

# LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN LA UNIVERSIDAD DE MÁLAGA: ESTRUCTURA Y FUNDAMENTOS

JOSÉ LUIS GONZÁLEZ MARÍ

ALFONSO ORTIZ COMAS

*Universidad de Málaga*

## RESUMEN

*La investigación en Educación Matemática necesita cada vez más de estrechas y prolongadas colaboraciones entre personas, grupos e instituciones. El estado de los conocimientos y de las relaciones entre la teoría y la práctica así como las características de los fenómenos y de la propia investigación demandan el desarrollo de procesos conjuntos, planes coordinados y tareas interconectadas en las que se aborden, de manera progresiva, aproximaciones teóricas y empíricas cada vez más evolucionadas en torno a problemas o campos de problemas muy específicos y estrechamente relacionados, es decir, procesos, planes, tareas y aproximaciones generadas y desarrolladas en el seno de líneas o tendencias de investigación sólidas, bien delimitadas y con una cierta continuidad. Ésta es la orientación que se quiere dar a la investigación en el Área de Didáctica de la Matemática de la UMA, siendo el propósito del presente documento el de compartir la corta pero intensa experiencia acumulada, dar a conocer y someter a crítica la estructura y los fundamentos de las tareas que se vienen realizando y suscitar un debate sobre el concepto de línea de investigación<sup>1</sup> en Didáctica de la Matemática.*

1. Entendida aquí como camino o proceso y, a la vez, como referencia o marco en el que situar y relacionar entre sí los trabajos puntuales y en el que justificar el planteamiento general que da sentido al proceso.

## 1. TOMANDO REFERENCIAS Y AUNANDO ESFUERZOS

El proceso de investigación reglada en el Área de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Málaga se inició a partir de las lecturas de dos tesis doctorales en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada (González, 1995; Ortiz, 1997). La primera de ellas tuvo una larga trayectoria, pues comenzó en 1988 con ocasión de un estudio general sobre números enteros (González y otros, 1990). En la fase final de la investigación, las indagaciones sobre aspectos históricos, epistemológicos y fenomenológicos llevaron a consideraciones sobre la medida, la cantidad y el número, el paso de la aritmética al álgebra, la ampliación de los conjuntos numéricos y las relaciones entre la construcción formal de los enteros, la comparación, el orden y la metrización de magnitudes. El traslado de esta información al ámbito cognitivo y didáctico permitió: a) detectar la existencia de un campo de nociones métricas y numéricas (números naturales relativos), estructural, cognitiva y didácticamente diferentes a las naturales y enteras, b) elaborar una nueva organización didáctica para el campo conceptual aditivo (González, 1999) y c) abrir nuevas perspectivas a los estudios sobre números enteros, el paso de  $N$  a  $Z$  y de la aritmética al álgebra.

El segundo de los estudios (Ortiz, 1997) se inició con una investigación sobre razonamiento inductivo numérico en escolares de 9 a 12 años ante tareas de continuación de series de números naturales (Ortiz, 1993). Después de indagar en la historia y epistemología de la inducción y de las series numéricas, se realiza una revisión crítica de tareas inductivas con números naturales en libros de texto y se desarrolla un análisis exhaustivo de las tareas de continuación de series. A partir de aquí, teniendo en cuenta consideraciones de carácter cognitivo, se construye un modelo teórico de razonamiento inductivo numérico para el rango de edades de Educación Primaria, se confirma empíricamente la bondad del modelo, se obtiene una escala acumulativa y se realiza una indagación cualitativa para confirmar las regularidades y profundizar en sus causas.

Las dos investigaciones anteriores, aparentemente disparejas, se vieron involucradas en un proceso común que empezó a tomar consistencia con el primer Programa de Tercer Ciclo (bienio 96-98) de la Universidad de Málaga<sup>2</sup> y con los primeros estudios de un Proyecto de investigación subvencionado<sup>3</sup> en los que ya se establecieron las características básicas del marco teórico y metodológico actual (González, 1999). La continuación del Proyecto y el desarrollo del segundo Programa de Tercer Ciclo (bienio 98-2000) orientaron de manera definitiva el enfoque actual de la investigación, reforzando los planteamientos, acercando posiciones, estableciendo prioridades, sacando el máximo partido a los antecedentes, situando los estudios ya iniciados en un marco común más amplio, y estableciendo, como consecuencia, una línea-marco general sobre el diagnóstico y la evolución del razonamiento y la comprensión en Aritmética y Álgebra y

2. Programa de Tercer Ciclo: "Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales".

3. Proyecto "Diagnóstico y Evaluación de la comprensión del conocimiento matemático", subvencionado por la Universidad de Málaga (1997) y por la DGE (Ministerio de Educación y Cultura) con la referencia PB97-1066.

dos sublíneas mucho más específicas: Pensamiento Relativo aditivo y Razonamiento Inductivo Numérico y Algebraico; tres vías de trabajo estrechamente relacionadas.

