

EXPLORACIÓN DE PATRONES NUMÉRICOS MEDIANTE CONFIGURACIONES PUNTUALES

JOAQUÍN GIMÉNEZ

*Dept. Did. CC Experimentals y Matemàtiques
Universitat de Barcelona*

1. ELEMENTOS GENERALES PARA EL RECUERDO

La tesis describe un desarrollo innovador de trabajo matemático en un aula de 12-14 años centrando el foco de atención en la interpretación de representaciones numéricas diferentes en el estudio de sucesiones numéricas.

Se parte de que en base a las funciones cognitivas de los números naturales uno de los tipos de actividades a realizar es representar y analizar, como respuesta a ¿cuál es la cantidad? ¿qué estructura tiene? Por ello se plantea tres frentes:

En cuanto al Contenido. (a) delimitar la potencialidad del sistema simbólico de las configuraciones puntuales resaltando aquellos aspectos conceptuales y procedimentales que ponen de manifiesto frente otros sistemas simbólicos usuales; (b) precisar los sistemas de traducción ; (c) reconocer, en suma, la funcionalidad del sistema.

A nivel curricular. Análisis de las relaciones P-A, P-D, A-D (Profesor-Alumno Disciplina). Estudiar la Comprensión de los escolares, dinámica de trabajo y categorías del sistema curricular.

A nivel metodológico: Análisis adecuado del proceso, dominio conseguido, organización y sistematización de una secuencia de enseñanza-aprendizaje (e-a) basada en el uso de un sistema figurativo y el análisis de su uso como: (a) fuente de patrones y modelos, visualizar conceptos y relaciones, (c) establecer conjeturas, generalizar relaciones, (d) representar y resolver problemas.

Se propone también: estudiar y clasificar los procedimientos usados por el alumnado, así como las relaciones existentes entre el uso de procedimientos algebraicos, analíticos o visuales.

La autora basa el trabajo en un triple cuadro de referencia conceptual en base a los tres frentes mencionados: estructuras matemáticas (Reinhardt y Soeder 1984) modelos y representaciones (Fischbein 1977, Hiebert y Carpenter 1992...) y traslaciones entre ellas (Lesh 1987); símbolos (Newell 1990); patrones (Steen 1988, Rucker 1987), visualización (Zimmerman y Cunningham 1991); sistema simbólico de configuraciones puntuales (Beiler 1966) investigación/acción.

En lo conceptual se basa en el hecho de que hay números que sirven de base para analizar los números figurados planos (Olson y otros 1983) y el trabajo cita la falta de estudios sistemáticos sobre la virtualidad de la comprensión visual para los conceptos numéricos (Glaquinto 1993) .

2. UNA LECTURA DE LOS APORTES DE LA TESIS DESDE SU MOMENTO

Se realiza dicha lectura en base a dos preguntas que se responderán a continuación:

¿Qué aspectos son relevantes desde el punto de vista de la investigación?

- La originalidad del propio *tema*: escogido. La reflexión sobre cuestiones discretas claramente desubicadas en los currículos. Así, se analiza un aspecto sumamente concreto como es la identificación de acciones implicadas en el reconocimiento de configuraciones puntuales.

- Indicación (no explícita) de la *visión multifacetal del contenido numérico* (visión geométrica, funcional, secuencial, iterativa-recursiva, algébrica). Ello ha permitido una Metodología fina de análisis respecto los elementos de contenido MATEMÁTICO basada en una buena estructura, que se mantiene fiel en todo el trabajo.

Sorprende que no se trate la representación paralelogramo además de rectángulo.

- *Desarrollo metodológico*. Reconocimiento y análisis pormenorizado de materiales sobre el tema y tratamiento que refleja el desarrollo de una acción docente.

Diseño claro y preciso con fases magníficamente descritas

Caracterización sistemática constante de regularidades observadas

Desarrollo de tareas accesible, adecuadas y analizables.

