. Sin embargo, no se dispone de un catálogo que permita un diagnóstico claro de dichos errores que nos permita avanzar en su etiología. Este trabajo se propone y se contrasta un catálogo de tales errores.

## Propósito

El propósito concreto de este trabajo es proponer un catálogo de errores susceptibles de ser cometidos por los estudiantes en el proceso de traducción algebraica y tomar en consideración los segmentos de signos “expresión algebraica = expresión algebraica”, “expresión algebraica = número”, igualdades que no conducen al resultado del problema pero que son dadas por los estudiantes como planteamiento del problema. La intención de ello es contrastar la validez del catálogo propuesto.

## Errores en el proceso de traducción algebraica

En cualquier actuación de los estudiantes pueden encontrarse errores. El error más conocido al traducir problemas a ecuaciones es el llamado “reversal error” encontrado en el problema estudiantes-profesor, (Clements, 1982). Se acepta corrientemente que la causa principal por la que se comete el reversal error es el intento de traducir directamente de palabras a símbolos, (Hershkovics, 1989; Laborde, 1990; Mestre, 1988). Aunque el “reversal error” es el error más estudiado, se han encontrado otros errores en la traducción de problemas a ecuaciones lineales simples. Stacey y McGregor (1993) indican que es aceptado que los estudiantes cometen errores a causa de:

- 1.- El uso de letras como abreviaturas de palabras.
- 2.- El intento de traducir directamente de las palabras clave a los símbolos matemáticos, de izquierda a derecha, sin prestar atención al significado.
- 3.- El uso del signo igual para indicar que lo que está en la izquierda está asociado con lo que está en la derecha.
- 4.- La influencia perniciosa de los dibujos mentales.

## El marco teórico y la comisión de un error.

En Cerdán (2008) se ha elaborado un marco teórico para el estudio de las actuaciones de los estudiantes cuando resuelven problemas de la Familia de Problemas Aritmético-Algebraicos. Entre los elementos de ese marco se encuentren: uno, un espacio del problema específico donde se da la búsqueda de solución al problema y dos, las nociones de un grafo teórico y un diccionario teórico de cantidades que contienen todas las cantidades y relaciones que cualquier resolutor puede usar en cualquier solución del problema. El espacio del problema está construido basándose en las indicaciones de Newell y Simon (1972), siendo una de las componentes de tal espacio un conjunto de operadores que se encarga de señalar relaciones entre las cantidades y de producir expresiones aritméticas, algebraicas o verbales que asignan a cantidades del diccionario. Esto es, los operadores son la componente del espacio del problema que produce mientras el grafo y el diccionario teórico de cantidades son el juez que decide si la producción es adecuada.

En definitiva, en dicho marco teórico se considera error a *todo aquello, producido por los operadores, que no conste en el grafo teórico o diccionario teórico de cantidades*

*del problema*, Y, se decide que la causa de la comisión de un error proviene del uso inadecuado de un operador. Esta concepción permite, tras la delimitación del conjunto de operadores que produce, examinar teóricamente los posibles usos inadecuados de los operadores (Cerdán 2008, pp. 174-181) y de acuerdo con este dicho examen establecer los posibles errores que pueden encontrarse en el proceso de traducción algebraico. Errores que, según la función del operador que se usa inadecuadamente, pueden presentarse en un catálogo dividido en tres categorías.

## Un catálogo de errores para la traducción de problemas a ecuaciones.

### Errores en el uso de letras

*Designación múltiple.*-Se dice que hay designación múltiple cuando un número o cantidad es designado por más de una literal.

*Significado múltiple (polisemia).*-Se dice que la literal posee polisemia cuando la literal se utiliza para designar a más de un número o cantidad.

*Significado cambiado.*-Se dice que la literal tiene el significado cambiado cuando una literal se usa para designar a otra cantidad diferente de la que le fue expresamente atribuida a tal literal.

### Errores en la construcción de expresiones aritméticas o algebraicas

Los errores en expresiones aritméticas o algebraicas se enuncian en función de la diferencia que existe entre la expresión algebraica: EA', utilizada para referir una cantidad y la expresión que debería referirla: EA.