## 2. ESTRUCTURA ACTUAL DE LA INVESTIGACIÓN: LÍNEAS Y ESTUDIOS PUNTUALES

En el esquema de la figura 1 se incluyen las líneas o tendencias de investigación (general y específicas) así como las relaciones entre ellas y las diferentes investigaciones puntuales actualmente en desarrollo. Como se observa en el esquema, el marco general en el que se sitúa la labor investigadora es una pequeña parte del campo del aprendizaje y la cognición en matemáticas, como es el razonamiento y la comprensión. A su vez, la mayor parte del trabajo se centra en el razonamiento y la comprensión de los alumnos en torno a conocimientos numéricos, aritméticos y algebraicos<sup>4</sup>, lo que significa una dedicación exclusiva a una reducida parcela del ámbito de interés del grupo “Pensamiento Numérico y Algebraico”. En este marco general se sitúan las tres líneas generales (A, B y C) en las que se agrupan los trabajos en curso, que corresponden a diferentes parcelas de la línea-marco general y de las que estamos especialmente interesados en las dos primeras, y dos sublíneas más específicas (I y II), que a su vez agrupan trabajos en desarrollo que participan de las dos líneas generales A y B y que resultan de la continuación de los dos estudios iniciales. Los trabajos puntuales<sup>5</sup> se citan en el esquema de la figura 2 mediante una expresión reducida del tema o contenido al que se refieren y se ilustran con los colores de las líneas y sublíneas con las que tienen una relación preferente. En el recuadro situado en el extremo inferior se han incluido aquellos estudios que tienen que ver con dos o más líneas, queriendo expresar que en ellos son especialmente significativas las relaciones entre campos diversos.

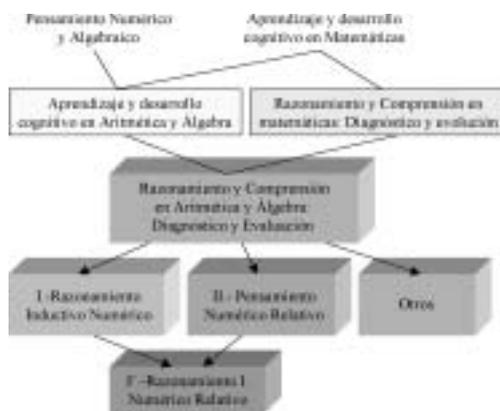


Figura 1. Marco general y líneas de trabajo

4. Campo que constituye, a su vez, una parte del ámbito de interés del grupo de la SEIEM “Pensamiento Numérico y Algebraico”.

5. Estas investigaciones puntuales se tratan con más detenimiento en documentos complementarios.

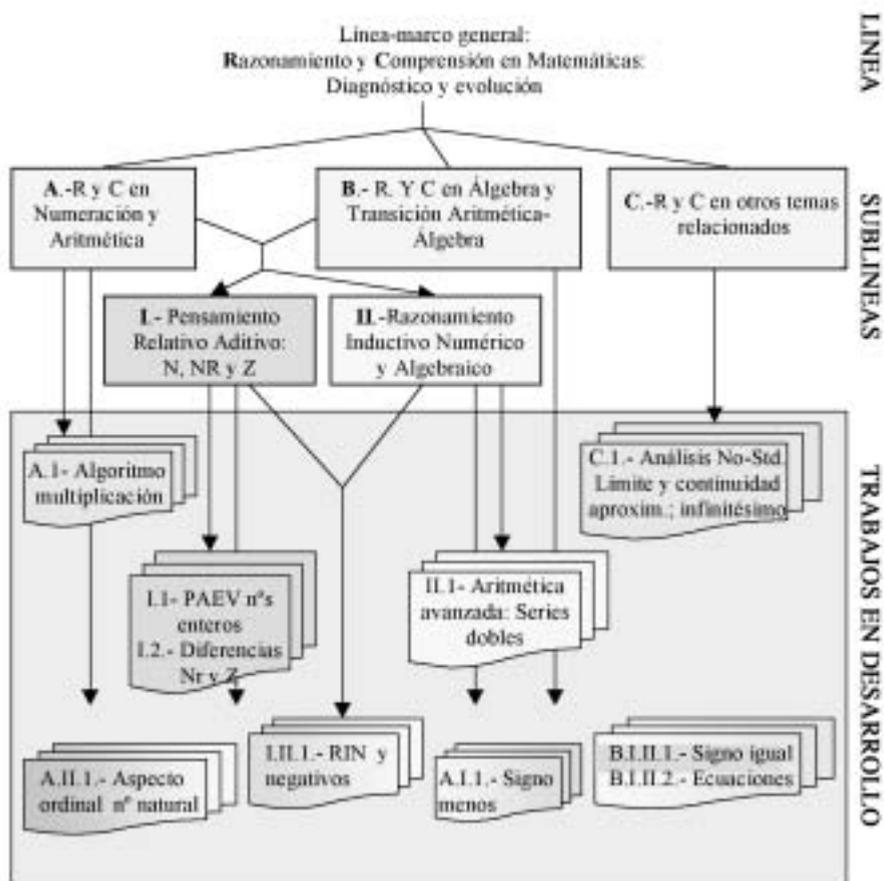


Figura 2.