- *Revitalización de resultados conocidos* en las investigaciones sobre el pensamiento numérico con un tratamiento distinto. Así, resaltamos:

Presentación del dominio de la estructura aditiva sobre la multiplicativa

Análisis de las secuencias numéricas desde una perspectiva icónica puntual. Integración de aspectos como secuencialidad, recurrencia, e iterabilidad.

- Un planteamiento atrevido para llamarse como *investigación-acción* con intervención y análisis empírico del tratamiento del contenido con base en las técnicas de análisis de errores de los 80, y reconocimiento de interacciones. Quizás porque en aquel momento no había un cuadro teórico más específico para este tipo de desarrollo.

¿En qué sentido eran aplicables los resultados para el profesorado y los procesos de formación ? ¿Cuál es el grado de generabilidad y aprovechamiento de las tareas fuera del contexto de la investigación?

- Considero que muchos aspectos como la organización y estructura numérica podían verse revalorizados a partir de este trabajo. Gran cantidad de comentarios en los análisis de las tareas que abren perspectivas importantes respecto el contenido aritmético de las llamadas “estructuras numéricas elementales”.

Con todo, la tesis no ha considerado los cuadros más amplios como: bases para el desarrollo de estrategias (Bell 1976, 1981); idea de sentido numérico (Reys y Sowder 1992) y los resultados conocidos en la idea de “unitización” (Behr y otros 1992) que se relacionan muy íntimamente con los del estudio.

- Valoramos el desarrollo didáctico concreto de una secuencia de lecciones que permiten alcanzar buenos resultados. Asimismo es loable el énfasis en tratar de que se den preguntas abiertas. Aunque reconocemos la dificultad que hubiera entrañado pedir al alumnado más de un desarrollo en algunos momentos más, nos parecía necesario en algunas otras tareas como la 7.1.

- Las implicaciones de los resultados parecen pobres respecto las expectativas iniciales. Se esperaba algo sobre cómo el sistema de configuraciones puntuales puede ayudar a la comprensión de situaciones con sucesiones. Si bien no se había planteado como objetivo, los datos deberían haber dado oportunidad a responder algo más que simples indicaciones.

3. ANÁLISIS CRÍTICO ACTUAL DE ALGUNOS ELEMENTOS DE LA TESIS.

Consideraremos diversos aspectos:

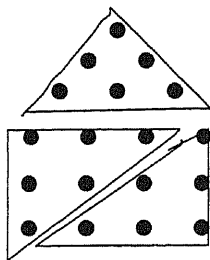
– TRATAMIENTO DE INTERACCIONES.

Consideramos que es uno de los tratamientos débiles del trabajo. Se incluyen en el trabajo 8 categorías que se basan en un diseño verbal de tipo comunicativo

funcional excesivamente estático. El desarrollo presentado indica ya una debilidad en los elementos reflexivos en tareas avanzadas del estudio.

No se incorpora en el trabajo una reflexión sobre lo que ahora se llama incorporación de normas sociomatemáticas (Yackel, Cobb, Preesmeg...). Si bien no era objetivo del estudio, este tipo de análisis permitiría superar el carácter estático del «desarrollo de las sesiones» y permite ver el papel que juega la negociación en el desempeño de este tipo de tareas. En efecto el docente «siente la necesidad de negociar los términos verbales (en la 1.ª sesión: pg. 125) indicando que los modelos «sean fáciles de ver».

Un problema didáctico importante es dilucidar el papel de aceptación de las consignas y la incorporación de las mismas. Así, por ej. en la tarea 19, por qué no se "hace lo que se manda"



Parece que la figura es lo que se pide, y de aquí se ve que se trata de 3 veces un número triangular. Según se ve del estudio lo hacen, pero no se dice nada de los 3 que han "interpretado" mal la consigna e indican simplemente 3T.

