

Introducción a las ondas gravitacionales



Claudia Moreno¹, R. García-Salcedo², Arturo Lara¹, Jaime Ramírez¹

¹Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingeniería de la Universidad de Guadalajara, Corregidora No.500, Sector Reforma, CP.44420, Guadalajara, Jal., México.

²Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada-Unidad Legaria del Instituto Politécnico Nacional, Legaria #694. Col. Irrigación, CP.11500, México, D. F.

E-mail: claudia.moreno@cucei.udg.mx; rigarcias@ipn.mx; jaelectronic@hotmail.com

(Recibido el 10 de julio de 2008; Aceptado el 26 de agosto de 2008)

Resumen

En este artículo explicamos de una manera sencilla el tema de ondas gravitacionales (OG); señalaremos la relación que manifiesta con las ondas clásicamente conocidas, como lo son las ondas mecánicas y electromagnéticas. El estudio de las OG es importante, ya que pueden proporcionar pruebas indirectas de la existencia de hoyos negros, dimensiones extras e incluso las condiciones iniciales en las primeras etapas de nuestro universo.

Palabras clave: Relatividad General, ondas gravitacionales, interferometría.

Abstract

In this article, we will speak in an easy way the Gravitational Waves (GW) topic; we will show the relation between the classical known waves, such as the mechanic and electromagnetic waves. The study of GW is very important, because it can give us indirect proofs about the existence of black holes, extra dimension and the initial conditions in the first stages in our universe.

Key words: General Relativity, gravitational waves, interferometer.

PACS: 01.55.+b, 01.30.-y, 95.10.-a, 98.80.-k

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

Las ondas gravitacionales (OG) es una de las predicciones más importantes de la Teoría de la Relatividad General de Einstein [1]. A nivel mundial, se está realizando un gran esfuerzo para descubrir la radiación gravitacional, ya que su detección será la prueba contundente para verificar la teoría de Einstein. El estudio de las OG se realiza desde el punto de vista teórico, numérico y experimental [2]. En México, estamos comenzando a difundir estos temas, donde varios investigadores de diversas universidades en el país, están involucrados. Para empezar a describir las OG de una manera sencilla, revisaremos aspectos clásicos de las ondas con las que cotidianamente vivimos: ondas mecánicas y electromagnéticas. En cuanto a las ondas que aparecen en la mecánica cuántica no hablaremos, ya que no están al alcance de este artículo.

Las ondas electromagnéticas que utilizamos diariamente en sus diferentes expresiones [3] son un fenómeno de naturaleza lineal, y aparecen sin ninguna aproximación. Las ondas mecánicas, sin embargo, son lineales solo en la aproximación de pequeños desplazamientos. Un péndulo, por ejemplo, es solo un oscilador armónico ya que se toma la aproximación $\sin(\theta) \approx \theta$ cuando $\theta \ll 1$, [4]. En el caso de una masa unida a un resorte, solo se consideran intensidades pequeñas de la fuerza de restauración, con lo que

obtenemos una aproximación también lineal. Para interpretar el caso de la radiación gravitacional, la teoría se tiene que aproximar de la misma manera que el caso mecánico, esto es, la teoría que se utiliza para determinarlas es la teoría de la relatividad de Einstein, que en general es un sistema de 10 ecuaciones diferenciales parciales acopladas no-lineales, lo cual hace que hace muy difícil su comprensión e interpretación física [1]. De lo que sabemos acerca del fenómeno de ondas en otros campos, el camino más fácil para aproximarse a las oscilaciones en el campo gravitacional, es considerar el límite de un campo gravitacional débil, el cual resultará en una teoría de la gravedad linealizada. La linearización es, sin embargo, un concepto muy útil para poder entenderlas. Además, desde un punto de vista físico, esta aproximación es justificable, ya que en un lugar muy alejado de un objeto masivo, la curvatura de nuestro universo es muy pequeña. Precisamente, el límite del campo débil significa que consideramos al espacio-tiempo plano con una pequeña perturbación, tal que los términos de segundo y mayores órdenes en la perturbación son casi insignificantes.

El presente artículo está organizado de la siguiente manera: en la sección **II**, se deduce la ecuación de onda para las oscilaciones mecánicas, a partir del ejemplo de una cuerda que se encuentra oscilando. En la sección **III** se da una breve descripción de las ecuaciones de Maxwell, de las cuales, se deducirán las ecuaciones de onda para los

campos eléctrico y magnético. En la sección IV, se deduce la ecuación de onda gravitacional, la cual surge de una teoría linealizada del campo gravitacional. En la Sección V, se describe brevemente la parte experimental que se estudia actualmente para tratar de detectarlas de una forma directa. Finalmente, en la sección VI se dan algunas conclusiones.

II. ONDAS MECÁNICAS

Cualquiera de nosotros tenemos una comprensión intuitiva de lo que son las ondas [3], por ejemplo, las perturbaciones que se observan en una cuerda, en un resorte, en el sonido o en la superficie del agua. Éstas, son situaciones físicas producidas en un punto del espacio, que se propagan a través del mismo y se reciben en otro punto. Todos estos procesos son ejemplos de movimiento ondulatorio.