*Error de Operación.*-Se dice que la expresión (A # B)' contiene un error de operación cuando se encuentra escrita la expresión (A # B)' en lugar de A \* B, donde # y \* designan operaciones diferentes. Entre ellos se encuentra el error de inversión.

*Error de Inversión.*- Se dice que una expresión (A # B)' contiene un error de inversión cuando se encuentra escrita la expresión (A # B)' en lugar de A \* B donde \*, # se refieren a operaciones inversas.

*Error de arbitrariedad.*-Se dice que la expresión EA contiene un error de arbitrariedad o es arbitraria cuando no tiene ningún referente en el diccionario teórico de cantidades, y leída de forma que los errores mencionados anteriormente no juegan un papel relevante.

### Error de Igualdad

Se dice que una igualdad es errónea si las cantidades referidas por las expresiones de un lado y otro de la igualdad son diferentes.

### Material y método

Los problemas.-Se consideraron 13 problemas de lectura analítica algebraica de 6 subfamilias que constan junto con sus grafos en los Anexo 1 y 2.

Los estudiantes.- 258 estudiantes de BUP, 91 de 1º, 72 de 2º y 75 de 3º, que cursaban sus estudios en tres institutos de la red pública de enseñanza.

Las igualdades analizadas fueron las que los estudiantes proporcionaron como planteamiento de los problemas.

Como quiera que las igualdades producidas por los estudiantes eran en muchas ocasiones idénticas. Se acordó llamar producción a este conjunto de igualdades idénticas y se determinó su frecuencia para cada problema y curso. Las producciones se dividieron en dos grupos correctas e incorrectas, según condujesen o no al resultado del problema. Y se obtuvo un listado secuencial de cada grupo dando preferencia en primer lugar al número de cursos en los que se había encontrado la producción, ver Anexo 3.

Para el estudio de las producciones incorrectas se elaboró un protocolo, ver Anexo 4, que debía cumplimentarse para cada problema. El protocolo incluye la construcción del grafo de la resolución para el diagnóstico del error de acuerdo con el catálogo. Esto se hace como se muestra en el Anexo 5.

Los resultados que se muestran a continuación constituyen un resumen de los protocolos cumplimentados

## Resultados

### A) De las producciones incorrectas

1.- Para cada problema se encontró un elevado número de producciones incorrectas diferentes. El número de producciones incorrectas diferentes en los distintos problemas está entre las dos y las tres decenas. Ver tabla 1.

2.- Para un problema dado, en todos los cursos no se encontraron las mismas producciones incorrectas.

3.- El número de producciones encontradas en dos cursos (compartidas) por cualesquiera dos cursos fue menor que el número de producciones encontradas en los tres cursos (persistentes). Ver tabla 2

4.- En la mayoría de los problemas, la frecuencia de cada una de las producciones incorrectas fue muy desigual. La Fig. 1 muestra la distribución del error en producciones.

5.- En 8 de los 13 problemas, el error tiende a acumularse en unas cuantas producciones, pero que a pesar de este hecho el resto de las producciones suponen un porcentaje considerable del error.

6.- En cada problema, el conjunto de producciones persistentes representa la parte más sustancial del error. Dicho porcentaje es superior al 50%.

7.- Cuando para las producciones persistentes, se examina el error que suponen del error total de cada problema en cada curso, este muestra ser también sustancial en cada

uno de los cursos, con escasas desviaciones respecto al error total correspondiente a los tres cursos.

8.- Cabe conjeturar que para un problema dado las producciones persistentes son las que señalan los errores que son propios de ese problema.

#### B) De los errores concretos encontrados

1.- En las producciones incorrectas se encontró un amplio número de errores cuya descripción de detalle o diagnóstico sólo puede entenderse poniéndolo en relación con el problema concreto en que el error es encontrado o con un uso peculiar del SMS del álgebra.

2.- La catalogación de los errores en tres categorías: en el uso de letras, en expresiones algebraicas, en igualdades, permitió detectar errores de cada una de éstas y diagnosticarlos de modo más preciso.

3.- La presencia de errores de estas categorías en las producciones persistentes de distintos problemas permitiría hablar de estos errores como errores del proceso de traducción algebraico.

4.- En las producciones persistentes de los problemas estudiados se diagnosticaron errores de polisemia, de inversión, de concepto, de arbitrariedad y de igualdad. Ver Tabla 3.