Un elemento que ejemplificaría la adaptación a la aceptación de códigos representativos asociados a consignas se da en los resúmenes, cuando se ve en la descripción de pag. 269 que hacen falta 13 tareas para lograr la distinción término general - lugar que ocupa y la consiguiente diferencia entre a_n y n . Esta "relectura" de los comentarios puntuales hubiera sido importante.

En los análisis de las fases de observación (apartado 3.4.1.), el hecho de que no se incluya una reflexión sobre cómo el docente ve el desarrollo reduce la investigación a un reflejo del punto de vista de la investigadora y desaparece uno de los elementos importantes de la investigación-acción en sentido estricto.

– EL PAPEL DE LA INTERPRETACIÓN

En diversos momentos se acude a la interpretación para descargar la problemática del alumnado. Se interpreta cuando «se traduce entre diversos sistemas de representación».

Los análisis semióticos más pormenorizados permiten reconocer otros sistemas de categorías y seguramente no sólo «decir lo que ha ocurrido « sino ver qué influencia puede tener sobre el desarrollo del trabajo. Le dedicaremos un apartado especial a este aspecto.

Se reflejan bien los problemas de secuencialidad del alumnado «distinción entre prototipo (un elemento escogido) y general (uno cualquiera), problemas de la propia generabilidad (término de una sucesión, variable que indica lugar que ocupa), y se colocan en un mismo saco con argumentativas dadas sobre el sentido algébrico (afianzamiento en el campo de significado del modelo «por filas» frente a la interpretación de la expresión como funcional respecto al término). Se describen los aspectos citados pero no se enmarcan en una reflexión más general. Por ejemplo, no se comparan resultados de tareas 7.1. y 7.2. y se percibe la ausencia de una entrevista con el alumnado sobre sus desarrollos. En la tarea 7.2. se dan desarrollos de la configuración en más de dos sumandos , mientras que en la 1ª no. ¿Por qué? Es importante. El alumno 17 mantiene “continuidad” en la búsqueda de un elemento repetido y el hecho de “no dar una regularidad común a todos los casos”.

Si interpretación es traducción, ¿por qué centrarse en el uso de los códigos representacionales y no se profundiza en su significado cuando en algún momento se hacen intentos de ello? Por ejemplo -refiriéndose a la tarea 7.1. se dice en pg 266 “...por agregado de cuatro puntos que *coincide con el primer término*”. Esta última reflexión es importante y debería haber un análisis en base a ese tipo de reflexión, porque puede corresponder a “tipos de visualización” (en el sentido de Van Hiele o incluso en la interpretación de Fischbein) que permitiría un perfil semántico (en el sentido de Bliss): (a) búsqueda de agregación constante o no , tratando de reproducir el primer término o no, tratando de identificar la agregación visualmente o no (b) búsqueda de término general por identificación visual o no, (c) reconocimiento iterativo con imagen visual o no etc.

Las llamadas interpretaciones distintas -véase el ej. en la tarea 6 (con resultados resumidos en pg 264)- se describen mediante expresiones simbólicas $n+n$, $2n$ o $2+...+2$. ¿En qué sentido se trata de una interpretación asociada a la diferencia constante

o bien refleja la fórmula general en función del término n ? En qué sentido esa traducción de la configuración puntual está reflejando un contenido funcional o algébrico, secuencial o iterativo "per se" en ese problema. No es suficiente decir "ningún alumno ha utilizado una fórmula recurrente". Otros estudios han visto ya el comportamiento con sucesiones aritméticas y se sabe del dominio de la linealidad sobre la situación de tipo "afín". Debería verse la estabilidad o reconocimiento en las diversas situaciones de reconocimiento del estudio.

El papel de los sistemas de signos en relación con aspectos del contenido matemático queda sólo abierta. Muy buen comentario en las conclusiones del trabajo con alumnado : «las limitaciones que presentan los sistemas simbólicos para la idea de término general» no se ven acompañados de los que corresponden a las propias configuraciones puntuales. Faltan más comentarios de ese tipo.