*Líneas de investigación y estudios puntuales actualmente en desarrollo*

La línea-marco general se articula en torno a la comprensión del conocimiento matemático y a los medios para diagnosticar y evaluar el razonamiento y la comprensión así como su evolución por niveles y edades. La sublínea “Pensamiento Relativo Aditivo” se sitúa en el campo del razonamiento y la comprensión en torno a la ampliación de los naturales a los enteros y al dominio de aplicación de ambas nociones numéricas; involucra al pensamiento numérico, aritmético y algebraico y atiende también a la “transición de la aritmética al álgebra”. La sublínea “Razonamiento Inductivo Numérico y Algebraico” atiende a los procesos de razonamiento inductivo y sus relaciones con la comprensión del conocimiento aritmético y algebraico. En particular, trata de confirmar la bondad de un modelo evolutivo de Razonamiento Inductivo Numérico, con la consideración de la generalización aritmética y del paso al álgebra y al infinito, ampliar los estudios a otras estructuras numéricas y completar los perfiles de los diferentes niveles de razonamiento inductivo con otros tipos de tareas.

### 3. APROXIMACIÓN AL MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO EN EL QUE SE DESARROLLAN LOS TRABAJOS

La situación descrita es el resultado de un proceso en el que, junto a las aproximaciones de carácter empírico, se han ido realizando sucesivas reflexiones y aproximaciones teóricas que se han comunicado en anteriores encuentros de la SEIEM (Zamora, Pamplona, Valladolid). En este apartado tratamos de reflejar la situación actual del proceso, comenzando por unas reflexiones informales ligadas a la práctica y continuando por la actualización del planteamiento teórico formal que se expuso en la anterior reunión de la Sociedad.

#### ALGUNAS DUDAS, REFLEXIONES Y PROPÓSITOS

Es evidente que la potencialidad de los dos estudios iniciales sólo se puede poner de manifiesto: a) en relación con otros trabajos puntuales y b) con referencia a un marco amplio en el que sea posible tomar distancias y dar una mayor significación a los resultados. Ambos aspectos son importantes: el primero incide en la continuidad y, por tanto, en los propósitos, mientras que el segundo constituye un elemento regulador de la agenda de investigación. Es más, no creemos que sea posible avanzar significativamente si no se realiza ese doble juego de profundización y descentración, de continuación de estudios locales, profundos y específicos, y de indagación sobre los fundamentos, las relaciones y las referencias generales.

Pero este segundo aspecto es siempre problemático, provocando dudas que pueden afectar al desarrollo de los estudios: ¿Qué entendemos por Pensamiento Numérico y Algebraico?; ¿se trata de una línea de investigación o de un conglomerado de estudios que tratamos de relacionar entre sí y utilizar para avanzar?; ¿qué tendría que ocurrir para que pudiéramos hablar con propiedad de una línea de investigación?; ¿se deben separar el pensamiento numérico y el algebraico?; ¿dónde radican las conexiones?; ¿son sólo los contenidos matemáticos los que caracterizan a las investigaciones?; ¿qué introduce en este sentido la palabra “pensamiento”?; ¿hay algo más que números y álgebra?; ¿cuáles son los supuestos implícitos que venimos utilizando de forma reiterada?; ¿existe un marco teórico común o varios?; ¿cuáles son?; ¿es necesario y deseable buscar la unificación?; ¿es necesario y deseable que se confronten las ideas en este sentido?; . . .

En nuestro caso, estamos convencidos de la existencia de regularidades, de la posibilidad de predecir, de la posibilidad de establecer conocimientos científicos en el campo de la Educación Matemática; el problema radica, a nuestro entender, en la observación e interpretación de los fenómenos, cuya solución, si es que existe, requiere al menos de una cierta objetividad, de un espíritu integrador y de una cierta amplitud de miras. Por este motivo, sentimos la necesidad de buscar conexiones e integrar los conocimientos y los diversos modos de interpretar la realidad. Son numerosas las tendencias y las investigaciones puntuales entre las que es difícil identificar aspectos comunes y establecer relaciones significativas si no se observan desde una perspectiva amplia e integradora:

¿Tiene esto que ser así, irremediablemente?; ¿cuáles serían las referencias a tomar en caso contrario? Creemos que la integración es necesaria y previa a la toma de decisiones sobre los problemas, las prioridades, los enfoques y el diseño de los trabajos; en otras palabras, es importante cuidar los aspectos “microscópicos”, operativos o técnicos, pero también es necesario cuidar los aspectos “macroscópicos”, es decir, la fundamentación, las referencias generales, la efectividad y la relevancia de los resultados. Ello significa disponer de un marco teórico y metodológico específico (González, 1998) en el que se puedan generar modelos cada vez más completos, objetivos y próximos a la realidad, identificar más fácilmente los fenómenos de interés, situar claramente los problemas, justificar las decisiones adoptadas y rentabilizar los resultados. Del mismo modo, al trabajar en una estructura de prioridades y avanzar por medio de líneas de investigación consolidadas, se llegará a utilizar un esquema organizativo propio, un vocabulario común y unos criterios compartidos para evaluar la calidad, lo que debe conducir, probablemente (González, 1999), a un cuerpo de conocimientos ampliamente compartido.