5.- El uso polisémico de una letra, se detectó en problemas en los que en el enunciado un mismo término se usaba en la designación, o como parte de la designación verbal de dos cantidades, por ejemplo: número, edad, billetes.

6.- El error de inversión apareció ligado a las expresiones algebraicas que tenían la intención de expresar una cantidad que interviene en una relación de comparación.

7.- Las expresiones algebraicas arbitrarias fueron abundantes en todos los problemas y se pueden interpretar como la manifestación de la dificultad del análisis de la cantidad que pretenden expresar, o de que el análisis de alguna cantidad no se ha realizado del modo adecuado.

8.- Una de las maneras en que se manifestó el error de igualdad fue así: se declararon iguales cantidades, que sin ser la misma o tener el mismo valor, estas cantidades se podían considerar fuertemente relacionadas, como por ejemplo: por una relación hipotética o de causa efecto.

## Conclusiones

Los estudiantes producen para cada problema una gran cantidad de igualdades incorrectas diferentes. La distribución del error en producciones muestra que un gran porcentaje del error corresponde a producciones persistentes. Esto lleva a afirmar que para cada problema hay un conjunto de producciones incorrectas que se pueden encontrar en estudiantes de cualquier curso, producciones que indicarían los errores que se cometen inducidos por el problema concreto que se está poniendo en ecuaciones. Los

errores que contienen las producciones persistentes pueden diagnosticarse como uno de los que constan en el catalogo, aunque no todos los tipos mencionados en el catálogo se encontraron en las producciones persistentes. Además la asociación que se indica entre determinados errores y tipo de problema puede ser un buen punto de arranque para entender la comisión de tales errores.

## Referencias

- Cerdán, F. (2008) Estudios sobre la Familia de Problemas Aritmético-algebraicos. Tesis Doctoral. Universitat de València
- Clement, J. (1982). Algebra Word Problem solutions: Thought Processes underlying a Common Misconception. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13(1), 16-30.
- Hershkovics, N. (1989). Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra. En Wagner S., Kieran C. Eds.(1989) *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, (pp.. 60-86). NCTM. Reston, Virginia.
- Laborde, C. (1990) Language and Mathematics. In P. Nesher P. and J. Kilpatrick. (Eds.) *Mathematics and Cognitions*, (pp.53- 69). Cambridge University Press.
- Matz , M. (1980). Towards a computational Theory of an algebraic competence” *Journal of Children’s Mathematical Behavior*, 3(1), 93-166
- Mestre, J. P. (1988). The role of the language comprehension in mathematics and problem solving. En *Linguistic and cultural influences on learning Mathematics*, (pp. 201-220). Hillsdalle, NJ. Erlbaum
- Newell, A., Simon, H. (1972). *Human Problem Solving*. New Jersey . Prentice Hall, Inc.
- Socas, M.; Paralea, M. (1997). Las fuentes de significado, los sistemas de representación y errores en el algebra escolar. Monografía sobre Lenguajes algebraicos. *Uno*. 14 , 7-24.
- Stacey, K., MacGregor, M. (1993). Origins of Students' Errors in Writing Equations. In Annette Baturó & Tom Cooper (Eds.) *New Directions in Algebra Education*. (pp. 205-212) Brisbane: Queensland University of Technology

**\*\*tablas y figuras\*\***

Problema	numero de igualdades incorrectas producidas	numero de producciones diferentes
MIT Y TERC P	89,0	<b>20</b>
DES EN 4 PAR	136,0	<b>21</b>
EDAD DOBLE	127,0	<b>33</b>
PEDRO YJUAN	142,0	<b>20</b>
TERRENO	103,0	<b>30</b>
ALCANZAR	23,0	<b>11</b>
ENCONTRAR	14,0	<b>10</b>
LIEBRE Y GA	56,0	<b>30</b>
CAVAR	20,0	<b>15</b>
HENO	44,0	<b>23</b>
RUBLOS	75,0	<b>31</b>
MECA	149,0	<b>32</b>
DINERO	159,0	<b>28</b>

Tabla 1.- Número total de igualdades incorrectas encontradas y número de producciones diferentes. N=258.