Se podría pensar que el descubrimiento de la estructura de la secuencia puntual de números pares, se debe a la facilidad de la relación doble que ha sido explicitada en múltiples trabajos (Hiebert...)? Es cierto que ¿Las interpretaciones iterativas se postponen a las secuenciales -funcionales, y emergen cuando éstas no se producen inmediatamente? Estas serían buenas preguntas. Hablar de "desarrollo numérico" ahora no es adecuado. Sugiere que es "otra cosa" distinta al número y no es más que otra forma de representarlo. Si bien no se influye en ningún momento a unas operaciones determinadas pensamos que la escritura verbal es más adecuada a lo que se pretendía en el fondo : decribir lo que se hace.

– EL ASPECTO ALGÉBRICO

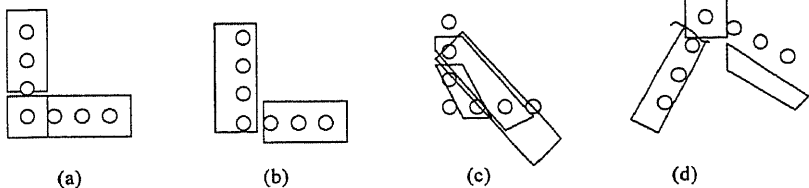
¿Hasta qué punto no es importante mencionar que las propias configuraciones reflejan falta de reconocimiento de que las "posibles" imágenes visuales diferentes dan lugar a estructuras diferentes (mirar por filas de arriba hacia abajo, de abajo arriba, mirar de forma inclinada de izquierda a derecha, mirar de forma iterada buscando el término anterior o buscando el primero repetido). En ese sentido el hecho de que "nadie describe una secuencia del tipo $n+(n+1)$ y si al revés, dice que la distribución vertical arriba-abajo es totalmente dominante. No se reproducen estructuras de más de dos sumandos. Nadie hace $1+2, 1+2+2, 1+2+2+2...ni 3, 3+2, 3+3+1, 3+3+3...$). La descripción del alumno 17 (pag 218) parece que trate de "ver el elemento 3 aunque sea a partir del término quinto" y por lo tanto $3, 2+3, 4+3...$ y cuando llega a alguno especial como 15, lo escribe de otra manera. Es distinto al del alumno 8 que parece que no ha reconocido la consigna. Por qué se dice el la tesis que esos alumnos "no han realizado un desarrollo de acuerdo con la representación"?

Se podría hablar aplicado la idea de los distintos significados de los símbolos de Arcavi (1995). Veámoslo en el ejemplo de la tarea 7: El hecho de que nadie habla de $2n + 1$ (en el sentido que cada término es un par de puntos inclinados hacia la izquierda y uno suelto) puede querer decir que "el campo de significado visual está dominado por los prototipos y no se reconocerá fácilmente la transformación algébrica $n+(n+1) = (n+1)+n = 2n + 1$. Los resultados muestran la "no espontaneidad de estas observaciones y, por lo tanto, la dificultad consiguiente.

– VISUALIZACIÓN Y SEMIOSIS

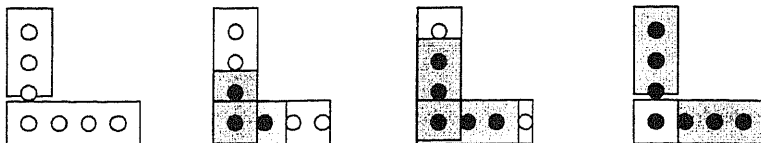
La insistencia mayor en reconocer el paso de desarrollo numérico a la representación verbal, hace que se diluya el paso contrario que parecía el prioritario. No es lo mismo "una suma de varios sumandos se traduce como un agrupamiento de líneas..." (pag 272) que decir "los esquemas puntuales compactos no figurativos (forma de L, de T, etc) se tienden a interpretar como adiciones y así se ha percibido en situaciones en que las sucesiones de las diversas líneas guardan una relación sencilla (la fila de arriba tiene uno más que la de abajo, o siempre dos más...).