Además del doble juego teórico y empírico y de la intención integradora, creemos que una línea de investigación debe presentar, entre otros, los siguientes aspectos: un interés definido o unos fines claros dentro de una estructura de prioridades, unos objetos o fenómenos a investigar claramente delimitados, un enfoque o marco teórico común, en el que se indiquen la naturaleza de los fenómenos, de la investigación en el campo, los paradigmas en los que se toman referencias, el papel y la importancia de los estudios empíricos o los supuestos de partida, entre otros aspectos, unos antecedentes localizados, una metodología concreta o unas pautas metodológicas comunes a todos los estudios, si bien con una cierta flexibilidad, una uniformidad en cuanto al tipo de estudios, tipos de tareas e instrumentos, una continuidad, una historia, una tradición y una estructura lógica clara y coherente. Entendemos que el trabajo que venimos desarrollando en la Universidad de Málaga cumple una buena parte de los requisitos indicados, de manera que podemos hablar de la existencia de una línea y varias sublíneas de investigación, aunque es cierto que se encuentran en fase de iniciación. En lo que sigue, directamente, así como en el resto del documento, indirectamente, se aportan pruebas y argumentos a favor de las afirmaciones anteriores, que no se han tratado más sistemática y extensamente por falta de tiempo y espacio.

En cuanto a las *prioridades de carácter general de las líneas de investigación*, pensamos que el proceso lógico debe seguir las “fases” ordenadas siguientes, de manera que el paso a una fase debe ir siempre precedido de un cierto detenimiento o consolidación en las fases anteriores. En la actualidad se puede decir que la investigación en la UMA se encuentra desigualmente distribuida entre las tres primeras fases, situación que permanecerá así durante un cierto tiempo hasta que se pueda pasar a indagar en aspectos de la cuarta fase y posteriormente a trabajar simultáneamente en la cuarta y quinta o en la tercera, cuarta y quinta:

1. Fase inicial. Los comienzos no son fáciles ni los logros inmediatos. Echar a andar y trabajar en la dirección de la integración mencionada requiere de

una atención escrupulosa a la *selección y el tratamiento de los antecedentes*, en un sentido amplio (no sólo antecedentes específicos), y a los fundamentos y resultados de las diversas tendencias que han abordado el problema y el área problemática. Es una tarea que hay que realizar antes de decidir qué investigar y cómo hacerlo. Como se indica en González (1999), el interés inicial se ha de centrar en el máximo aprovechamiento de la información disponible y con una cierta consideración hacia teorías, resultados y prácticas de disciplinas afines; siguiendo las pautas del análisis didáctico. La intensidad de trabajo en esta fase es máxima al comienzo de la línea de investigación y debe ir disminuyendo paulatinamente a medida que se avanza en los estudios puntuales; llegará el momento en el que sólo haya que incorporar los últimos resultados para actualizar la información. Del mismo modo, el desarrollo no tiene porqué ser exhaustivo antes de empezar los estudios empíricos; se pueden realizar sucesivos acercamientos en estudios relacionados según un plan de prioridades establecido.

2. *Prioridades y elección del problema.* En este aspecto nos referimos a las prioridades y elección del problema, supuesto determinados los aprendizajes y la dimensión cognitiva individual de los alumnos como áreas básicas y de interés prioritario (opción establecida así como consecuencia de un estudio teórico general previo sobre el campo de la investigación en Educación Matemática). Por tanto, se trata de la elección del problema dentro del campo de *la comprensión, el razonamiento, el aprendizaje y la cognición* en general como núcleos de la indagación a medio y largo plazo. En particular, el interés se centra en el diagnóstico y análisis de la naturaleza, características, niveles y evolución de los aprendizajes y de la comprensión del conocimiento matemático; los errores y las dificultades en los procesos de aprendizaje; las capacidades de razonamiento, su diagnóstico y evolución; los procesos individuales de constitución de los conocimientos así como las semejanzas y diferencias entre individuos diferentes; las representaciones cognitivas y significantes; las relaciones entre las experiencias y la formación de los conceptos; la adquisición de automatismos, procedimientos y destrezas.
3. Averiguar la *situación real* (cognitiva, de aprendizaje, de competencias, etc.) en lo que se refiere al razonamiento y a la comprensión / dominio individual y colectivo de diferentes aspectos del conocimiento matemático. Aquí son importantes: la delimitación precisa del fenómeno a observar (relaciones con otros fenómenos, contaminaciones, etc.); disponer de medios e instrumentos para facilitar la observación y de tareas adecuadas para provocar los comportamientos observables idóneos (validez de los instrumentos, reducción del campo, análisis riguroso de tareas, etc.). - minuciosa justificación de las tareas empleadas o de los criterios de construcción de los instrumentos.
4. Averiguar los factores, las causas y condiciones, tanto externas (socioculturales, institucionales, etc.) como internas (funcionamiento cognitivo, actitudes, creencias, condiciones afectivas, intelectuales, etc.) bajo las que se generan (que dan lugar a) tales situaciones y tratar de construir explicaciones causales plausibles de porqué ocurre así y cómo influye cada uno de los factores.

5. Diseñar y experimentar en su caso, allí donde sea posible, programas de intervenciones y modificación de condiciones, formas de actuación didáctica, diseños curriculares, planificaciones prácticas de aula, etc., orientados a mejorar / modificar las situaciones y condiciones constatadas en los puntos anteriores.

