

SOBRE LA NOCIÓN DE LÍMITE EN LAS MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

SONSOLES BLÁZQUEZ

*Dpto. de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática
Facultad de Educación. Universidad de Valladolid*

Con este artículo se pretende dar un informe general del progreso de la investigación sobre la noción de límite en las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales (MACS), investigación que está en su fase terminal. Tras plantear el origen del problema de investigación y los antecedentes de la misma en el primer epígrafe, comentamos algunos aspectos metodológicos como son el carácter cualitativo y práctico de la investigación, que influye en el marco teórico considerado, los problemas de validación debidos a la elección de la muestra, y las herramientas utilizadas con las limitaciones a las que se hallaban sujetas. En el tercer epígrafe se exponen las elecciones didácticas de la secuencia construida en la investigación, tras explicar la concepción de límite como aproximación óptima en la que se basa la misma. Tras enunciar las hipótesis en el cuarto epígrafe, damos una visión global de la puesta en práctica de la secuencia didáctica durante tres cursos consecutivos y describimos cómo se ha llevado a cabo su análisis. Para terminar, en el último epígrafe adelantamos algunas aportaciones de la investigación y alguno de los problemas que han quedado abiertos.

1. ¿CÓMO SURGE EL PROBLEMA? LA DOCUMENTACIÓN.

La experiencia docente de los autores de esta investigación permitió constatar la dificultad que para los alumnos de Secundaria (e incluso para los alumnos de niveles superiores) tenía el concepto de límite, concepto que si duda constituye la base del Análisis Matemático. Coincidió esta inquietud con la promulgación de la Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo (L.O.G.S.E.), que proponía una reforma no sólo de contenidos, sino de metodología. Entre los contenidos del currículo de Bachillerato LOGSE se encuentran los tópicos de análisis (límite, continuidad, derivada, integral), vinculados con otros de la etapa previa, la Enseñanza Secundaria Obligatoria, como tendencias, continuidad (como propiedad global de una gráfica), tasa media de variación y cálculo de áreas. La metodología propuesta en este currículo da mayor

protagonismo al alumno y a la construcción del conocimiento. Así, nos planteamos elaborar una secuencia didáctica que pudiera ser capaz de detectar las dificultades propias del concepto y tenerlas en cuenta a la hora de construir un conocimiento significativo. El objetivo último era el de mejorar la enseñanza-aprendizaje del concepto dentro del marco curricular vigente.

La primera parte de la investigación fue básicamente una etapa de documentación, en la que se revisaron investigaciones sobre las dificultades del concepto de límite y de los conceptos matemáticos en general, investigaciones sobre las concepciones que los alumnos tienen del límite, trabajos sobre la enseñanza del concepto, y estudios o teorías sobre los procesos cognitivos en general. A la vez se llevó a cabo una revisión de los libros de texto existentes hasta ese momento, con el fin de estudiar cómo los equipos editoriales habían traducido a la práctica las indicaciones curriculares y se revisaron otros estudios que también realizaban un análisis de la situación del concepto de límite en los manuales.

Del análisis de los estudios sobre los procesos cognitivos surgió el marco teórico de la investigación, del que hablaremos más adelante. Las investigaciones sobre concepciones y dificultades del límite proporcionaron una base sobre la que diseñar los primeros materiales, que hubo que elaborar al ser todos los textos existentes hasta entonces (curso 1995-96) poco útiles para nuestras pretensiones.

De toda la documentación revisada, destacamos las investigaciones más relevantes que forman parte de los antecedentes de la tesis. Éstas son:

a) Los trabajos sobre concepciones en torno al límite de Tall y Vinner (1981), Cornu (1983), Williams (1991), Sánchez (1997) y Sierra, González y López (1998);

b) Los trabajos sobre dificultades de conceptos matemáticos de Macnab y Cummine (1992), sobre dificultades en el campo del análisis de Artigue (Artigue y otros, 1995), sobre obstáculos epistemológicos de Cornu (1983), Sierpinska (1985, 1987 y 1990) y Sánchez (1997);

c) Las investigaciones sobre el concepto de límite en los manuales de Sánchez (1997) y de Espinoza (1998);

d) Las secuencias didácticas o artículos sobre la enseñanza de límite de Robinet (1983), Tall y Schwarzenberger (1978), Berthelot y Berthelot (1983), Delgado (1995) y Espinoza (1998).

Las investigaciones de este último apartado proponían secuencias o indicaciones didácticas, pero ninguna tenía como marco el nuevo currículo ni la visión que queríamos dar del límite como aproximación óptima, noción que en principio nos parecía la más apropiada para este marco curricular. La revisión de estos antecedentes reforzó nuestro propósito de investigar la noción de límite en el aula de MACS.

2. ALGUNOS ASPECTOS DE LA INVESTIGACIÓN.

2.1. Una investigación eminentemente práctica y cualitativa. El marco teórico. El objetivo de la investigación es la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje del concepto de límite. La posibilidad de llevar a la práctica las ideas que surgieran en la investigación (la investigadora era profesora de Educación Secundaria), dio al aspecto práctico mayor peso que al teórico, de manera que ésta se centró en el diseño de una secuencia didáctica para la enseñanza-aprendizaje del límite, junto con un análisis de dicha secuencia. Se decidió hacer un análisis cualitativo de los datos que se obtuvieran, pensando que ese tipo de análisis aporta mayor información a la hora de rediseñar la secuencia.