El movimiento ondulatorio se manifiesta en casi todas las ramas de la Física, por ejemplo, mecánica, electromagnetismo, gravitación y mecánica cuántica. La similitud de las descripciones físicas y matemáticas de estas distintas clases de ondas, indica que el movimiento ondulatorio es uno de los temas unificadores de la Física.

En esta sección mostraremos una deducción de la ecuación que describe las ondas mecánicas, y veremos una de sus soluciones, la más útil en términos de los fenómenos que describe a nivel general.

Estamos familiarizados con el hecho de que la energía y el ímpetu (o momento lineal) se transportan de un lugar a otro, en virtud del movimiento de las partículas; el movimiento ondulatorio, proporciona una forma alternativa en que la inercia y el ímpetu se mueven de un lugar a otro, sin que las partículas materiales viajen. Las ondas de agua y las ondas sonoras son ejemplos de ondas mecánicas, que viajan a través de un medio deformable o elástico. Debido a las propiedades elásticas del medio, la perturbación se propaga a través de éste.

A nivel microscópico, propiedades mecánicas tales como las fuerzas entre los átomos, son las causantes de la propagación de las ondas mecánicas, cuando una onda alcanza una partícula situada en el medio, pone a esa partícula en movimiento y la desplaza, transfiriéndole así energía cinética y potencial. Las partículas del medio se mueven al pasar la onda, únicamente distancias pequeñas con respecto a sus posiciones originales, sin experimentar un desplazamiento neto en la dirección del viaje de la onda. En tales casos, ignoraremos la estructura molecular de la materia y supondremos que se trata de un medio continuo. Esta suposición es válida, mientras la variación espacial de la onda sea grande comparada con la distancia intermolecular. Con el movimiento ondulatorio, puede transferirse (a grandes distancias) no solamente energía, sino además información sobre la naturaleza de la fuente de las ondas.

Como sabemos, las ondas se van dispersando conforme avanzan, es decir que la altura de la cresta va disminuyendo, lo que significa que su energía se va dispersando al medio elástico en el que se propaga. Para

la descripción que haremos a continuación de estas ondas, consideraremos que en el medio de propagación no hay ni disipación ni dispersión. Cabe aclarar que existen ondas que se dispersan muy lentamente conocidas como ondas solitarias o solitones, para una descripción más completa de este tipo de ondas, se puede revisar el trabajo de Agüero et al. [5].

Para describir el movimiento ondulatorio consideremos un pulso, que está descrito matemáticamente por una función $y = f(x)$, en un tiempo fijo dado, como el que se muestra en la figura 1.

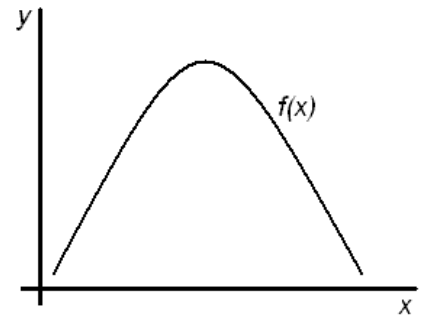


FIGURA 1. Un pulso descrito por una función de $y = f(x)$.

Si consideramos que el pulso está viajando hacia la derecha a una velocidad v , entonces después de un tiempo t , todos los puntos del pulso se han desplazado una distancia vt , como se muestra en la figura 2, de tal forma que la nueva coordenada $x' = x + vt$, la cual al despejarse de x , se tiene que el pulso entonces se puede describir con una función que depende tanto de x como de t

$$y = f(x, t) = f(x - vt), \quad (1)$$

la cual se denomina función de onda.

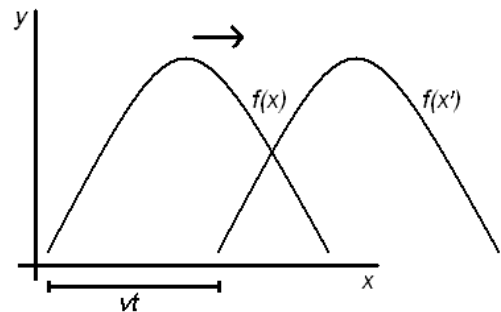


FIGURA 2. Un pulso descrito por una función de $y = f(x, t) = f(x - vt)$.

En forma general, si el pulso avanza hacia la derecha o hacia la izquierda, la función tendrá la combinación,

$$y(x, t) = f(x \pm vt) = f(u). \quad (4)$$

El signo negativo se utiliza para una onda que se mueve en el sentido positivo de x , en tanto que el signo positivo se

usa para una onda que se desplaza en el sentido negativo de x .

De una forma más general podemos encontrar una ecuación para las ondas mecánicas, que tenga como solución la función de onda descrita anteriormente.

En lo subsecuente, haremos una deducción matemática de la ecuación de onda, aquella cuyas soluciones nos describirán pulsos que se propaguen en el espacio y el tiempo. Una deducción distinta de la ecuación de onda mediante las propiedades mecánicas tanto del medio como de la cuerda por la que se propaga, puede encontrarse en [3].

Si tomamos la primera derivada respecto de cada variable de la función $y(x, t)$ tenemos que:

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial f(u)}{\partial u},$$

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \pm v \frac{\partial f(u)}{\partial u},$$

cuyas segundas derivadas serán,

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(u)}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f(u)}{\partial u^2},$$

igualando de forma adecuada las últimas relaciones se tiene la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}. \quad (5)$$

Las soluciones de la ecuación (5), son todas las funciones de la forma (4), en particular aquellas que corresponden a un movimiento armónico simple, y tienen la forma de una función cosenoidal o senooidal,

$$y = A \operatorname{sen} \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x \pm vt) \right], \quad (6)$$

una de estas ondas se muestra en la figura 3.