En todos los estudios se emplea una *metodología* mixta, en la que se combinan métodos no empíricos, como el análisis didáctico, y métodos empíricos y, dentro de estos últimos, métodos cuantitativos, para la validación empírica de tareas e instrumentos, la detección de regularidades, los estudios exploratorios y la construcción de escalas, y métodos cualitativos (entrevistas, etc), para confirmar los comportamientos y las regularidades encontradas, profundizar en las causas, averiguar el motivo de comportamientos singulares, profundizar en fenómenos no esperados y obtener los perfiles cognitivos de los distintos niveles de una escala. En general, los métodos no empíricos preceden a los empíricos y los cuantitativos a los cualitativos, en un proceso interno que va de lo teórico a lo empírico y de lo general a lo particular, de las descripciones generales y superficiales a las profundas y detalladas, de las macro-regularidades a las singularidades más extremas. El proceso metodológico se desarrolla en el orden siguiente:

- 1º) En los inicios del estudio, sobre todo al comienzo de la línea de investigación, y discrecionalmente en cualquier momento del desarrollo de los trabajos, se sigue una metodología no empírica como es el *Análisis Didáctico* (González 1995, 1999; Fernández Cano, 1996). Integrar los antecedentes en un marco común, organizar los conocimientos previos, establecer y analizar las prioridades, detectar las lagunas de las investigaciones anteriores, elegir el problema concreto y construir modelos teóricos contrastables empíricamente, son los principales fines de esta parte del desarrollo metodológico.
- 2º) Una vez definido el problema, se pasa al *análisis, construcción y validación empírica de tareas*. El problema a resolver es el siguiente: ¿cómo observar lo más fielmente posible la verdadera situación de la comprensión o de las competencias / conocimientos / capacidades / destrezas de los escolares de distintas edades y cursos? Nos parece que es una parte difícil y crucial en todos los estudios que estamos desarrollando; no es fácil encontrar tareas funcionales, sencillas e idóneas para observar los comportamientos adecuados sin la intervención de factores y variables extrañas, poner de manifiesto exactamente lo que queremos, descubrir pautas y regularidades y discriminar a los alumnos en los justos términos del problema de investigación.

La validación empírica se suele hacer mediante aproximaciones exploratorias en las que se construyen y aplican distintas pruebas formadas por distintos tipos de tareas y se analizan el comportamiento y las respuestas de los sujetos. A veces se modifica la cantidad de información o algún otro factor y se estudian los efectos en los comportamientos. A veces, se utilizan pruebas diferentes que se aplican a muestras equivalentes y se analizan las diferencias en las respuestas. A veces también, cuando es necesario, se completa el estudio con entrevistas.

tas individuales ocasionales; de aquí se suelen eliminar tipos de tareas y se modifican las pruebas hasta obtener una prueba definitiva. Igualmente, se suele revisar el problema y redefinir en función de los resultados provisionales obtenidos en esta parte.

En cualquier caso, la cuestión de las tareas y pruebas tiene una importancia especial, en la medida en que tiene que ver directamente con el diagnóstico y la evaluación, aspectos importantes en la línea de investigación general. Pero, además, disponer de criterios para conocer, distinguir entre sí y categorizar las tareas de un campo conceptual, permitirá alcanzar un panorama más completo sobre los conocimientos matemáticos, analizar la potencialidad didáctica de cada tipo de tarea a efectos de conducir a la comprensión y poner de manifiesto la situación de la misma, establecer niveles de competencias y cubrir eventuales lagunas curriculares; aspectos que alcanzan a la investigación, al diseño de currículos y material y a la práctica docente. Igualmente se podrá comprobar la idoneidad y grado de dificultad, elaborar y contrastar instrumentos para el diagnóstico de la comprensión y establecer criterios y escalas para la valoración objetiva de la verdadera situación de los conocimientos correspondientes así como de su evolución. Por último, con la información e instrumentos anteriores, se podrá analizar los distintos elementos del currículo y realizar las modificaciones oportunas, establecer, secuenciar y experimentar nuevos métodos y tareas en el proceso didáctico, analizar los libros de texto y el material escolar, realizar evaluaciones curriculares a gran escala y proceder, en consecuencia, a revisiones generales sobre la base de los resultados obtenidos.

3º) *Estudio cuantitativo*, de carácter correlacional, causal o meramente descriptivo sobre una muestra amplia, a ser posible significativa si se trata de poner de manifiesto regularidades que creemos que son extensibles a la población de partida. Igualmente este tipo de estudios será útil para poner de manifiesto singularidades y grupos de comportamientos especiales ante las pruebas preparadas. El estudio será de escalamiento o de construcción de una escala acumulativa cuando se apliquen las pruebas a una muestra significativa para obtener una escala que discrimine a los escolares por niveles de comprensión, conceptualización, etc.

4º) *Estudio cualitativo*, para confirmar los comportamientos y las regularidades encontradas, profundizar en las causas, averiguar el motivo de comportamientos singulares, profundizar en fenómenos no esperados, disponer de una información más amplia sobre el problema investigado y obtener los perfiles cognitivos de los distintos niveles de una escala. Este tipo de estudio se puede realizar mediante un análisis individual de las mismas tareas utilizadas en el punto anterior, una entrevista estructurada, semiestructurada o libre, dependiendo del problema, un estudio de casos, una observación de una situación natural o preparando y aplicando de manera restringida (individual o pequeño grupo) nuevas actividades complementarias que validen la escala obtenida y determinen el perfil de cada nivel.

## OTRAS CARACTERÍSTICAS COMUNES DE LOS ESTUDIOS PUNTUALES

### *Desde el punto de vista práctico:*

- Los estudios se realizan en situaciones que podemos llamar “naturales”, lo que asegura la relevancia y validez de los hallazgos, la utilidad práctica de los resultados y su capacidad innovadora o de transformación efectiva de la realidad. La complejidad es tratada de manera global y específica desde el principio, por lo que no hay necesidad de control de variables significativas, si bien dicha complejidad obliga a que se realicen varias investigaciones relacionadas para disponer de una información más completa sobre el mismo fenómeno.