Ahora bien, cualquier investigación práctica se ha de basar en ciertos constructos teóricos. La comprensión de conceptos como el de límite, que requieren procesos cognitivos de alto nivel, tiene una interpretación adecuada en el marco del Pensamiento Matemático Avanzado. En este marco, la teoría de obstáculos epistemológicos de Brousseau y la de la imagen y definición conceptual de Vinner y Tall explican parte del fracaso de los alumnos en tareas de alto nivel y forman parte del marco teórico de la investigación. Junto con estas teorías también se tienen en cuenta las aportaciones de Chevallard sobre la transposición didáctica (que explica la deformación que sufre un saber científico para adaptarse a la institución escolar), el análisis epistemológico de los conceptos que hace Sierpínska (1990) y la importancia que la representación de los conceptos tiene a la hora de su adquisición.

Además de los aspectos relacionados con el conocimiento, se llevó a cabo un análisis teórico del concepto que se pretendía transmitir. Este análisis contempla, por un lado, el desarrollo histórico del concepto, que da idea de su dificultad, de los problemas que lo han hecho surgir, y de las concepciones que subyacen en cada etapa. Por otro lado, se analiza la situación actual del concepto en el currículo y en los textos, análisis que comenzó en la etapa de documentación.

2.2. Elección de la muestra. Los problemas de validación.

Bajo el punto de vista de la Estadística, en toda investigación científica que pretende obtener resultados sobre una cierta población, la muestra sobre la que se

investiga realmente (en casi ningún caso se puede investigar a la población) se elige cuidadosamente, de forma aleatoria, de manera que la generalización de los resultados a la población se haga con determinada fiabilidad. Este método, por sí solo, dota de validez a la investigación. En las investigaciones como la que nos ocupa, en la que el investigador es también el profesor que va a desarrollar en el aula dicha investigación, la muestra no es seleccionada por el investigador, ya que la selección viene determinada por las circunstancias que rodean al profesor (ubicación de su trabajo, elección de asignaturas, posibilidad de continuidad, etc.). En nuestro caso, por una parte, el equipo tenía interés por investigar la noción de límite en las MACS (ya habían iniciado un estudio del concepto en forma numérica con anterioridad); por otra parte, la profesora tuvo la oportunidad de elegir, durante tres cursos consecutivos en el mismo centro, un grupo de alumnos de Bachillerato de Ciencias Sociales, a los que impartió MACS II. Esta coincidencia entre interés investigador y docencia hizo que la investigación se centrara en el concepto de límite vinculada al currículo de dicha asignatura.

La validez de una investigación en la que la muestra no es aleatoria debe garantizarse de otra manera, y la generalización de los resultados de la misma más allá del grupo o grupos en los que se lleva a cabo la experiencia puede ser problemática. En nuestro caso, la validez viene asegurada por el trabajo en equipo de especialistas y la saturación de la experiencia.

- **Equipo investigador:** tanto la investigadora como el director de la investigación son especialistas en didáctica de la matemática y ambos tienen amplia experiencia docente, tanto en Educación Secundaria como en Educación Universitaria. Además, diseñaron un modelo de actuación en el que se contrastaban tanto la planificación de la acción como las reflexiones sobre la misma, una vez llevada a cabo, con objeto de que la investigación no fuese sesgada.

- **Saturación de la experiencia:** la repetición de la experiencia con distintas muestras dota de mayor generalidad a la misma y sirve para confirmar o rechazar las hipótesis. La experiencia se implementó durante tres cursos consecutivos y la mayoría de las observaciones hechas en un curso se confirmaron en los cursos posteriores.

2.3. Las herramientas. Limitaciones.

En la investigación cualitativa que hemos llevado a cabo, el análisis de los datos se ha hecho en función de una serie de herramientas que recogen distintas visiones del proceso. Entre ellas hemos de destacar aquellas que se utilizan en investigaciones de aula:

- Las pruebas escritas, de cuestiones tipo test o de respuestas abiertas, de tareas o problemas para resolver, en las que los alumnos dan las correspondientes explicaciones o justificaciones. Son documentos muy fáciles de conseguir, pero en ocasiones no muestran toda la riqueza de pensamiento del alumno, ya que no es posible una interacción.

- Las grabaciones de los hechos a observar, en audio o en vídeo, suponen un documento fiel de lo ocurrido siempre que haya suficiente calidad de grabación y se capten los momentos deseados.

- Las entrevistas resultan ser una de las mejores herramientas de obtención de datos, puesto que permiten sacar a la luz concepciones y creencias ocultas, que los alumnos no expresan ni en las pruebas escritas ni en el diálogo pedagógico que se establece en el aula. Pero para que una entrevista sea un buen método de obtención de datos, el entrevistador debe ser hábil en el sentido de escoger buenas preguntas en cada momento (aunque la entrevista esté estructurada, siempre hay momentos de improvisación), y conseguir buenas respuestas sin influir en las mismas.

- Un observador externo es una herramienta útil como complemento, pues da una visión distinta a la del alumno o el investigador. Sin embargo, un buen observador es una persona entrenada en este aspecto, pero que además debe conocer y compartir muchos aspectos de la investigación, de hecho debería tomar parte en la misma.

- Las notas de campo constituyen otra herramienta complementaria, que sirve para anotar hechos ocurridos en el aula durante la implementación de la investigación.