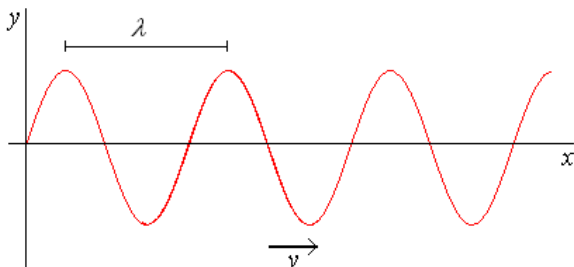


FIGURA 3. Esquema de una onda armónica.

Al tiempo que tarda una onda en recorrer una la distancia de una longitud de onda λ , se le conoce como periodo T . De la misma forma, se define la frecuencia ν , como:

$\nu \propto 1/T$. Por lo tanto, la velocidad de la onda estará dada por:

$$v = \lambda / T = \lambda \nu. \quad (7)$$

La expresión (6) se puede escribir también de la siguiente forma:

$$y = A \operatorname{sen}(kx - \omega t),$$

donde $k = 2\pi / \lambda$ y $\omega = 2\pi / T = 2\pi\nu$ son conocidas como el número de onda angular y la frecuencia angular, respectivamente. De esta forma la velocidad de onda también puede expresarse como $v = \omega / k$.

Generalizando la ecuación de onda unidimensional, a una ecuación de onda tridimensional, en donde la función de onda $F(x, y, z, t)$ sea solución, de tal forma que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}.$$

Esta es la ecuación diferencial de onda tridimensional, y se escribe en una forma más compacta, introduciendo el operador laplaciano

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

quedando simplemente como

$$\nabla^2 F = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}.$$

Esta forma de la ecuación diferencial de onda tridimensional, es de suma importancia en diversas aplicaciones físicas.

Como es bien sabido, las ondas reales se van dispersando conforme avanzan, es decir que la altitud de las cresta va disminuyendo, lo que significa que su energía se va dispersando en el medio elástico en el que se propaga.

III. ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

Las propiedades de los campos electromagnéticos [4, 6] se pueden describir por cuatro ecuaciones diferenciales parciales, conocidas generalmente como ecuaciones de Maxwell, en honor de su descubridor. Estas ecuaciones, fueron comprobadas y deducidas tanto de manera teórica como por métodos experimentales, lo anterior fué realizado por científicos como Faraday, Coulomb, Gauss y Ampère entre otros, en el siglo XVIII. Dos de estas ecuaciones son las leyes de Gauss, para los campos eléctrico y magnético, la tercera ecuación es la ley de Faraday y la cuarta ecuación, es una modificación y generalización de la ley de Ampère que realizó el propio

Maxwell, estas ecuaciones en su forma diferencial en el vacío se pueden escribir como

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (9)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (10)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{J}, \quad (11)$$

en donde \mathbf{E} es el vector de campo eléctrico y \mathbf{B} es el vector de inducción magnética, los cuales son generados por las fuentes de carga de densidad ρ , y la fuente de corriente de densidad \mathbf{J} , μ_0 y ϵ_0 son constantes. A μ_0 se le conoce como la permeabilidad del espacio libre, y a ϵ_0 como la permitividad del espacio libre.

La ecuación (8) se conoce como la ley de Gauss eléctrica, la cual relaciona la carga eléctrica con el campo eléctrico. Ésta establece que el número total de líneas de campo eléctrico que divergen a través de cualquier superficie cerrada en el espacio libre es igual a la densidad de carga eléctrica encerrada en dicha superficie, dividida por ϵ_0 .

La ecuación (9) es la ley de Gauss magnética, la cual establece que el flujo magnético total de salida, a través de cualquier superficie cerrada es cero. Esto es debido a que las líneas de flujo magnético siempre se cierran sobre sí mismas, de aquí se desprende que no existen cargas magnéticas aisladas, en comparación con las cargas eléctricas. Esto se puede ilustrar si consideramos a un imán de barra con la designación tradicional de polo norte y polo sur, si lo dividimos en dos, aparecerán dos imanes más pequeños con sus respectivos polos norte y sur, podemos seguir dividiendo esos imanes en dos, y nuevamente aparecerán en cada uno de los segmentos sus respectivos polos norte y sur, se puede seguir el proceso de división hasta obtener imanes infinitesimalmente pequeños, pero cada uno de los imanes tendría su polo norte y sur, es decir, no se conocen de forma aislada los monopolos magnéticos.

La ecuación (10) es la llamada ley de inducción de Faraday, la cual relaciona el cambio de la inducción magnética \mathbf{B} en el tiempo con el campo eléctrico, mediante la inducción de una fuerza electromotriz al cambiar el flujo magnético. El campo \mathbf{B} así inducido variable en el tiempo, genera un campo \mathbf{E} , que es perpendicular en todas partes en la que \mathbf{B} cambia.