Se podría reconocer ahora aspectos de "significado" asociado a lo puntual desde un punto de vista semiótico siguiendo a Duval (en la línea de la autora) y así permitiría analizar que : No visualizar inmediatamente una situación como la del dibujo, puede no permitir "ver" la expresión $2(n-1)+1$ en una tarea como la 11 como algo posible y en cambio nadie dice. En donde se puede hacer la hipótesis que cuesta aceptar 1 con un sumando cero en la fórmula, es decir $2 \cdot (1-1) + 1$. Eso podría ser que ocurriera puesto que la representación de la derecha "domina" sobre la izquierda. No sólo por tener dos sumandos, sino porque se trata de una descomposición en dos componentes. La primera es "topológicamente más fina y "contenida en la anterior".



Este tipo de problema es relativamente equivalente al que sucede en la interpretación funcional, cuando no se reconoce que una secuencia del tipo $(x-1)^2 + 1$ no se interpreta tan fácilmente como $x^2 - 2x + 2$, puesto que para $x=1$ en el primer caso aparece un sumando cero. En cambio quienes reconocen que se trata de una traslación

respecto una gráfica conocida “centrada”, tienen mucho más de ganado. Es decir, las representaciones superpuestas de tipo estático no permiten establecer fácilmente reglas múltiples, a no ser que un proceso de “deslizamiento (drag)” permitiera pasar de una a la otra (ver fig. siguiente).



¿Cuál es el papel de la «falta de respuesta adecuada a una consigna? ¿no está relacionado también con las llamadas interpretaciones diferentes»? ¿Cuál es el significado de Patrón que consiguen construir el alumnado? ¿No es significativo que precisamente un alumno ausente (pag 218), interprete la consigna de forma distinta? O bien que haya alumnos que les cueste aceptar que lo que se busca es el reconocimiento de un patrón que permita saber el término $n=267$? ¿Y eso no se consigue quizás hasta después de haber resuelto muchas situaciones del mismo tipo?

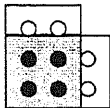
Es un tanto extraño que se desarrollen comentarios sobre la posible visualización de las asociaciones que conllevan un cierto desarrollo numérico de configuraciones puntuales sólo al hablar de la tarea 13, y hacia el final. Este tipo de análisis debería haber sido prioritario y referido al conjunto de las tareas.

En el fondo, no se habla de la interpretación como elemento metacognitivo.

– EL PROBLEMA DE PASAR SIEMPRE POR EL NÚMERO

¿Por qué se ha pedido siempre “pasar por el número”, no puede alterar completamente el significado del patrón? Un ejemplo en la tarea 12. Si “veo” que la configuración es un cuadrado menos uno, diría 4-1, 9-1, 16-1... y de aquí, $(n+1)^2 - 1$. Parece que si bien 12 han descubierto la forma, 3 (no uno como se dice en la tabla 37) reconocen que debe haber “un cambio de variable” para ajustar el término de la secuencia. ¿No se estará queriendo relacionar directamente dibujo con número con patrón como estilo, y no se ve en cambio las permanencias y cambios en las percepciones? ¿Por qué no se dice que sólo el alumno 35 mantiene fidelidad en la descomposición en tres

bloques y dice $n^2 + n + n$ y en cambio los otros 3 usaron otra estrategia en la tarea 11 porque aparece como más simple?



Hasta qué punto en la tarea 15 bis los 3 alumnos más hábiles descubren que las secuencias numéricas son las mismas y por ello dan una misma configuración puntual? Es decir, reconocer que pasar al número es una estrategia, y reconocer que la adición indica consideración por filas y el producto indica rectángulo es la otra estrategia general de la mayoría? Como diremos en otro punto, por qué no se habla de estrategias, ya que se hace un análisis sobre errores y formas de desarrollo?