Problemas	1°y 2°y 3°	1°y2°	1°y3°	2°y3°	dos o más cursos	sólo 1°	sólo 2°	sólo 3°
MIT Y TERC P	<b>2</b>	3	2	0	7	17	3	0
DES EN 4 PAR	<b>4</b>	2	1	2	<b>11</b>	3	6	1
EDAD DOBLE	<b>4</b>	2	1	2	<b>9</b>	10	9	5
PEDRO YJUAN	<b>6</b>	2	2	3	<b>13</b>	0	6	1
TERRENO	<b>3</b>	3	0	1	7	15	7	1
ALCANZAR	<b>0</b>	0	0	0	<b>0</b>	2	5	3
ENCONTRAR	<b>0</b>	0	0	1	<b>1</b>	4	6	0
LIEBRE Y GALGO	<b>1</b>	1	1	1	<b>4</b>	7	10	9
CAVAR	<b>0</b>	1	0	1	<b>2</b>	5	8	0
HENO	<b>0</b>	2	1	2	<b>5</b>	6	6	4
RUBLOS	<b>1</b>	0	2	1	<b>4</b>	12	10	4
MECA	<b>6</b>	0	0	2	<b>8</b>	9	10	5
DINERO	<b>8</b>	3	0	3	<b>14</b>	10	3	1
total	<b>35</b>	19	11	19	<b>86</b>	102	90	34

Tabla.2.- Número de producciones encontradas en tres, dos o un curso.

<b>Error</b>	<b>En el uso de letras</b>	<b>Expresión algebraica</b>	<b>Expresión algebraica</b>	<b>Expresión algebraica</b>	<b>Expresión algebraica</b>	<b>De igualdad</b>
problemas	polisemia	inversión	operación	concepto	arbitrarie.	
MIT Y TERC P			66,5		33,5	
DES EN 4 PAR	49,4			50,5		88,1
EDAD DOBLE					53,2	46,8
PEDRO Y JUAN	61,9	28,9			7,6	
TERRENO				19,1		100
RUBLOS	100				100	
MECA					29,3	95,1
DINERO					51,1	87

Tabla 3.- Problemas y tipo de error. Porcentaje del tipo de error del error persistente.



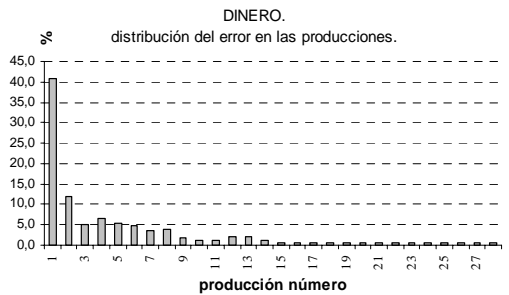
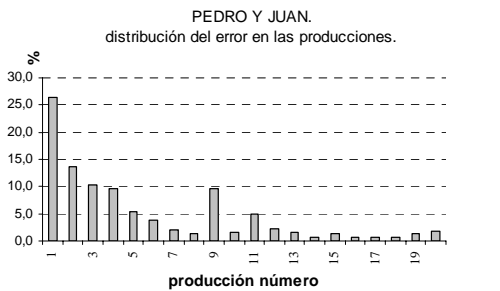
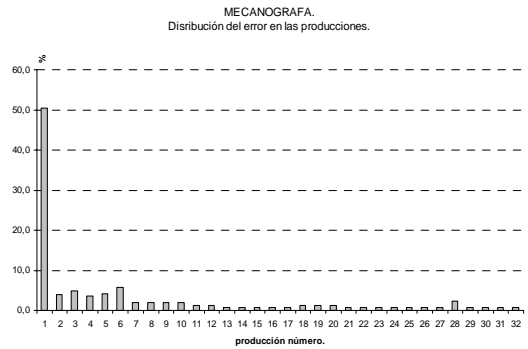
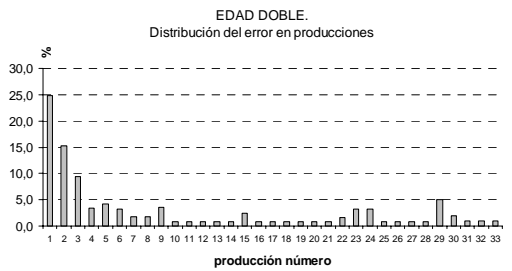
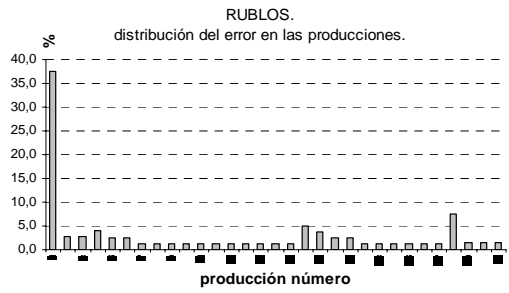
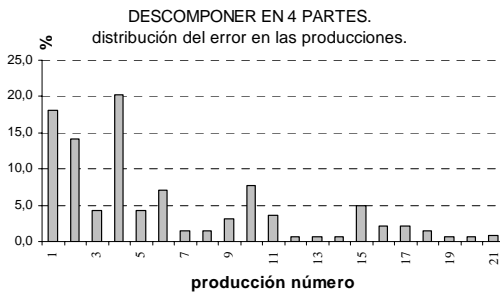
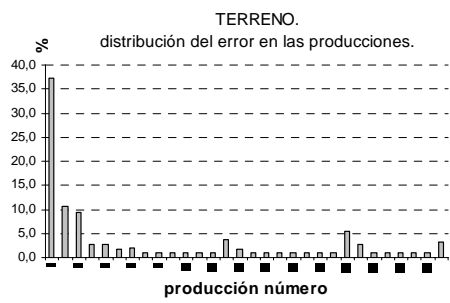
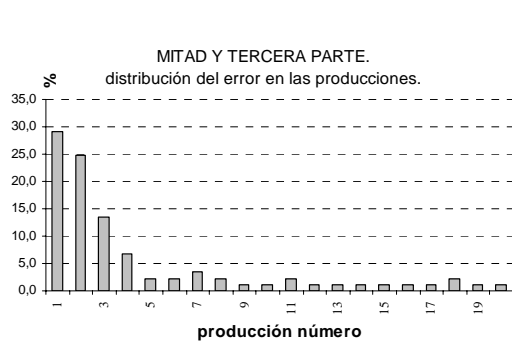