La ecuación (11) es una generalización de la ley de Ampère, la cual realizó el propio Maxwell, y relaciona la creación de campos magnético, mediante corrientes eléctricas. El campo eléctrico variable con el tiempo induce un campo magnético \mathbf{B} , que en todas partes es perpendicular a la dirección en la que el campo \mathbf{E} cambia, y este campo inducido es dependiente del tiempo.

Maxwell empleó las ecuaciones mencionadas anteriormente, para estudiar las relaciones entre los

campos eléctrico y magnético. Sin pronosticarlo, obtuvo las ecuaciones de onda para ambos campos en el caso particular en el que no haya cargas ni corrientes externas ($\rho = 0$ y $\mathbf{J} = 0$). Para deducir las ecuaciones de onda para los campos electromagnéticos, tomamos el rotacional de (10), y usando la relación vectorial

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A},$$

en conjunto con (8) y (11) se obtiene,

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}, \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

De aquí obtenemos que

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Esta expresión es la ecuación de onda para el campo eléctrico, por su similitud con la ecuación de onda tridimensional vista en la sección anterior.

De la misma forma tomamos $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B})$ para la inducción magnética, lo que nos conduce a

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2},$$

la cual, es la ecuación de onda para el campo de inducción magnética.

De esta forma los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} pueden considerarse, como dos aspectos de un solo fenómeno físico, *el campo electromagnético*, cuya fuente es una carga en movimiento. La perturbación, una vez que ha sido generada en el campo electromagnético, es una onda, que se mueve más allá de su fuente e independiente de ella. Maxwell encontró, además, que estos campos apareados, llamados colectivamente *electromagnéticos*, se pueden propagar en el vacío a manera de ondas, y obtuvo una expresión para la velocidad de propagación de estas ondas electromagnéticas. Cuando él evaluó numéricamente esta expresión teórica, en términos de variables puramente electromagnéticas, encontró que el resultado estaba en excelente acuerdo con las mediciones experimentales de la velocidad de la luz, tendiendo el valor de 3×10^8 m/s o bien

$$c = 1 / \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}.$$

Su trabajo puso en claro que las ondas de luz son ondas electromagnéticas. En términos de la velocidad de la luz, las ecuaciones de onda para los campos se expresan como

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}. \quad (12)$$

Observemos la gran similitud que tienen con la ecuación de ondas mecánicas. Las funciones armónicas son soluciones a la ecuación de onda electromagnética. Para el campo eléctrico \mathbf{E} , la componente E_x tiene la forma

$$E_x = E_{0x} \cos(kz - \omega t).$$

La cual es una onda que se propaga en la dirección z positiva, para distintos valores de t .

Alternativamente, los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} pueden escribirse en términos de un potencial vectorial \mathbf{A} y un potencial escalar V . De la ecuación (9) podemos concluir que,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

y de la ecuación (10),

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Sustituyendo ambas ecuaciones en la ecuación (11), tenemos

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu \mathbf{J} - \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}),$$

y utilizando la relación

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A},$$

obtenemos

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu \epsilon \frac{\partial V}{\partial t}).$$

La definición de un vector requiere de la especificación tanto de su rotacional como de su divergencia. Es por ello que en este caso, se toma la libertad de elegir

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu \epsilon \frac{\partial V}{\partial t} = 0, \tag{13}$$

lo cual se conoce como condición o norma de Lorentz (en inglés, gauge) para los potenciales. La ecuación (13) permite obtener las ecuaciones de onda no homogéneas para dichos potenciales, quedando de la siguiente forma:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J},$$

$$\nabla^2 V - \mu \epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}.$$

Una de las ventajas del uso estas últimas ecuaciones de onda para los potenciales radica en que es más sencillo encontrar el campo eléctrico \mathbf{E} , a partir del potencial eléctrico V , el cual se puede encontrar a partir de la densidad de carga ρ . De la misma forma, conociendo la densidad de corriente \mathbf{J} es simple encontrar el potencial \mathbf{A} y con ello saber cuál es el campo magnético \mathbf{B} , [6].

Sabemos que siempre se debe satisfacer el principio de conservación de la carga, para cualquier situación física. La ecuación (11), nos permite corroborar que la conservación de la carga se satisface, es decir

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Esta ecuación la podemos obtener calculando la divergencia de la ecuación (11).

IV. ONDAS GRAVITACIONALES

Pudiera decirse que las ondas gravitacionales (OG) son una de las predicciones más importantes de la teoría de la Relatividad General (1915) de Einstein [1, 7, 8]. Sin *Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol. 2, No. 3, Sept. 2008*

embargo, éstas aún no han sido detectadas experimentalmente, lo cual será una prueba contundente de la existencia de estas ondas y la completez de las ecuaciones de esta teoría. En 1916, Einstein fundamentó la teoría de las ondas gravitacionales, para ello, restringió su teoría a ondas débiles (linealizadas) emitidas por cuerpos con autogravedad casi nula, y propagación a través de espacio tiempos (podemos imaginarlas como superficies) vacíos y planos.

La teoría de Einstein, está expresada matemáticamente en términos de objetos matemáticos conocidos como tensores, los cuales son una generalización de los llamados vectores. Los tensores se crearon para describir de una forma más adecuada la curvatura del espacio tiempo en términos geométricos. La cantidad más fundamental de esta teoría es lo que se conoce como métrica de un espacio tiempo,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \tag{14}$$

donde los subíndices μ y ν toman los valores enteros de 0 a 3, la cual mide la distancia entre dos puntos en un espacio ya sea plano o curvo, como podría ser una esfera, cilindro, o superficies curvas más complejas.