– SOBRE EL PARADIGMA UTILIZADO EN EL ANÁLISIS Y EL POCO INTERÉS ACTUAL DE ALGUNOS OBJETIVOS DEL ESTUDIO

Es curioso que se esté aplicando un paradigma propio de los estudios de errores, y no se parta ya de resultados conocidos. Así por ejemplo en muchos momentos de los análisis se centra la discusión en el rendimiento "... alumnos tratan de buscar" "...lo hacen correctamente..." en detrimento del análisis de las propias configuraciones y cuando esto se hace se llegue a conclusiones conocidas: (a) confusión entre término n -ésimo de una secuencia y posición en cuanto distinción entre representación e idea; (b) dificultad ante la escritura del término general; (c) dificultad en la recodificación del término general una vez conocida su ley de formación.

Lo que parecería interesante es ver cómo se manifiesta este tipo de errores en situaciones diferentes, y había datos para ello. Es decir, no se responde al problema de la persistencia de errores que se reconocen.

4. PERSPECTIVA ACTUAL Y CRÍTICA DESDE NUEVOS PARADIGMAS QUE SE ABREN EN EL TEMA

- El estudio se enmarca claramente como representacionista, empirista y vinculado a una concepción más piagetiana que interaccionista vigotskiana.

- Se ve cierta indefinición entre Modelo como esquema externo, o representación interna estructurada operativamente (internamente consistente en la visión de Fischbein, externamente presentada en la idea de Hiebert).

- Muchos elementos terminológicos deberían precisarse y reconceptualizarse. Hablar por ejemplo ahora de sistema simbólico a la configuración puntual sería un tanto atrevido.

– SOBRE LA IDEA DE CONTEXTO PLANTEADA

La preocupación del estudio dice centrarse en tres parámetros: contextos, complejidad, tamaño. Las dos primeras no se encuentran bien definidas lo que no debe extrañar puesto que dichas están en gran discusión. Además estas categorías son variables excesivamente estáticas y equiparan elementos muy diferenciados como: fracción, símbolo, operación . ¿Por qué llamar a eso contextos numéricos? (pg 135). Nos parece que algunos no son equivalentes. Lo que sorprende es que los contextos no se utilizan después en el análisis.

– COMPLEJIDAD

Complejidad de un desarrollo nunca se define explícitamente aunque se relaciona con los desarrollos. ¿ Es complejo un desarrollo porque tiene muchos paréntesis? ¿La expresión de un número cuadrado menos uno es más compleja que la expresión aditiva de suma de un cuadrado interior y dos rectángulos?

¿No hay complejidad de las configuraciones ? No está claro. Por ejemplo, parece no es compleja la configuración de "casita" de la tarea 19 si entendemos que se da la consigna de dividir la figura en triángulos . En cambio es compleja si consideramos las dificultades en dar con el término general correctamente. ¿Podríamos decir que la configuración de la secuencia si es compleja, porque no se reconoce la casita para $n=1$, y $n=2$?

– SOBRE LA IDEA DE MODELO PLANTEADA

¿Qué ocurre con algunos "modelos" aparentemente incorporados? El modelo rectangular, reconocido en la tarea 8 no se "aplica" en la tarea 12. ¿Por qué sólo 3 de 27 "ven" $2n-1$? ¿Quiere ello decir que la representación por filas es dominante? Se sugiere al final esta conclusión, pero hay indicios suficientes para afirmarlo? ¿Cómo 3 alumnos pasan de una indicación correcta del término general de la serie de los números impares a una representación errónea del tipo $(n+1)+n$ en la tarea 12 con la misma serie numérica. ¿No será que debemos considerar el valor funcional de las reglas secuenciales "debe valer para todos los términos, y en particular para $n=1$ " y el docente quizás ha admitido que en algún momento la serie de los impares pudiera ser un par más uno? No se dice nada sobre ello.