Fig.1.- Distribución del error en producciones. Problemas: MITAD Y TERCERA PARTE, DESCOMPONER EN 4 PARTES, EDAD DOBLE, PEDRO Y JUAN, TERRENO, RUBLOS, MECANOGRFA y DINERO.

## Anexo 1.- Enunciados de los problemas.

MITAD Y TERCERA PARTE. Estoy pensando en un número tal que la suma de su mitad y su tercera parte es 7 unidades mayor que su cuarta parte. ¿Cuál es dicho número?

DESCOMPONER EN 4 PARTES. Descomponer un número en cuatro partes de modo que si se resta 4 de la primera, se suma 4 a la segunda, la tercera se multiplica por 4, y la cuarta se divide por 4, se obtiene el mismo número en todos los casos.

EDAD DOBLE. La edad de una persona es doble de la de otra. Hace siete años la suma de las edades de las dos personas era igual a la edad actual de la primera. ¿Cuál es la edad de cada una?

PEDRO Y JUAN. Pedro dice a Juan: Tengo dos veces la edad que tenía cuando tenía la edad que tienes tú. Cuando tú tengas la edad que yo tengo ahora, entre los dos tendremos 63 años. ¿Cuáles son nuestras edades actuales?.

TERRENO. El ancho de un terreno rectangular es  $\frac{2}{3}$  de su largo. Si ambas dimensiones se aumentan en 2 m, el área aumenta en  $64 \text{ m}^2$ . ¿Cuáles son las dimensiones de este terreno?

ALCANZAR. Un automóvil parte de un punto A con velocidad uniforme de 40 km/h hacia otro punto B. Dos horas después sale de A hacia B otro automóvil con velocidad uniforme de 60 km/h. Dígase a qué distancia de A se encuentran.

ENCONTRAR.. Un tren parte a las 16 h de Madrid con destino a Valencia con una velocidad de 120 km/h. A la misma hora sale de Valencia otro tren con destino Madrid y a una velocidad de 140 km/h. Dígase a qué distancia de Madrid se encuentran y a qué hora, si la distancia Madrid-Valencia es de 430 km.