En base al tensor métrico $g_{\mu\nu}$, la ecuaciones de campo gravitacional de la relatividad general, tienen la forma

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \tag{15}$$

en donde $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein, que describe la geometría del espacio tiempo a partir del tensor métrico; $R_{\mu\nu}$ es el conocido como tensor de Riemann; R es el escalar de curvatura; Λ es la llamada constante cosmológica que no fue originalmente presentada en las ecuaciones de Einstein, y $T_{\mu\nu}$ representa el tensor de energía momento, lo cual corresponde al tipo de materia que genera la distorsión del espacio tiempo [1], [2]. Con $\Lambda = 0$ y $\kappa = 8\pi G / c^4$, la ecuación (15) toma la forma

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \tag{16}$$

donde G es la constante gravitacional de Newton. El valor de κ fue obtenido por la exigencia de que las ecuaciones de Einstein, tenían que predecir el comportamiento correcto del movimiento de los planetas internos en el sistema solar.

Tomar el límite del campo débil, significa considerar que el espacio-tiempo es plano ante una pequeña perturbación, tal que los términos de segundo orden en la perturbación son insignificantes, por lo que se desprecian.

En términos matemáticos, la expresión a esta perturbación es

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - h_{\mu\nu} + O(h_{\mu\nu}^2), \quad (17)$$

donde $\eta_{\mu\nu} = \text{diagonal}(-1, +1, +1, +1)$ corresponde al tensor métrico de un espacio plano, y $h_{\mu\nu}$ es la perturbación de dicho espacio plano. Si $h_{\mu\nu} \ll 1$,

podemos excluir los términos de orden $O(h_{\mu\nu}^2)$ en todas las ecuaciones y, de esta forma, conseguir la versión linealizada de la Relatividad General.

Uno puede escribir los tensores en diferentes sistemas de coordenadas, en particular aquellos que resulten más adecuados para realizar los cálculos. En este caso, las coordenadas que consideraremos son las coordenadas de Lorentz [7].

Ahora, consideremos el siguiente cambio de coordenadas,

$$x^{\alpha'} = x^\alpha + \xi^\alpha(x^\beta), \quad (18)$$

donde ξ^α es un vector cuyas componentes dependen de las coordenadas originales. Para subir o bajar índices, simplemente usamos la métrica $g_{\mu\nu}$. El objetivo de esta transformación de coordenadas, es que deje invariante al sistema original. Sí exigimos que ξ^α sea pequeña, entonces tenemos que, a primer orden

$$g_{\alpha'\beta'} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha}, \quad (19)$$

donde

$$\xi_\alpha = \eta_{\alpha\beta} \xi^\beta, \quad (20)$$

la coma indica derivada convencional $\xi_{\beta,\alpha} = \partial \xi_\beta / \partial x^\alpha$,

lo cual nos permite redefinir $h_{\alpha\beta}$ como,

$$h_{\alpha\beta} \rightarrow h_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha}. \quad (21)$$

Si todas las cantidades $|\xi_{\alpha,\beta}|$ son pequeñas, entonces la nueva $h_{\alpha\beta}$ es pequeña, y estamos aún en un sistema de coordenadas aceptable. Este cambio es el llamado *gauge de transformación*, que es un término usado en analogía con el gauge de transformaciones del campo electromagnético [2]. La libertad de coordenadas de las ecuaciones de Einstein, significa que somos libres para

escoger un vector arbitrario (pequeño) ξ^α en la ecuación (21). Usaremos esta libertad para simplificar los cálculos.

A orden lineal en $h_{\mu\sigma}$, el tensor de Riemann toma la forma,

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} (\partial_\rho \partial_\nu h_{\mu\sigma} + \partial_\sigma \partial_\mu h_{\nu\rho} - \partial_\sigma \partial_\nu h_{\mu\rho} - \partial_\rho \partial_\mu h_{\nu\sigma}), \quad (22)$$

tal que las ecuaciones de Einstein en un campo débil quedan expresadas de la siguiente manera,

$$G_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} (\bar{h}_{\alpha\beta,\mu}{}^{,\mu} + \eta_{\alpha\beta} \bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\mu\nu} - \bar{h}_{\alpha\mu,\beta}{}^{,\mu} - \bar{h}_{\beta\mu,\alpha}{}^{,\mu}) + O(\bar{h}_{\alpha\beta}^2), \quad (23)$$

esta ecuación se simplificará si consideramos que:

$$\bar{h}_{\alpha\beta,\mu} = 0. \quad (24)$$

La formula anterior representa cuatro ecuaciones, y ya que tenemos cuatro funciones libres gauge ξ^α , podemos ser capaces de encontrar un gauge en que la ecuación (23) sea verdadera. Es siempre posible escoger un gauge que satisface la ecuación (24). Así nos referimos como una condición gauge y específicamente, como una condición de gauge de Lorentz. Si tenemos un $h_{\mu\sigma}$ que satisface esto, decimos que estamos trabajando en el gauge de Lorentz. Otra vez el gauge tiene este nombre, por la analogía con el electromagnetismo. Otros nombres que uno encuentra en la literatura para el mismo gauge incluye el gauge armónico y el gauge de Donder.