Partiendo de las condiciones de esta investigación, donde el investigador principal es el profesor que desarrolla la experiencia en el aula, y sin posibilidad de que el director de la tesis o cualquier otro investigador que pudiera formar parte de la misma actuase como observador, se escogieron como herramientas todas las pruebas escritas de los alumnos (tareas, exámenes, apuntes), grabaciones en audio de las sesiones, entrevistas semiestructuradas a dos parejas de alumnos en el último ciclo y el cuaderno de aula del profesor. El trabajo que ha supuesto la utilización de grabaciones ha sido muy denso, ya que se han grabado todas las sesiones de trabajo en el aula de uno de los ciclos de la investigación, así como las entrevistas, y se han transcrito en su totalidad, lo que ha permitido al equipo investigador analizarlas con minuciosidad.

Como se puede observar, el hecho de que el investigador principal sea también el profesor que lleva a cabo la experiencia tiene ventajas evidentes (lleva a la práctica fielmente lo que ha diseñado), pero puede llevar consigo una serie de limitaciones, como por ejemplo, la dificultad para disponer de un observador, o la posibilidad de anotar las incidencias ocurridas en el aula en el momento en que surgen.

3. ¿QUÉ CONCEPTO DE LÍMITE Y POR QUÉ?

El problema central de esta investigación es, sin duda, en qué forma se debe de presentar el concepto de límite para que, por un lado, sea lo suficientemente simplificado para ser asequible a los alumnos de Secundaria y, por otro, sea lo suficientemente preciso para que cumpla su función instrumental como herramienta para la definición de otros conceptos, sin despojarle de su esencia y sus propiedades.

Una creencia generalizada de los profesores de matemáticas de Educación Secundaria, es que el excesivo formalismo de la enseñanza de las matemáticas en este nivel es inasequible para los alumnos, y lo achacan a que no han adquirido la madurez suficiente. Así, afirman que aunque un alumno sea capaz de reproducir la definición de límite, e incluso resolver ejercicios algorítmicos de cálculo, en casi ningún caso es capaz de explicar e ilustrar la definición, y mucho menos de utilizar el concepto en contextos distintos del cálculo algorítmico, lo que indica que ha aprendido dicha definición de memoria y, lo que es peor, no ha comprendido el concepto. El currículo propuesto por la L.O.G.S.E. intenta enmendar el excesivo formalismo que contempla la Ley General de Educación, y propone introducir los conceptos de una forma intuitiva y cercana a la realidad.

Hasta ahora la visión que hemos presentado aboga por la introducción de un concepto de límite intuitivo, y las presentaciones que se hacen en este sentido destacan la propiedad que tiene el límite de ser un número al que se aproximan las imágenes de una función, cuando los valores de la variable independiente se aproximan a su vez a otro número. Esta idea recoge, por una parte, la importancia que la comunidad matemática concede a los tópicos de estimación y aproximación, importancia que también se refleja en el currículo de Educación Secundaria y, por otra, vincula la idea de aproximación a cuestiones reales. La necesidad de vincular los conceptos con la realidad y con sus aplicaciones prácticas es la guía de nuestra presentación del límite.

La idea intuitiva de límite como aproximación, sin embargo, presenta un inconveniente grave, y es que el concepto se ha simplificado hasta tal punto que se le ha despojado de lo que diferencia un límite (que es único) de cualquier otra aproximación de las imágenes de la función (que son muchas), esto es, la propiedad de aproximarse con cualquier orden de precisión, tomando un entorno adecuado de valores de la variable independiente. Esto despoja al límite de la utilidad que tiene como vía para definir otros conceptos y, además, le priva de la mayoría de sus propiedades (como la unicidad). Para evitar este problema, sin perder la visión intuitiva, muchos autores optan

por presentar una idea subjetiva de límite, que es aquella en la que la precisión se deja en manos de la persona que lo utiliza, el límite es un valor al que se aproximan los valores de la función «tanto como se quiera» o «tan cerca como se quiera». Esta definición adolece de precisión, como apuntan Tall y Schwarzenberger (1978), puesto que no se establece que se pueda considerar cualquier error.

Así, llegamos al planteamiento de qué es lo que se puede destacar del concepto de límite, que lo pueda definir sin alejarse de la realidad y de la intuición, pero liberándolo de un formalismo excesivo, que sea útil como herramienta y que no abandone el campo de la aproximación. En nuestra elección se destaca el hecho de que el límite no es sólo una aproximación de las imágenes de la función (propiedad que tiene cualquier número), ni siquiera una aproximación que mejora en el sentido de disminución del error, al tomar las imágenes en un entorno adecuado. Así pues, siguiendo el pensamiento de Newton y D'Alembert, para nosotros el límite es la mejor de las aproximaciones, la aproximación óptima, puesto que cualquier otra aproximación del mismo, distinta del propio límite, se puede mejorar con las imágenes de los valores adecuados. Así, distinguimos entre los términos «aproximarse» y «tender». La aproximación se reconoce a través de la disminución del error, mientras que la tendencia requiere, además, que cualquier aproximación, distinta del valor al que se tiende, se pueda mejorar. Así, una función f tiene límite L en el punto a si cuando x tiende a a , siendo x distinto de a , entonces $f(x)$ tiende a L .