LIEBRE Y GALGO. Una liebre era perseguida por un galgo al que llevaba 50 saltos de ventaja. La liebre daba 4 saltos mientras que el galgo daba 3, pero 2 saltos del galgo miden tanto como 3 saltos de liebre. ¿Cuántos saltos deberá dar el galgo para alcanzar a la liebre?

CAVAR. La superficie de un campo es de 6 ha. Juan puede cavarlo en 2 días. Antonio lo hace en 3 días. Si trabajan los dos juntos en el campo, ¿cuánto tiempo tardarán en cavarlo?

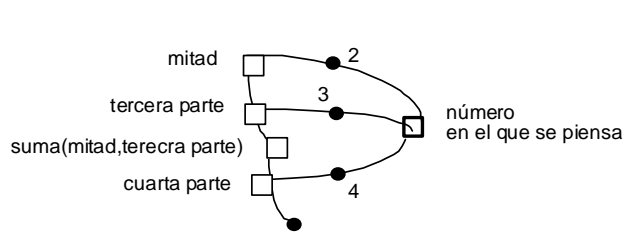
RUBLOS. Una escuela rusa compra libros para la biblioteca. Si los paga con billetes de 3 rublos, la escuela tiene que dar 8 billetes más que si los paga con billetes de 5 rublos. ¿Cuánto cuestan los libros?

HENO Unos granjeros almacenaron heno para 40 días. Sin embargo el heno era de mejor calidad de la que pensaban y ahorraron 100 kg por día. Así tuvieron heno para 60 días. ¿Cuánto heno almacenaron?

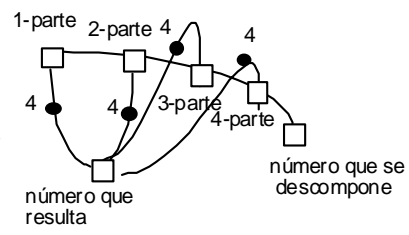
MECANOGRAFA. Una mecanógrafa piensa que si escribe al día 2 páginas más de lo establecido normalmente, acabará el trabajo 3 días antes de lo previsto, mientras que si escribe 4 páginas más al día, acabará 5 días antes de lo previsto. ¿Cuántas páginas tiene que escribir y en cuánto tiempo?

DINERO. Una cierta suma de dinero se repartió a partes iguales entre cierto número de niños. Si hubiera habido dos niños más, cada uno hubiera recibido 100 pts menos; si hubiera habido dos niños menos, cada uno hubiera recibido 200 pts más. ¿Cuántos niños había y cuánto recibió cada uno?

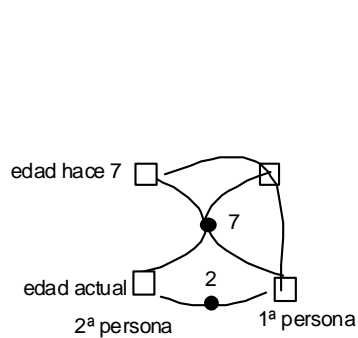
Anexo 2.- Grafos de los problemas.