Desde una óptica actual, falta un análisis de la verbalización de las relaciones entre el término general y la propia configuración. En el fondo, falta un análisis de las influencias de las configuraciones en el tratamiento de las sucesiones. El análisis se queda a menudo en las configuraciones "per se". ¿Cómo se puede decir que la dificul-

tad de la tarea 12 está en expresar que en una fila hay un punto menos que en la otra, si no se describen las hablas de los alumnos al formular el término general? Las expresiones "relacionar los términos de la secuencia con el número de orden" (pag 230) no indican la relación del alumno con la configuración. Para ello, se nos ocurre que sería preciso un análisis desde la teoría de la actividad.

¿Qué sentido tiene ahora hablar de "Modelo conceptual" y qué relación tiene con la "construcción conceptual"?

¿Qué sentido tiene por ejemplo la dificultad en aceptar el uno como triángulo? ¿En qué sentido no reflexionar sobre el tema es olvidar cómo se superan las concepciones prototípicas, y como se integra la generabilidad de procesos secuenciales (para $n=1$)? ¿No es insuficiente quedarse sólo en la perspectiva «representacional» y cómo se relaciona con la estructural? ¿Es suficiente (en el esquema representacionista) la distinción entre lo figural y lo geométrico que se percibe en las situaciones con cabri y los trabajos de Laborde?

Hoy en día tenemos una discusión profunda y pensamos que una toma de posición es necesaria pues condiciona la forma de estudio a realizar y el interés didáctico.

– STATUS DIDÁCTICO DE LOS MODELOS Y SISTEMAS DE SIGNOS

Ya no se trata de sólo un problema epistemológico y psicológico, sino didáctico: ¿Qué parte del modelo está en los sujetos? ¿Qué indica ahora decir que «El modelo se adapta a la situación». ¿Sigue teniendo sentido hablar de adaptación en una perspectiva que tenga algo de interaccionista? ¿Tiene sentido didáctico hablar de una construcción sólo de los sujetos? ¿Para qué sirve? ¿Qué importancia tiene conocer prioritariamente a los individuos y sus procesos individuales? ¿Cómo complementar esa visión en un proceso de formación de profesores con la acción didáctica?

Una confirmación de que en el estudio no se resuelve eso ni se toma partido:

No se resuelve la tensión entre: SISTEMISTAS e INTERNALISTAS. En el texto se distingue entre SISTEMA ORIGINAL y ESQUEMA (citando a Fischbein), pero si bien se dice que es «adaptado a la naturaleza del pensamiento humano en otro lugar se dice «construido con multiplicidad de datos» (en la línea de Resnick). Así, en la primera visión parece como si -a pesar de la construcción personal- hubiera algo «platónico» ideal, original, que sirve de base a la comprensión. Esta idea se repite en diversos otros momentos: « las ideas matemáticas deben *presentarse* mediante algún tipo de modelo»

En cambio en el planteamiento cognitivista de la Teoría de Esquemas, se ofrece una visión precisamente centrada en lo personal y se funcionaliza el tratamiento y estudio correspondiente. En efecto, analizar las conexiones de un sistema, no implica reconocer que no puedan haber influencias, ni implica una toma de posición sobre el tipo de las mismas. *Da la oportunidad de reflexionar sobre cómo se comportan y fijarse en lo que muestran.*

¿No ayuda quizás a resolver ese problema considerar la idea de lo «institucional»?

Y, también nos preguntamos: ¿ La estructura de Procesos usados por los sujetos puede reducirse en la actualidad a elementos representacionales como se hace en el estudio?