No cabe duda que el hecho de renunciar a la definición formal supone la pérdida de la dependencia $d(+e)$ (para ser justos hay que reconocer que ésta se expresa de forma explícita en un número muy reducido de casos). En este caso se incide menos, explícitamente, en el vínculo existente entre la tendencia a L y la tendencia a a , y la definición propuesta puede dar lugar a pensar que no existe relación entre ambas tendencias, por lo que no está de más poner de manifiesto esta relación ante los alumnos.

Para ser totalmente precisos deberíamos definir el límite L de una función en el punto a como aquel número L para el que escogida una aproximación distinta del mismo (o lo que es equivalente, una cota de error, un número positivo ϵ), existe otra aproximación de a (o lo que es equivalente, una cota de error, un número positivo δ) de manera que las imágenes de los valores que mejoran esta última aproximación y son distintos de ella (aquellos valores que cumplen $0 < |x-a| < \delta$) mejoran la aproximación de partida (cumplen $|f(x)-L| < \epsilon$). Ésta es, sin duda, una lectura distinta de la definición formal,

a la que se llega a través de la definición que hemos escogido, y que puede ser asequible para algunos alumnos. De esta manera se puede avanzar desde la idea más intuitiva a la más formal, pasando por la concepción que proponemos nosotros, sin dar un gran salto que las haga parecer visiones de conceptos totalmente diferentes.

La concepción de límite propuesta tiene las ventajas de la concepción intuitiva:

a) Es próxima a la realidad. De hecho se puede motivar la introducción del límite a través del paso de variaciones medias a variaciones instantáneas (las variaciones medias se aproximan cada vez más a ciertos valores, el mejor de ellos es lo que se define como variación instantánea) o en el estudio de fenómenos funcionales donde la función no está definida (se estudia en las proximidades y se escoge el mejor de los valores al que se aproximan).

b) Se trabaja el aspecto de la aproximación. El límite no es un número que cumple una rara propiedad (como les puede parecer a los alumnos la definición formal), sino algo vinculado con lo que habitualmente hacemos: estimar, aproximar. Es en el registro numérico donde se puede desarrollar mejor este aspecto y es este sistema de representación uno de los que los alumnos manejan habitualmente (más que el algebraico).

Pero, además, con la definición propuesta es posible demostrar las propiedades del límite de forma sencilla¹, con lo que éste no pierde su función instrumental.

A la hora de plantearse la mejora en la adquisición de un concepto matemático, hay que tener en cuenta que éste es mucho más que una definición formal. Todo concepto lleva asociado ciertas imágenes visuales, ciertos vínculos con otros conceptos y con el lenguaje habitual, diferentes propiedades en diferentes contextos, que pueden parecer intrínsecas al propio concepto, y, además, se puede expresar utilizando distintos sistemas de representación (gráfico, simbólico, numérico,...). Todo ello forma parte de una imagen conceptual (Tall y Vinner, 1981), que no siempre es coherente con la definición del concepto. Comprender el concepto no es únicamente comprender la definición, sino crear una imagen conceptual rica y coherente. Además, algunos investigadores (ver, por ejemplo, Brousseau, 1986) coinciden en señalar el fracaso de la presentación de los conceptos directamente a través de la definición, puesto que esta presentación ignora la génesis del concepto, lo presenta como algo acabado, y el alumno no siente la necesidad del mismo.

¹ Ver Blázquez y Ortega (1999)

Todo ello se tuvo en cuenta a la hora de planificar la secuencia de actuación.

Así:

a) El límite se introduce, en primer lugar, a través de un par de tareas de motivación que pretenden plantearle al alumno la necesidad de buscar una herramienta, distinta a las conocidas, para resolver los problemas que se les plantea.

b) Tras la motivación se define el límite, de forma gradual, comenzando con la idea intuitiva y basándose en los ejemplos contruidos, hasta llegar a la definición de límite como aproximación óptima e incluso, dando un paso más, hasta la definición formal.

c) La definición se ilustra numéricamente a través de otra tarea en la que el alumno descubre la propiedad que tiene el límite de mejorar cualquier aproximación en un caso particular. Pero también se ilustra gráficamente y en forma algebraica para enriquecer así la imagen del concepto.

d) Para afianzar el concepto se proponen, además, una serie de tareas que desarrollan las propiedades del mismo: ejemplos de funciones sin límite en un punto, unicidad, relación entre el signo de la función y el del límite, límites laterales y teorema de caracterización, teorema del encaje.

El límite funcional, entendido como límite finito en un punto, está relacionado con otro tipo de límites, los límites infinitos o en el infinito (tendencias funcionales o tendencias secuenciales) y, aunque matemáticamente se puedan definir de forma única, pensamos que ésta no es una buena elección didáctica, puesto que los límites finitos y las tendencias tienen problemáticas distintas y, por ello, se deben diferenciar claramente. La presentación escogida para ellos es sumamente intuitiva, distinguiendo entre un comportamiento de tendencia finita o de tendencia infinita de una variable (en forma gráfica y numérica), y combinando las distintas posibilidades de las dos variables en un cuadro. Un caso particular lo constituye el límite secuencial (límite en el infinito), por lo que el estudio de tendencias funcionales amplía este. Consideramos interesante un primer acercamiento al concepto a través del estudio de tendencias en sucesiones, puesto que se presenta así un caso sencillo de límite, que se ir completando poco a poco. Así, el caso de combinación de tendencias finitas no se contempla en el cuadro por ser esencialmente distinto (la gráfica no se «sale del papel» como en las tendencias funcionales, ni los valores que toma son valores excesivamente grandes o pequeños), y este hecho diferencia y relaciona a la vez ambos límites.