En este gauge, la ecuación (23) toma la forma

$$G_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \square^2 \bar{h}_{\alpha\beta}, \quad (25)$$

de tal forma que las ecuaciones de Einstein para un campo débil quedan

$$\square^2 \bar{h}_{\alpha\beta} = -16\pi G T_{\alpha\beta} / c^4. \quad (26)$$

Estas son las llamadas ecuaciones de campo de la *teoría linealizada*, ya que ellas se obtienen al considerar términos lineales en $h_{\alpha\beta}$.

Puede ser que en una región del espacio tiempo el campo gravitacional sea débil pero no estacionario. Esto pasa lejos de una fuente relativista que sufre cambios rápidos, y que le toma bastante tiempo a las perturbaciones producidas por estos cambios alcanzar la región distante bajo consideración. Estudiaremos este problema usando la

ecuación de campo débil desarrollado en el párrafo anterior.

Las ecuaciones (26), en vacío ($T_{\alpha\beta} = 0$) son

$$\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) \bar{h}_{\alpha\beta} = 0, \quad (27)$$

siendo ∇^2 el laplaciano. La ecuación (27) es llamada la ecuación de onda tridimensional.

La ecuación de onda lineal y homogénea, tiene como solución general a

$$h_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta} e^{i k_\lambda x^\lambda}, \quad (28)$$

donde $C_{\alpha\beta}$ es un tensor sin traza, simétrico y constante con componentes $C_{\mu 0} = C_{0\mu} = 0$, la cual contiene la polarización de la onda, y es también llamado tensor de polarización. La solución $C_{\alpha\beta} e^{(i k_\mu x^\mu)}$ es llamada la onda plana, (por supuesto, en aplicaciones físicas, uno usa solo la parte real de esta expresión, permitiendo a $C^{\alpha\beta}$ ser compleja). Por el teorema del análisis de Fourier, cualquier solución de la ecuación (15), es una superposición de la solución del plano de la onda.

El valor de $\bar{h}_{\alpha\beta}$ es constante en una hipersuperficie en

la que el producto interno $k_\alpha x^\alpha$ es constante,

$$k_\alpha x^\alpha = k_0 t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = \text{constante}, \quad (29)$$

donde \mathbf{k} se refiere al vector espacial cuyas componentes son k^i , si el cuadrivector asociado k_α es un vector nulo de Minkowski, *i.e.* tangente a la línea de mundo de un fotón. En analogía con las ondas clásicas nombramos las componentes del vector de onda $k_\lambda = (\omega/c, k_1, k_2, k_3)$. Para cualquier solución no trivial, el vector de onda debe satisfacer

$$k_\lambda k^\lambda = \mathbf{k}^2 - \omega^2 / c^2 = 0, \quad (30)$$

que se refiere a la relación de dispersión de la onda, y es la misma relación de dispersión como la de los fotones en el vacío. Para los lectores que están familiarizados con la teoría de ondas, se ve inmediatamente de la ecuación (30) que la velocidad de fase de la onda es 1, como es la velocidad grupo. Recordando que estamos usando unidades en que $c = 1$, la ecuación (30) nos dice que las OG se propagan a la velocidad de la luz. Note, sin embargo, que en realidad impusimos la velocidad de fase c escogiendo $k_\lambda = (\omega/c, \mathbf{k})$. De esta forma, dado que las OG no tienen masa, ellas tienen que propagarse a la

Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol. 2, No. 3, Sept. 2008

velocidad de la luz para llevar una energía finita, tal como lo hacen las ondas electromagnéticas.

V. DETECCIÓN DE ONDAS GRAVITACIONALES

Como se mencionó en la sección anterior, la existencia de las OG fue descubierta por el mismo Einstein en 1916. La búsqueda experimental [9-11] de las OG fue iniciada por Joseph Weber, cuando nada era conocido sobre posibles fuentes cósmicas, y cuando nadie tenía la visión de ver alguna tecnología con posibles éxitos para detectar OG. Después de una década de esfuerzos, Weber (1969) anunció al mundo la tentativa evidencia física de la existencia de OG, utilizando dos detectores basados en el principio masa resonante (uno cerca de Washington, D.C., y el otro cerca de Chicago), los cuales supuestamente fueron excitados simultáneamente por OG [12]. Alrededor de quince grupos de investigación en el mundo, fueron motivados para realizar sus propios experimentos y operar detectores de barras similares (Tyson and Giffard, [13]; Almadi [14] y otros [15]). Lamentablemente, aún con sensibilidades adecuadas, la repetición de la detección de las ondas gravitacionales no fue posible.

Al comienzo de este texto, se indicó que todavía se está tratando de detectar de forma directa las OG, no obstante ya se han detectado de forma indirecta, esto gracias a Russell Hulse y Joseph Taylor (premio Nobel de física en 1993) [11]. Su trabajo consistió en detectar (1974), y hacer un seguimiento del pulsar binario PSR 1913+16, ubicado en la constelación de *el águila*. Después de tomar datos en 1983, divulgaron que habían detectado un cambio sistemático en los tiempos del periastron. En 1982, el PSR 1913 + 16 arribaba a su periastron un segundo antes de como lo hacía en 1974. Es decir, como se esperaba que lo hiciera si su órbita permanecía constante desde 1974. Esto impulsó en mucho la investigación en OG. Existen dos tipos de detectores de OG, los detectores por masa resonante (metálicos) y por interferometría láser.