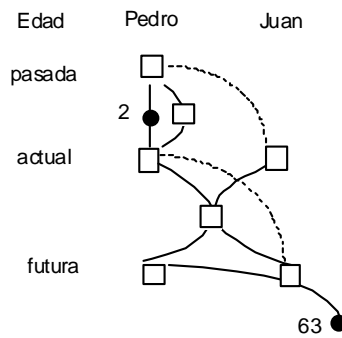
MITAD Y TERCERA PARTE



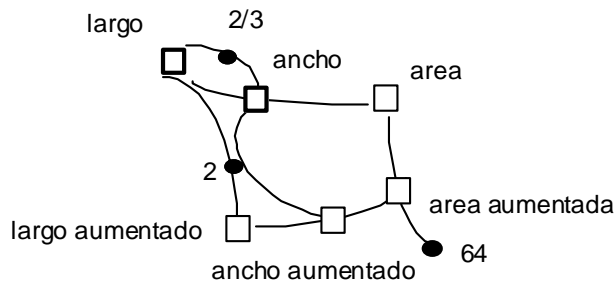
DESCOMPONER EN 4 PARTES



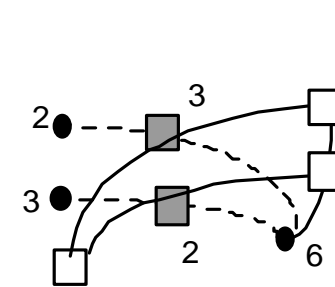
EDAD DOBLE



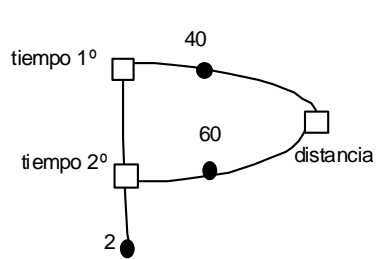
PEDRO Y JUAN



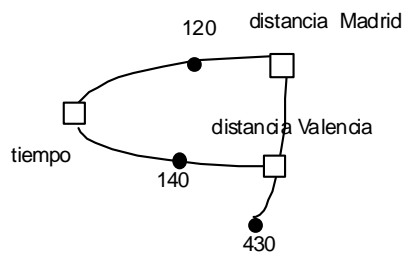
TERRENO



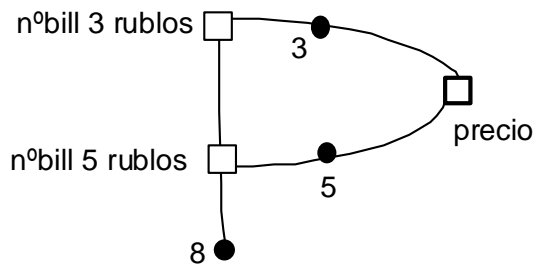
CAVAR



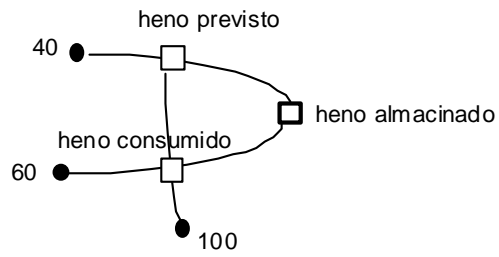
ALCANZAR



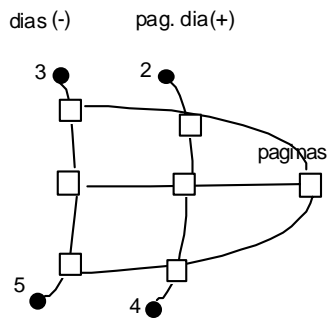
ENCONTRAR



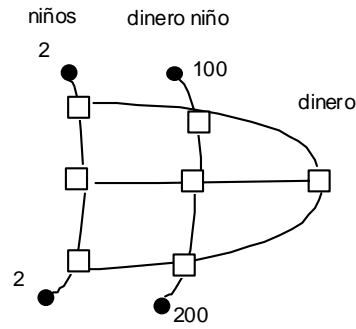
RUBLOS



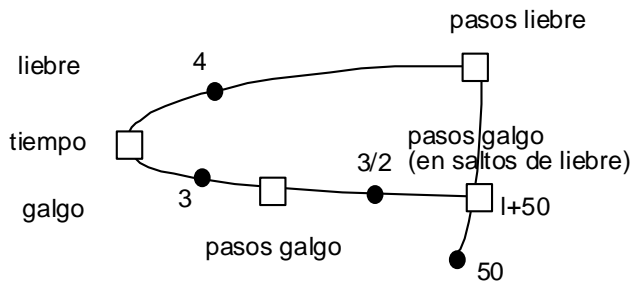
HENO



MECANOGRAFA



DINERO



LIEBRE Y GALGO

Un grafo representa una lectura analítica del problema. En los grafos mostrados en la figura, los vértices que corresponden a cantidades conocidas se representan mediante puntos negros, los vértices que corresponden a cantidades desconocidas se representan mediante cuadrados en blanco. Para posibilitar la identificación de las cantidades desconocidas, en los grafos los vértices claros vienen acompañados por una expresión verbal