- no hay necesidad de participación numerosa y comprometida de profesores en ejercicio como investigadores, lo que evita los problemas de formación y de coordinación de los trabajos;

- no se produce interferencia con el desarrollo curricular ordinario, lo que introduce numerosas ventajas para la planificación y el desarrollo de la investigación.

### *Desde el punto de vista teórico:*

- tareas no usuales (razonamiento inductivo, resolución de problemas, tareas constructivistas, etc.)

- búsqueda de un equilibrio entre teoría, resultados empíricos e incidencia real de los resultados en las aulas;

- carácter no local de los conocimientos generados; creíbles y capaces de ser compartidos, sistematizados, acumulados, replicados y validados, es decir, capaces de constituirse en conocimientos científicos. En este sentido se trata de un camino hacia la generalización, transferencia y replicabilidad de los resultados.

- el problema, el método y el marco teórico no son totalmente independientes; es posible hablar de un marco teórico común, identificador de la disciplina, estrechamente unido al marco metodológico. El marco teórico general debe presentar también, en cada caso, una parte común y una parte diferencial o específica del tipo de problema investigado. Si bien la aportación que presentamos constituye un modelo mixto en este sentido, es decir, no es sólo el problema lo que determina el método, sino que la propia naturaleza de los fenómenos determina una parte del método y este, en la medida en que proporciona una visión de conjunto del problema, incide a su vez en la decisión sobre el problema a investigar.

## UNA APROXIMACIÓN FORMAL ACTUALIZADA<sup>6</sup>

Las principales consideraciones o principios en los que se fundamenta el marco teórico y metodológico provisional en el que venimos desarrollando las investigaciones son los siguientes:

6. Presentada por primera vez en el III Simposio de la SEIEM, celebrado en 1999 en Valladolid.

### *Consideraciones generales*

1. Si aceptamos que la investigación en el campo de la Educación Matemática es científica y, por tanto, “indagación sistemática con fines epistémicos” (Rico, 1999), es evidente que los enfoques, métodos, supuestos, interpretaciones, conocimientos generados y otras características de dichos procesos de indagación van a depender, básicamente, de las determinaciones que se adopten con respecto a la naturaleza de los fenómenos. Estas determinaciones surgen, o deben surgir, en el seno de un proceso dialéctico continuo entre la teorización y construcción de modelos y los conocimientos empíricos. Las diferentes aproximaciones existentes en la actualidad en este sentido no pueden ser antagónicas, incompatibles o independientes, como a veces se quieren presentar a modo de “religiones” que pugnan entre sí por la posesión de la verdad<sup>7</sup>, sino que se encuentran relacionadas y se pueden valorar e integrar en un esquema de conjunto más amplio, buscando lo que las une, su utilidad, y no sólo lo específico, defectuoso o diferenciador.

2. Los fenómenos del campo de la Educación Matemática son complejos y sistémicos; en ellos interactúan numerosos factores relacionados, para cuyo análisis es imprescindible el estudio de dichas relaciones y la integración de perspectivas y procedimientos (Begle, 1961).

3. En dichos fenómenos intervienen aspectos generales, que forman parte también del interés de otras disciplinas, y aspectos que son específicos. Esta especificidad parcial se basa en la intervención decisiva del conocimiento matemático y de sus relaciones con otros campos (Vergnaud, 1990, pp. 22-23) en el marco de una “intencionalidad didáctica”.

4. Las características específicas del conocimiento matemático impregnan necesariamente todas las facetas de los fenómenos educativos en matemáticas, dotando de personalidad propia a los diferentes campos que intervienen y a las relaciones entre ellos. La aproximación interdisciplinar es insuficiente; también es inadecuada la consideración de la Didáctica de la Matemática como una prolongación o rama especializada de la Didáctica General o de la Psicología de la Educación (Fischbein, 1990, pp. 6-12).

5. El análisis de los problemas debe partir de lo más específico, como es el conocimiento matemático, siendo necesario revisar las actividades y el proceso de investigación en su concepción usual (Romberg, 1992, p. 51) para incluir un doble punto de vista: Un enfoque genuino, para fundamentar y organizar el campo mediante un procedimiento también específico (González, 1999), y un enfoque operativo interdisciplinar posterior, en el que se aborden los aspectos puntuales que se deducen del estudio anterior mediante las estrategias y métodos usuales “importados” de áreas afines. Estos últimos son adecuados para propósitos particulares, pero no son suficientes ni prioritarios y se deben supeditar a los resultados del análisis previo indicado.

7. Síntoma de acientificidad según el profesor Caro Baroja.

### *Sobre el conocimiento matemático*

6. El conocimiento matemático es un conocimiento perfectible, sujeto a errores, parcial e incompleto y tiene que ver con ideas u objetos conceptuales a los que el ser humano accede mediante el descubrimiento y la invención o creación no arbitrarias. Estos objetos son independientes de su simbolización, tienen una existencia ficticia o convencional y comparten dos ámbitos diferentes: el conceptual individual y el supraindividual, cultural o colectivo como parte de la conciencia compartida (Popper, 1979).