Se habla claramente de espacios representativos diversos y procesos como interpretación definición, etc. Por el hecho de que éstos se dilucidan representacionalmente, se tratan como estructurados o no, y no se indica la presencia e influencia de los mismos como «artefactos» (papel isométrico, ...) y su repercusión sobre los elementos de contenido de la «matemática discreta»: recursividad, secuencialidad, ... La estructura perseguida se basa en reconocer si la «variedad» permite identificar mejor o no ciertas propiedades... lo cual está bien, pero podríamos llegar más lejos.

5. Resumen : BALANCE Y ACTUALIDAD DEL TRABAJO.

Resumiendo el balance en términos del propio estudio, digamos que destacamos los aportes siguientes:

Desde las bases y ACOTACION CONCEPTUAL

Gran Sistema de categorías de observación del contenido.

Se afina y reinterpreta trabajos de Mason, Bell, y otros.

Análisis pormenorizado para el registro de los datos, encuentro de rasgos distintivos

Excesivo uso del paradigma estrategias/errores en el análisis con ausencia de un "cuadro integrador" de los esquemas encontrados.

Originalidad de las categorías de análisis del contenido con elementos específicos.

Ausencia de contraste final con un análisis "bastante" a priori.

Ausencia de integración del sistema decimal, que se insinuaba como objetivo.

Desde el punto de vista COGNITIVO.

Se valora: Interés del tema y vigencia del mismo.

Análisis pormenorizado de generalizaciones y enfrentamiento del problema de las representaciones en sistemas numéricos.

Lo que falta: Integración de un análisis semiótico toma de posición sobre los sistemas de representación y tratamiento de los sistemas simbólicos como sistemas emergentes.

Desde lo METODOLOGICO

Lo que se precia: Sistematización. Conexión temática. Profundidad descriptiva

Pobreza del modelo investigación-acción utilizado para superar la descripción para un análisis de la significatividad de las interacciones.

Necesidad de integración del trabajo en un modelo interaccionista más complejo que permitiría analizar las propias intervenciones y consignas en un esquema (relación conjunta alumno-docente-tarea)

Necesidad de un tratamiento desde la actividad en el paradigma "classroom research" que permitiría reconocer con mayor profundidad la relación del alumno con la tarea.

Desde los RESULTADOS,

Se valora los elementos del cuadro conjunto establecido mediante un diseño de instrucción que permite reconocer un desarrollo del pensamiento aritmético en el alumnado observado en la mejora constatada en el grupo experimental.

El estudio tiene un reflejo en el trabajo de I.Segovia sobre estimación de cantidades,

Si bien hay que destacar la seriedad y generosidad del estudio, uno espera más de este tipo de trabajos: ¿por qué quedarse en la identificación de acciones? ¿por qué no tratar de teorizar sobre el uso de elementos visuales y el papel de las representaciones y los símbolos que se trasluce a partir del estudio realizado? ¿Por qué no sistematizar los elementos visuales y analíticos de forma global respecto las diversas tareas realizadas. En ese sentido no responde a una de las exigencias propuestas (pg. 18, apartado (g)) y se centra excesivamente en "el dominio conseguido en el trabajo con los números figurados".

BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

Gravemejier, K (1998) Emergent Models as an instructional design Heuristic. In K. Gravejmeier (ed.) *Symbolizing and modelling in Mathematics Education*. Freudenthal Institute. Utrecht University.

Herskowitz, R, Schwarz, B (1999) Reflective processes in a Mathematics Classroom With a Rich Learning Environment. In *Cognition and Instruction* 17 (1), 65-91. Lawrence Erlbaum Ass.

Whitson, J. A. (1997) Cognition as a Semiotic Process: From Situated Mediation to Critical Reflective Transcendence. In D.Kirschner & JA.Whitson (Eds.) *Situated cognition theory: Social, semiotic and neurological perspectives*. Hillsdale NJ Erlbaum , 97-150.

Sfard, A (1999) Symbolizing mathematical reality into being. In Cobb, P, Yackel, E, McKlain (eds) *Mathematizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design*. Mahwah, NJ Lawrence Erlbaum Ass.