Anexo 3.- Ejemplos de listado de producciones incorrectas

Problema: MECANOGRFA

Producciones incorrectas		1°	2°	3°
1	$p+2 = d-3$ $p+4 = d-5$	12	42	21
2	$x+2=-3y$ $x+4=-5y$	2	3	1
3	$x+2=3-y$ $x+4=5-y$	1	3	3
4	$x+2=3y$ $x+4=5y$	1	1	3
5	$x+2 \text{---} y-3$ $x+4 \text{---} y-5$ $(x+2)(x+4)=(y-3)(y-5)$	1	2	3
6	$x+2=3$ $x+4=5$	3	5	1
7	$(x+2)y = y-3$ $(x+4)y=y-5$		2	1
8	$x+2=3$ $y+4=5$		2	1
9	$\frac{x+2}{y-3} = \frac{x+4}{y-5}$	3		
10	$2x+4x=3x+5x$	3		
11	$2x=3y$ $4x=5y$ $2x+3y=4x+5y$	2		
12	$x+2=3-x$ $x+4=5-x$	2		
13	$2x+3=4x+5$	1		
14	$2x+4x=3+5$	1		
15	$x + \frac{x+2}{y-3} = x + \frac{x+4}{y-5}$	1		
16	$2+x \text{---} y-3$ $4+x \text{---} y-5$ $(y-3) = y(x+2)$ $x \text{---} y$ $(y-5) = y(x+4)$	1		
17	$2 \text{---} x+3$ $4 \text{---} x+5$ $2(x+5) = 4(x+3)$	1		

18	$x+2y=y-3$ $x+4y=y-5$		2	
19	$x+2x=3y$ $x+4x=5y$		2	
20	$x+2y=3$ $x+4y=5$		2	
21	$x-6=y$ $x-20=y$		1	
22	$x+2x=y-3y$ $x+4x=y-5y$		1	
23	$x+2=-3y+4=-5$		1	
24	$x-2=3$ $x-4=5$		1	
25	$x+2=x-3$ $x+4=x-5$		1	
26	$x+2x=3$ $x+4x=5$		1	
27	$y+2(x-3)=y+4(x-5)$		1	
28	$2+x \text{ --- } y-3$ $x+4 \text{ --- } y-5$ $x \text{ --- } y$ $x \text{ --- } y$ $x(y-3)=y(2+x)$			3
29	$(x+2)3=y-3$ $(x+4)5=y-5$			1
30	$y=(x+2)$ pg $día(y-3)$ $día=(x+4)(y-5)$			1
31	$\frac{x+2}{y} = y-3$ $\frac{x+4}{y} = y-5$			1
32	$\frac{2+x}{3} = \frac{4+x}{5}$ $\frac{2x}{3} + \frac{4+x}{5} = x$			1

#### Anexo 4.- Protocolo para el estudio de las producciones incorrectas

- A) Número de producciones incorrectas.
- B) Distribución porcentual de las producciones incorrectas.
- C) Número de producciones incorrectas encontradas en cada curso.
- D) Distribución del error en cursos.
- E) Producciones encontradas en tres, dos o un curso: Número de producciones y porcentaje del error que suponen esas producciones.  
Donde se trata de señalar las producciones incorrectas que se encuentran independientemente del curso al que pertenezca el estudiante. Esto es, las producciones que persisten aunque el estudiante avance en el currículo. El porcentaje del error trata de dar cuenta de su importancia.
- F) Distribución del error en cada uno de los cursos de las producciones encontradas en tres cursos.  
Donde se trata de dar cuenta del grado de persistencia del error.
- G) Diagnóstico y comentarios de los errores.

Anexo 5. Ejemplos de diagnósticos del error en el problema HENO

<p><b>3</b></p> $\frac{40}{x} + 100 = \frac{60}{x}$	<p>PI-3</p>	<p>Errores de inversión multiplicativo y Error de inversión aditivo</p>
<p><b>10</b></p> $\frac{x}{40} - 100 = 60$	<p>PI-10</p>	<p>Error de Igualdad</p>
<p><b>21</b></p> $x - 4000 = 60$	<p>PI-21</p>	<p>Error de Igualdad</p>
<p><b>23</b></p> $\frac{x}{40} 100 = \frac{x}{60}$	<p>PI-23</p>	<p>Error de operación</p>

En la tabla. La columna 1 muestra una producción incorrecta. La columna 2 la reconstrucción de dicha producción en el grafo del problema, los arcos gruesos o elipses indican errores. La columna 3 el diagnóstico del error en concordancia con el catálogo.