4. FORMULACIÓN DE HIPÓTESIS.

Basándonos en las exploraciones previas a la investigación, los supuestos teóricos considerados, la reflexión de los investigadores sobre el problema junto con su experiencia docente, y el estudio teórico, histórico y curricular, de la noción de límite, el trabajo de investigación se organizó en torno a las siguientes hipótesis:

- El concepto de límite lleva consigo graves dificultades de comprensión, sea cual sea la presentación que se haga. Conocer dichas dificultades, y las creencias que los alumnos tienen sobre el límite es una herramienta eficaz para su enseñanza.

- El tratamiento y estudio del límite secuencial en términos de tendencias mejora la comprensión del límite funcional y es útil para trabajar en otros tópicos.

- El tratamiento del límite finito en un punto como aproximación óptima, y no como simple aproximación o aproximación subjetiva, es una opción ventajosa a los tratamientos existentes en lo que se refiere a su utilidad como herramienta, y es una opción ventajosa a la definición formal por su simplicidad.

- Es conveniente discriminar los límites finitos en un punto del resto de los límites, puesto que se utilizan en situaciones muy distintas: el primero es la base de cuestiones sobre continuidad y derivabilidad, mientras que el segundo aparece en el estudio de ramas infinitas y asíntotas de funciones.

- La utilización de distintos registros (algebraico, numérico, gráfico, verbal) mejora la comprensión del concepto y la participación activa del alumno en la secuencia didáctica usando las nuevas tecnologías resulta más motivador y favorece la asimilación del concepto.

5. EL PROCESO DE LA INVESTIGACIÓN. METODOLOGÍA.

La investigación se ha desarrollado durante tres cursos académicos consecutivos, en los que se ha implementado una secuencia didáctica, que se ha ido reformulando después de analizar los datos recogidos en cada uno de los cursos anteriores y hacer la correspondiente reflexión. La metodología más adecuada, teniendo en cuenta esta dinámica, es la de investigación-acción, dividida en tres ciclos que se corresponden con cada uno de los cursos académicos, metodología que ya se estaba utilizando en otra investigación del departamento (Cubillo 1997).

El primero de los ciclos de nuestra investigación parte de un planteamiento del problema surgido de la experiencia docente del equipo investigador y del análisis de otras investigaciones, en el que se constataba la dificultad del concepto y el fracaso de

su enseñanza. En la planificación se diseña una secuencia didáctica, basada en las observaciones del epígrafe anterior y en las hipótesis de la investigación, y una serie de categorías para analizarla. La implementación se lleva a cabo durante un trimestre de un curso de MACS II, y la observación se hace a través de algunas grabaciones en audio, los materiales de los alumnos y las notas del profesor. La reflexión sobre la acción de este primer ciclo lleva a una modificación de las categorías, junto con un reformulación de la secuencia en la planificación del ciclo siguiente.

Tras la actualización de materiales y categorías, de nuevo se implementa la secuencia. La observación se basa en esta ocasión en las grabaciones en audio realizadas durante todas las sesiones y en las tareas de los alumnos. Tras el análisis de los datos recogidos, la reflexión de este ciclo lleva a confirmar y ampliar las reflexiones del ciclo anterior.

A partir de esta reflexión se planificó un nuevo ciclo cuyo fin era el de validar las afirmaciones de los ciclos anteriores y obtener más datos sobre algunos aspectos. Al final de este ciclo se planificaron y se realizaron una serie de entrevistas, con el fin de clarificar el pensamiento de los alumnos sobre las cuestiones clave desarrolladas en las tareas sobre el límite funcional, y profundizar así en esa parte de la secuencia. Para elaborar la entrevista se analizaron dichas tareas estableciendo los actos de comprensión (Sierpinski, 1990) necesarios para llegar al objetivo de cada tarea, y se elaboraron una serie de preguntas en torno a ellos, que se plantearon a dos parejas de alumnos. Las entrevistas confirmaron las dificultades y obstáculos detectados en la secuencia y pusieron de manifiesto la importancia de una construcción del conocimiento donde el profesor tiene un papel básico.

Para el análisis de la secuencia se ha utilizado un sistema de categorías, que se basa en los modelos de Castro (1994), Romero (1995) y Cubillo (1997), y consta de tres grupos de categorías según el tipo de interacción que se analiza. El primero de ellos, formado por las categorías de contenido matemático para el límite, controla la relación del profesor con el contenido, recogiendo los tópicos que forman parte del campo conceptual del límite: contenidos sobre números y aproximación, sobre procesos infinitos, sobre funciones, sobre límite secuencial y sobre límite funcional finito e infinito. Estas categorías se han utilizado en la investigación para analizar el currículo y los libros de texto, y también para guiar la planificación de la secuencia.