En la actualidad los detectores de barra resonante que están en funcionamiento son: el AURIGA [16], NAUTILUS y EXPLORER [17] (National Institute of Nuclear Physics, Italia), por parte de detectores de masa resonante esféricos se encuentran; El Graviton (Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - Sao Paulo, Brasil), y el MiniGrail [18] (Kamerlingh Onnes Laboratory, Leiden University - Holanda).

Motivados por los resultados obtenidos del premio nobel, y por el fracaso de la detección de las OG haciendo uso de detectores metálicos, se empezaron a construir detectores por interferometría láser, los cuales deberían ser de mayor tamaño que los metálicos; tendrían en teoría mayores posibilidades de encontrar las OG. Los proyectos más importantes que están actualmente en curso son: LIGO [19] en Livingston-Louisiana (USA), TAMA300 [20] (Mitaka, Japan), GEO600 [21] (Hannover, Germany) y VIRGO [22] (Cascina, Italy). A pesar de la enorme

tecnología con la que cuentan estos detectores, no ha sido posible detectar de manera directa las OG.

Las OG son generadas por procesos astrofísicos violentos. Algunas de las fuentes principales que generan OG son: explosiones de supernova, colisión de dos estrellas de neutrones [23], colisión de hoyos negros [23] e incluso la radiación de fondo generada por el Big Bang [24].

A diferencia de las OE (ondas electromagnéticas), las OG no son fácilmente absorbidas ni dispersadas por la materia. El espectro de las OE comienza con frecuencias de $f \approx 10^3$ Hz y se extiende hacia arriba por 20 órdenes de magnitud, mientras que el espectro de OG comienza en $f \approx 10^4$ Hz y se extiende hacia abajo por cerca de 20 órdenes de magnitud.

El paso de una OG en nuestro planeta, provoca que los objetos se ensanchen y acorten, lo cual implica que quizá nosotros nos movemos con ellas mismas, y es por eso que no nos damos cuenta de su presencia. Si consideramos los objetos como partículas de prueba libres, su efecto en estas partículas de prueba, será la contracción y el estiramiento de la distancia entre las partículas, en la dirección transversal a la dirección de propagación. Detectar directamente esos cambios de distancia es lo que los físicos quieren observar para determinar la existencia de las OG. La magnitud del estiramiento es por supuesto determinado por la amplitud de la onda.

El problema de detección de las OG, es medir cambios en la distancia de un orden aproximado a

$$\delta L = L|h| \approx 10^{-19} m, \quad (31)$$

si consideramos separaciones de $L \approx 10^3$ m, donde L es el tamaño del brazo de un interferómetro. Usando efectos de interferencia, uno puede fácilmente medir distancias del orden de la acostumbrada longitud de onda. Aquí, sin embargo, estamos hablando de medir una parte muy pequeña de una longitud de onda ($1/10^{13}$).

El problema básico en los detectores para la detección de OG, es por supuesto el ruido. Para los detectores en tierra, la principal fuente de ruido son los ruidos sísmicos (vibraciones en la tierra provocadas por la tala de árboles, el paso de vehículos, pequeños movimientos tectónicos entre otros) y ruidos térmicos (la temperatura de las suspensiones de los espejos, causa vibraciones a frecuencias por arriba de la frecuencia de las OG).

Las fuentes de OG (binarias) radian bajo la frecuencia del ruido térmico, es especialmente el ruido sísmico ese límite de detección de OG. Para deshacerse de este ruido de baja frecuencia, los detectores tienen obviamente que estar desacoplados de la Tierra. Es por esto que la NASA está planeando un detector de OG que funcionará en el espacio la Antena Espacial por interferometría láser (LISA) [25]. Además de evitar el ruido sísmico, LISA tiene la ventaja que los brazos del interferómetro pueden ser de varios órdenes de magnitud, más grande que los detectores basados en Tierra, y esto mejora la posibilidad de detectarlas. Los brazos de LISA estarán planeados

para ser de 5 millones de kilómetros de longitud. Las principales limitaciones de ruido para LISA son: ruido binario debido a la gran densidad de las estrellas binarias; ruido de fuerza aleatoria orbitando alrededor del Sol aproximadamente a 50 millones de kilómetros detrás de la Tierra, ruido de disparo debidos a fluctuaciones cuánticas del laser.

En un artículo posterior, hablaremos más sobre el tema de detección gravitacional.

V. CONCLUSIONES

El estudio de las OG es de suma importancia, ya que al detectarlas revolucionaría la visión que tenemos del Universo, esto será comparable como cuando se descubrió la radioastronomía, en el que se descubrieron los cuásares, pulsares y radiación térmica entre otros. Con las OG se espera detectar objetos en el Universo nunca antes vistos por el hombre.

En particular, si las ondas gravitacionales se lograsen detectar, entonces nuestra visión del momento en el que el Universo nació sería más precisa, podríamos “ver” más lejos y, por tanto, más en el pasado.

Cabe mencionar que debido a la búsqueda de las OG, se han logrado importantes avances en ciencia y tecnología, es por ello la importancia de seguir con este tipo de investigación.