7. Los fenómenos que organizan los conceptos matemáticos son los objetos, sus propiedades, las acciones sobre ellos y las propiedades de estas acciones, pertenecientes todos ellos a un mundo único en expansión que contiene los productos de la cognición humana y, en particular, los productos de la actividad matemática (Puig, 1997, pág. 67).

8. La creación / descubrimiento del conocimiento matemático se encuentra condicionada por lo que hay de común a todos los individuos y culturas que la han hecho y la hacen posible: las características comunes de la mente humana (fisiológicas, entre otras), del medio (físicas, sociales, culturales, entre otras) y de la interacción entre ambos (que proceden, entre otros motivos, de las necesidades propias de la adaptación del sujeto al medio). La intervención de los tres factores (mente, medio e interacción) se produce en todas las interpretaciones sobre la naturaleza y la producción del conocimiento matemático (González, Pascual y Flores, 1994).

### *Sobre el aprendizaje y la cognición en matemáticas*

9. El enfoque evolutivo o de desarrollo es adecuado y útil para la investigación en Didáctica de la Matemática. El conocimiento matemático en el sujeto individual evoluciona tanto cualitativa (comprensión) como cuantitativamente (extensión). El enriquecimiento intelectual no consiste sólo en descubrir nuevas verdades sino en cambiar las perspectivas o desarrollar nuevos puntos de vista sobre el conocimiento ya existente.

### *Sobre la Educación Matemática, sus factores y relaciones*

10. El campo de la Educación Matemática está constituido por el conjunto de fenómenos relacionados con las actividades humanas, sociales y culturales ordenadas y orientadas a hacer posible, desarrollar y optimizar la personalización, transmisión y creación de la cultura matemática considerada como experiencia colectiva organizada. Una de las finalidades primordiales de la Educación Matemática es la preparación de la intervención activa del individuo en la sociedad. El sistema convencional de enseñanza de las matemáticas y sus procesos de aprendizaje (Steiner, 1984), la formación de profesores de matemáticas y el Área de Conocimientos Didáctica de la Matemática constituyen partes importantes del campo de la Educación Matemática.

11. El análisis de los fenómenos del campo de la Educación Matemática debe incluir los análisis epistemológico, sociocultural, cognitivo y fenomenológico, que se han de relacionar entre sí y con un análisis sobre la enseñanza y el currículo como aspectos específicos y terminales.

12. Los factores que intervienen se pueden agrupar en torno a tres grandes áreas: la que corresponde al conocimiento, en la que hemos de destacar, a su vez, cuatro subáreas relacionadas: El conocimiento en sí (sobre Matemáticas o sobre Didáctica de la Matemática), su Historia, su Epistemología y su Fenomenología; la que hace referencia a los sujetos, atendiendo al aprendizaje y a la cognición, bajo el dominio de la Psicología; la que atiende a los medios en los que se producen las relaciones, con dos subáreas importantes: el medio sociocultural, bajo el ámbito de la Sociología, la Antropología y la Cultura, y el medio educativo formal, que engloba todo lo relacionado con la Enseñanza y el Currículum.

13. Los análisis epistemológicos, fenomenológicos y cognitivos deben tener una orientación marcadamente didáctica. El interés se debe centrar en obtener información relevante para la enseñanza y el aprendizaje, lo que supone tener presente al alumno, sus necesidades y capacidades, el aula, las actividades, los métodos y técnicas didácticas usuales, etc.. Con la información obtenida bajo este enfoque peculiar se encuentra la conexión entre las distintas partes bajo una referencia común: *el pensamiento matemático individual y colectivo, su evolución, sus relaciones con otros tipos de pensamiento y su educación*.

14. Se sitúan en una posición privilegiada las relaciones entre la Epistemología y la Psicología y entre estas dos y la vertiente pedagógica, en lo que constituye un campo con múltiples relaciones que demandan una integración previa a la realización de los estudios particulares de las distintas parcelas que lo componen y desde los diferentes enfoques que se vienen utilizando; una integración que no debe agotarse en una simple adición de datos procedentes de campos y enfoques diferentes (concepción interdisciplinar), sino que requiere de una elaboración compleja que demanda una metodología específica que trasciende los procedimientos que se vienen utilizando.

### *Sobre la Didáctica de la Matemática, sus factores y relaciones*

15. La Didáctica de la Matemática es un Área de conocimientos sobre los fenómenos relacionados con la enseñanza, el aprendizaje y la comunicación de las matemáticas (fenómenos de la Educación Matemática) en la institución educativa y en el medio social. Una de sus principales finalidades es identificar y resolver los problemas para optimizar los procesos educativos. Dos de sus principales tareas son: a) la investigación o indagación metódica y disciplinada con fines epistémicos sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y b) la investigación y el desarrollo de la formación de profesores de matemáticas; dos tipos de tareas y fenómenos estrechamente relacionados (González, 1999).

16. Bajo el epígrafe a) se pueden identificar y separar, a efectos teóricos, las siguientes parcelas que en la práctica interactúan y operan conjuntamente: los aprendizajes y la cognición, la enseñanza y los procesos reales de enseñanza-aprendizaje. Las tres se encuentran estrechamente relacionadas bajo el dominio de la Psicología, la Pedagogía, la Didáctica General y la Sociología (Fischbein, 1990, pp. 6-12), en lo que constituye un primer nivel centrado en las finalidades educativas y en las características generales del conocimiento matemático. A su

vez, este primer nivel presenta una dependencia de otros factores, como son: la Matemática, su Epistemología y su Historia o la Fenomenología, en lo que constituye un segundo nivel más específico, centrado en las finalidades y en los contenidos matemáticos.