El análisis de los textos se basó en la observación de la presencia o no de las categorías de contenido matemático en cuatro manuales de MACS II (aquellos de los

que conocíamos su publicación) y siete de MACS I (los cuatro correspondientes a las editoriales consideradas en MACS II y una selección de tres textos más) del período 1996-1998. Se comparó esta distribución de contenidos, hecha por las distintas editoriales, con una propuesta de distribución de las categorías en las dos asignaturas citadas que los autores construyeron tomando como referencia el currículo y las relaciones entre los componentes del campo conceptual del límite. Se observó la adaptación de estos textos al currículo, ya que la mayoría no trabajan contenidos sobre sucesiones y límite secuencial, o trabajan los contenidos sobre aproximación en primer curso -hay que señalar, además, que el tratamiento de los tópicos de aproximación es deficiente para trabajar la noción de límite-, pero también se observó una cierta inercia, ya que no aparecen cuestiones como los cambios de sistemas de representación, que sí se recogen en el currículo, y se sigue introduciendo el límite funcional en primer curso, pese a que el currículo lo pospone para segundo y deja en el primer curso el estudio de tendencias funcionales. Muchos de estos textos no fomentan una práctica educativa helicoidal puesto que repiten contenidos en ambos cursos, lo que no permite profundizar en ellos. El tratamiento del límite que se hace es inadecuado ya que, por un lado, carece de motivación real con lo que los alumnos no ven la necesidad de construir tal concepto y, por otro, se introduce bien de forma intuitiva, como simple aproximación, o bien a través de la definición formal. Además la presentación que hacen está desvinculada de las sucesiones y tendencias funcionales y falta coherencia con otros componentes del campo conceptual del límite.

El segundo grupo de categorías para el análisis, formado por las categorías de interacción didáctica, controla la relación profesor-alumno en el aula. Se han dividido: según su finalidad en categorías de gestión de aula o de adquisición de contenidos; según la fase del proceso de enseñanza-aprendizaje en categorías de presentación, de desarrollo, de sistematización o de socialización; y, según el actor, en categorías del profesor o del alumno. Una vez diseñadas las categorías, el análisis de la interacción se ha hecho a través de las transcripciones, codificadas según las mismas. Basándose en un simple recuento de las categorías se está haciendo un estudio estadístico elemental en el que ya se puede observar que, en el aula, la interacción se produce básicamente a través de las explicaciones y preguntas del profesor, de las respuestas de los alumnos a las preguntas de éste, y de las preguntas que a su vez hacen los alumnos. También se está llevando a cabo un análisis de correspondencias para buscar similitudes entre las categorías.

El tercer grupo de categorías controla la relación de los alumnos con el contenido, son las categorías de comprensión matemática, que se adaptan a la secuencia diseñada en la investigación. Están diseñadas como cuestiones que se proponen a los alumnos a través de tareas, junto con distintos niveles de respuesta ordenados según el grado de comprensión. Contemplan diversos aspectos: aplicaciones, explicativo - conceptual, aspectos numérico, gráfico, y algebraico, caracterización lateral, signo de la función, teorema de existencia y unicidad y, por último, teorema del encaje. El análisis de las mismas se hace basándose en los porcentajes de respuesta de cada nivel, y se ilustran gráficamente utilizando polígonos de frecuencias que reflejan los porcentajes en cada nivel de la correspondiente categoría. Para ilustrar este procedimiento se presenta un resumen del análisis correspondiente a la categoría INL - ilustración numérica de límite de una función en un punto-, para la que se han considerado los siguientes niveles de respuesta:

INL1: Lo ilustran correctamente por medio de una tabla bien construida.

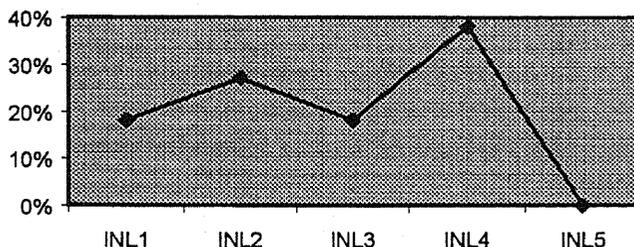
INL2: Ilustran tendencias infinitas.

INL3: Interpretan por separado las tendencias de x y de $f(x)$ o se fijan solamente en una de ellas.

INL4: Construyen una tabla poco ilustrativa.

INL5: No contestan.

Se hace un recuento estadístico de las respuestas emitidas por los alumnos del primer ciclo, cuya representación gráfica se presenta en la figura 1. Una simple ojeada a la gráfica nos permite afirmar que el problema de la esta ilustración del concepto de límite se encuentra, sobre todo, en las dificultades de índole numérica, como es la elaboración de una tabla con valores poco adecuados, y en la confusión entre límite y tendencia infinita.



Las reflexiones obtenidas en cada ciclo se han basado no sólo en el análisis de las categorías, sino en la lectura minuciosa de las transcripciones de sesiones y entrevistas, así como de los trabajos de los alumnos.