Esperamos que estas notas, sean comprensibles para alumnos que hayan concluido una formación universitaria y que esta forma de explicar la importancia de las ondas gravitacionales los invite a estudiar este interesante y apasionante tema.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a SNI-CONACyT por su apoyo. RG-S agradece las becas COFAA y EDI del IPN. Este trabajo fue parcialmente financiado por los proyectos CONACyT J-49924, 52327 y proyecto del IPN SIP-20080759.

REFERENCIAS

- [1] Schutz, B. F., *A first course in General Relativity*, Cambridge University Press (1985). Price, R.H., “General Relativity primer”, *Am. J. Phys.* **50**(4), 300-329 (1982).
- [2] Moreno, C., *Ondas Gravitacionales*, aceptado para publicarse en el libro *Tendencias actuales de la Física en México*, editado por el Instituto Politécnico Nacional (2007).
- [3] Halliday, D. and Resnick, R., *Physics* volumen I, Wiley Publisher (2001).
- [4] Halliday, D. and Resnick, R., *Physics* volumen II, Wiley Publisher (2001).

- [5] Aguero, M.; Fujioka, J. y Ceciliano, I., “La antisoleidad de la onda solitaria”, *Ciencia Ergo sum* **9**(2), 197-201 (2002.)
- [6] Cheng, D. K., *Fundamentals of Engineering Electromagnetics*, Princeton Hall (1992).
- [7] Carrol, S., *Spacetime and Geometry*, Addison Wesley (2004).
- [8] Thorne, K.S., *Gravitational Waves*, [arXiv:gr-qc/9506086](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9506086).
- [9] Saulson, P.S., *Fundamentals of interferometric gravitational wave detectors*, World Scientific Publishing (1994).
- [10] Thorne, K.S., *Gravitational Radiation*, [arXiv:gr-qc/9704042](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9704042).
- [11] Jim Hough, Sheila Rowan. *Gravitational Wave Detection by Interferometry*. Living Review (2000). [<http://relativity.livingreviews.org/Articles/subject.html>]
- [12] Weber, J., “Anisotropy and polarization in the gravitational-radiation experiments”, *Phys. Rev. Lett.*, **22**, 1320, (1969). Weber, J., “Evidence for discovery of gravitational radiation”, *Phys. Rev. Lett.*, **25**, 180, (1970).
- [13] Tyson, J.A., and Giffard, R.P., “Gravitational-Wave Astronomy”, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, **16**, 521, (1978).
- [14] Amaldi, E., Aguiar, O., Bassan, M., Bonifazi, P., Carelli, P., Castellano, M.G., Cavallari, G., Coccia, E., Cosmelli, C., Fairbank, W.M., Frasca, S., Foglietti, V., Habel, R., Hamilton, W.O., Henderson, J., Johnson, W., Lane, K.R., Mann, A.G., McAshan, M.S., Michelson, P.F., Modena, I., Palletino, G.V., Pizzella, G., Price, J.C., Rapagnani, R., Ricci, F., Solomonson, N., Stevenson, T.R., Taber, R.C., and Xu, B.-X., “First gravity wave coincident experiment between resonant cryogenic detectors: Louisiana-Rome-Stanford”, *Astron. Astrophys.*, **216**, 325-332, (1989).
- [15] Ju, L., Blair, D.G., and Zhau, C. “Detection of Gravitational Waves.” *Reports on Progress in Physics* **63** 1317–1427 (2000).
- [16] Bignotto, M., “New suspension system for the gravitational wave bar detector AURIGA”, *Rev. Sci. Instrum.* **76**, 084502 (2005). [<http://www.auriga.inl.infn.it/>]
- [17] Astone, P. *et al.* “EXPLORER and NAUTILUS gravitational wave detectors: A status report.” *Class.Quant.Grav.* **25**, 114048 (2008).
- [18] Damour, T. and Taylor, J. H., *Astroph. J.* **366**, 501 (1991).
- [19] Minigral, <http://www.minigrail.nl/>.
- [20] LIGO, (<http://www.ligo-la.caltech.edu/>).
- [21] Takahashi, R *et al.*, “Operational status of TAMA300 with the Seismic Attenuation System (SAS)”, *Class. Quant. Grav.* **25**, 114036 (2008).
- [21] Grote, H. “The status of GEO 600”, *Class. Quant. Grav.* **25**, 114043 (2008) [<http://www.geo600.uni-hannover.de/>]
- [22] Acernese, F., *et al.* “Status of Virgo”, *Class. Quant. Grav.* **25**, 114045 (2008).
- [23] Sopuerta, C., “Gravitational Radiation from Neutron Stars and Black Holes”, <http://arxiv.org/abs/0808.0389>.
- [24] Zhao, W., “Relic Gravitational Waves and the Evolution of the Universe”, <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0505588> (2005). Pritchard, J.R and Kamionkowski, M., “Cosmic Microwave Background Fluctuations from Gravitational Waves: An Analytic Approach”, *Annals Phys.* **318** 2-36, (2005) <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0412581>.
- [25] Danzmann, K. and Rudiger, A. “LISA technology - Concept, status, prospects”, *Class.Quant.Grav.* **20**, S1-S9 (2003). [LISA, <http://lisa.nasa.gov/>]