A continuación se presentan algunas de las reflexiones:

a) Las graves dificultades que tienen los alumnos con los tópicos de aproximación, que impiden la correcta asimilación del límite como aproximación óptima. Este es un problema de tipo didáctico que se deriva del poco énfasis que se ha dado al ámbito de la aproximación y de la estimación en la enseñanza anterior a la LOGSE. Los alumnos no están acostumbrados a buscar aproximaciones, calcular errores y utilizar éstos para mejorar la aproximación buscada, tienen problemas con la densidad de los números racionales y no los manejan con fluidez, ni en lo que se refiere a los cambios de sistemas de representación, ni al orden, ni siquiera a las aproximaciones. Esta dificultad se acentúa cuando trabajan con números irracionales.

b) Se constata la dificultad que los alumnos tienen para trabajar en el registro algebraico, siendo mucho más asequible para ellos el numérico y el gráfico, aunque éstos no estén exentos de problemas. Son tantas las dificultades en el manejo de expresiones algebraicas que, en la mayoría de las tareas diseñadas en este registro, el objetivo de la tarea resulta inalcanzable para ellos, porque se pierden en la manipulación simbólica. Ni que decir tiene lo inalcanzable que resulta la definición formal del límite.

c) El tratamiento que ha recibido la noción de función en la enseñanza anterior a la LOGSE no es ni mucho menos el adecuado para asegurar la comprensión de los conceptos de análisis y, sobre todo, su aplicabilidad. Los alumnos no están habituados a traducir situaciones reales a modelos funcionales ni a interpretar éstos y, además, tienen una visión limitada de lo que es una función, visión que se reduce a unas cuantas funciones elementales. Esto impide que el límite se pueda introducir a través de situaciones motivadoras en las que vean su necesidad. La falta de aceptación de las funciones discontinuas como una función única impide que se pueda trabajar las tendencias infinitas o la existencia de funciones sin límite. La visión global que se suele dar de la gráfica de una función dificulta el estudio de propiedades locales como los extremos relativos o las tendencias.

d) Se ha detectado como un obstáculo extremadamente resistente la identificación de límite y valor de la función en el punto (de hecho el límite se introducía en la motivación para resolver el problema de aquellas funciones que no estaban definidas en el punto de interés). Esta concepción funciona muy bien a la hora de trabajar las

propiedades porque el límite se comporta como el “valor ideal” de la función en el punto, de ahí su resistencia. Sin embargo, es incoherente con la concepción que tienen los alumnos de que aproximación e igualdad son cosas distintas (el límite no se alcanza, la función no puede cortar a la asíntota).

e) Una de las nociones que más problemas han generado durante la puesta en práctica de la secuencia es la de indeterminación. Conscientes de que definir una aritmética con tendencias, que amplíe a la aritmética con números que los alumnos conocen, iba a ser una cuestión delicada; este aspecto se trató con sumo detalle, lo que no evitó que apareciera la identificación de indeterminación como no existencia de límite o imposibilidad de calcularlo.

f) Los cambios de sistema de representación suponen un esfuerzo considerable para el alumno, aunque enriquecen mucho más la imagen conceptual. Ejemplos surgidos en la experiencia son la desvinculación entre tendencia y asíntota (una supone una aproximación numérica de las imágenes de la función al límite y la otra una aproximación geométrica de la función a la recta), o la dificultad para traducir la definición dada en forma numérica al registro gráfico. Ocurre algo similar con la inexistencia de límite, que supone una dificultad mucho mayor para los alumnos que el propio concepto, pero que ayuda a la comprensión y afianzamiento del mismo.

g) El lenguaje habitual es uno de los mayores obstáculos que surgen al trabajar con el concepto de límite. Los términos de tendencia, límite, aproximación, indeterminación, etc., son términos que tienen un significado en el lenguaje habitual, significado que los alumnos incluyen como parte de la imagen del concepto, acudiendo a ella en múltiples ocasiones. De hecho, el empleo de la palabra tendencia hace que la definición sugiera excesivo dinamismo, que muchos de los alumnos convierte en un movimiento por los ejes de coordenadas.

h) El tratamiento que la LOGSE da a las sucesiones no es el adecuado puesto que no aparecen de forma explícita y, sin embargo, modelizan muchas situaciones reales. También es positiva la introducción del límite secuencial y su cálculo pues facilita el estudio de tendencias funcionales y el límite. Hay que señalar, sin embargo, que el tratamiento ha de ser cuidadoso para evitar que las visiones discreta y continua del mismo proceso no se perciban como conceptos desvinculados entre sí, como ocurría en la secuencia.

6. APORTACIONES DE LA INVESTIGACIÓN. PROBLEMAS ABIERTOS.

A falta de la reflexión final, fruto de cotejar las reflexiones de los ciclos con las hipótesis de la investigación, expondremos aquí aquello que consideramos puede ser útil para otras investigaciones de índole práctica, ya sean sobre el límite o sobre cualquier otro concepto matemático.

En primer lugar, el sistema de categorías mencionado en el epígrafe anterior constituye una herramienta para el análisis de secuencias didácticas y materiales (por ejemplo, las categorías de contenido matemático se pueden utilizar en el análisis de libros de texto), una vez adaptadas al tópico que se pretende transmitir y a la metodología de aula que se vaya a utilizar. Las categorías de interacción didáctica se pueden utilizar para analizar interacciones en el aula cuando la metodología es similar a la utilizada en la puesta en práctica de la secuencia. Ésta consiste en que los alumnos trabajen, en casa o en el aula, ciertas tareas, que se ponen en común en el aula antes de introducir las ideas clave.

Otro aporte de la investigación lo constituyen los materiales. Por un lado, las transcripciones de las sesiones y de las entrevistas realizadas a los alumnos, que permiten hacer otros tipos de análisis de la secuencia (otras interpretaciones, profundizaciones), del pensamiento del alumno, o incluso de las estrategias del profesor. Por otro lado, los materiales creados para desarrollar la secuencia son, sin duda, una contribución para el desarrollo de otros materiales didácticos para introducir el concepto de límite en secundaria (enfocado sobre todo a los bachilleratos donde la orientación es la de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales). Los materiales trabajan tres tópicos relacionados con el límite: sucesiones y límite secuencial, tendencias funcionales y, por último, el concepto de límite y sus propiedades. Constan de una serie de tareas para el alumno, junto con la corrección de las mismas y guiones para la discusión de los conceptos clave y en su elaboración se han tenido en cuenta las dificultades de los alumnos.

El análisis cualitativo de la secuencia nos ha permitido detectar multitud de obstáculos y dificultades de aprendizaje relacionados con nuestra presentación del límite. Muchos de ellos ya han sido señalados por autores como Cornu (1983) o Sierpinska (1985), y son propios del concepto en sí, mientras que otros están vinculados a cuestiones de aproximación, cambios de registro y otras cuestiones relacionadas con la enseñanza previa o a la propia secuencia desarrollada. El conocimiento de las dificultades que han de superar los alumnos contribuye al buen uso de los materiales.

Los materiales se han diseñado utilizando un punto de vista distinto sobre la enseñanza del límite, basado en la idea de aproximación, a caballo entre la intuición y el formalismo y, por tanto más próximo al espíritu de la reforma educativa. El análisis del concepto en el marco de la reforma es otra de las contribuciones de la investigación.

Aunque el trabajo no esté concluido se pueden proponer ya algunos problemas que han quedado abiertos:

a) *Aplicación del concepto de límite a la derivada y la integral.* La investigación ha desarrollado el concepto de límite, secuencial y funcional, junto con sus propiedades, pero debido a problemas de implementación, (sobre todo a la falta de tiempo), no se ha podido experimentar lo suficiente con la aplicabilidad de este concepto a la derivada y la integral.

b) *Influencia de la edad en el aprendizaje.* Aunque en un principio la investigación se planificó teniendo en cuenta la edad, de manera que uno de los objetivos consistía en estudiar hasta qué punto la edad influye en el aprendizaje del concepto de límite, e incluso se elaboraron materiales para trabajar algunos aspectos relacionados con números, aproximación y tendencias secuenciales en 4º de Educación Secundaria Obligatoria, se tuvo que abandonar para poder centrarse en 2º de Bachillerato, donde aparece el concepto de forma explícita.

c) Aunque la investigación se ha centrado en MACS, sería también interesante hacer un estudio paralelo con las Matemáticas I y II, planteando qué concepto de límite conviene enseñar y cómo hacerlo. También en las matemáticas universitarias, donde es necesario un concepto de límite aplicable al campo de estudio y no sólo una definición, tiene cabida una concepción de límite como aproximación óptima y una secuencia constructiva de aprendizaje.

BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

- Artigue, M; Douady, R; Moreno, L y Gómez, P (Editor). 1995. *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Grupo Editorial Iberoamericana. Bogotá.
- Berthelot, R y Berthelot, C. 1983. *Études en Didactique des Mathématiques. Quelques apports de la théorie des situations á l'étude de l'introduction de la notion de limite en classe première*. A. Bordeaux: Université de Bordeaux I.
- Blázquez, S. y Ortega, T. 1999. *Didáctica del Análisis en las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales*. En Ortega, T (Editor) Temas controvertidos en Educación Matemática. SAE de la Universidad de Valladolid.
- Brousseau, G. 1986. *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2): 33-115.
- Castro, E. 1994. *Exploración de patrones numéricos mediante Configuraciones Puntuales*. Estudio con escolares de Primer Ciclo de Secundaria (12-14 años). Departamento de didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Castro, E. y Castro, E. 1997. *Representaciones y modelización*. En Rico (Coord.) La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria. ICE de la Universidad de Barcelona y Editorial Horsori.
- Chevallard, Y. 1991. *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigner*, La Pense, Sauvage Editions.
- Cornu, B. 1983. *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles*. Grenoble: Université, I de Grenoble. (Thèse de 3ème cycle, Mathématiques).
- Cubillo, C. 1997. *Un estudio sobre las potencialidades que genera en alumnos de secundaria el modelo de gestión mental aplicado a las fracciones*. Tesis Doctoral. Dpto. de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática. Universidad de Valladolid.
- Delgado, C. 1995. *Estudio de la evolución de los esquemas conceptuales de alumnos universitarios en su proceso de aprendizaje de los conceptos de límite y continuidad*. Tesina del Dpto. de Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias Experimentales. Universidad Autónoma de Barcelona.
- Espinoza, L. 1998. *Organizaciones matemáticas y didácticas entorno al objeto límite de función. Del pensamiento del profesor a la gestión de los momentos del estudio*. Tesis doctoral. Dpto. de didáctica de las matemáticas y las ciencias experimentales. Universidad Autónoma de Barcelona.
- Macnab, D. y Cummine, J. 1992. *La enseñanza de las matemáticas de 11 a 16. Un enfoque centrado en la dificultad*. Visor.
- Robinet, J. 1983. *Un experience d'ingenierie didactique sur la notion de limite de fonction. Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(3): 223-292.
- Romero, I. 1995. *La introducción del número real en Educación Secundaria*. Tesis doctoral. Dpto. de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Sánchez, C. 1997. *Estudio estadístico sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la noción de límite de una función*. Tesis doctoral. Dpto. de Estadística e Investigación Operativa. Universidad de Granada.