17. Los factores o componentes básicas de los fenómenos del tipo a) son: Los conocimientos “de” y “sobre” las Matemáticas, la Epistemología, la Historia y la Fenomenología del conocimiento matemático; los aspectos socioculturales relacionados con el conocimiento matemático; el aprendizaje y la cognición en relación con las matemáticas; la enseñanza y los aspectos curriculares en relación con el conocimiento matemático.

18. Los factores o componentes básicas de los fenómenos del tipo b) son: La Didáctica de la Matemática o Área de Conocimientos sobre los fenómenos del apartado anterior (conocimientos relacionados con la Educación Matemática), abarcando: los conocimientos “de” y “sobre” la Educación Matemática, la Historia, la Epistemología y la Fenomenología de la Educación Matemática; los aspectos socioculturales relacionados con el campo de la Educación Matemática y con el sistema de enseñanza de las matemáticas; el aprendizaje y la cognición de los profesores en formación y en ejercicio en relación con los fenómenos de la Educación Matemática; la enseñanza y los aspectos curriculares específicos de los planes de formación de profesores.

19. Las tres áreas básicas (conocimiento, sujetos y medios) y los factores mencionados son fuentes de información para los diseños curriculares, de tal manera que es posible justificar, situar y completar los organizadores curriculares (Rico, 1997) dentro del marco teórico que estamos describiendo. Es decir, el marco teórico tiene también utilidad para la elaboración de diseños curriculares en Matemáticas y en Didáctica de las Matemáticas, aportando información esencial sobre los distintos elementos (González, 1999, pp. 129 y 141).

### *Sobre la investigación y la metodología*

20. Las áreas y factores indicados en los puntos anteriores constituyen fuentes de información primaria para la investigación sobre cada uno de los dos tipos de fenómenos señalados. Dicha información debe siempre ser matizada y analizada en el marco general de la intencionalidad didáctica para los fenómenos del tipo a) y de la intencionalidad formativa profesional para los fenómenos del tipo b); ambas intencionalidades son diferentes y dotan de personalidad propia a las investigaciones correspondientes.

21. La información primaria o básica sólo comienza a adquirir el carácter de información específica del campo de estudio y a profundizar en la naturaleza compleja y sistémica de los fenómenos cuando se le hace intervenir en una red de relaciones entre las áreas y factores en juego (González, 1995, 1999). El análisis cualitativo de dichas relaciones permite integrar informaciones aisladas, a veces dispersas y aparentemente dispares, proporcionando nuevos conocimientos y modelos teóricos y abriendo nuevas perspectivas. La profundidad y la extensión de dicho análisis dependen del problema y de la situación de las investigaciones anteriores.

22. El análisis mencionado requiere de una elaboración compleja que demanda una metodología específica que trasciende los procedimientos que se vienen utilizando. Para ello, empleamos el método específico que hemos denominado “Análisis Didáctico” (González, 1998) y que consiste en un procedimiento cualitativo no empírico que toma como punto de partida los principios del meta-análisis, la revisión multivocal y lo que se conoce como análisis conceptual.

23. El empleo del Análisis Didáctico, la intervención de las tres áreas básicas y sus componentes o factores en el marco de la intencionalidad específica y la red de relaciones como núcleo del estudio teórico y generador de modelos, no intervienen en la aproximación interdisciplinar usual. Estamos ante una nueva aproximación por la que se establece una parte específica (hasta ahora previa en el desarrollo de la investigación, aunque no tiene porqué ser así) que organiza el campo de fenómenos, facilita las decisiones sobre el problema y el diseño de la investigación y proporciona un marco amplio en el que se pueden integrar otras aproximaciones.

## REFERENCIAS

- Begle, E. (1979). *Critical variables in Mathematics Education*. Washington, D. C.: MAA. NCTM.
- Bishop, A. J. (1992). International perspectives on research in Mathematics Education. En: Grouws, D. A. (eds.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 710-723). New York: MacMillan Publishing Company.
- Fernández Cano, A. (1995). *Métodos para evaluar la investigación en Psicopedagogía*. Madrid: Síntesis.
- Fischbein, E. (1989). Introduction. En Nesher, P.; Kilpatrick, J. (edit.) *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Cambridge: Cambridge University Press; pp. 1-13.
- González, J. L. (1995). *El campo conceptual de los números naturales relativos*. Colección Monografías de Investigación. SPICUM Universidad de Málaga.
- González, J. L. (1998). *Números naturales relativos*. Colección Mathema. Granada: Editorial Comares.
- González, J. L. (1999). *Proyecto Docente*. Didáctica de la Matemática. Universidad de Málaga. Inédito.
- González, J. L. (1999). Comentarios a la ponencia “Ingranaggi e cerchi”. *Actas Escuela de Verano de Didáctica de la Matemática Luso-Italo-Española*. Santarem (Portugal), 6-10 de julio. En prensa.
- González, J. L.; Pascual, J. R.; Flores, P. (1994). Epistemología y Educación Matemática. Capítulo en Rico, L.; Gutiérrez, J. (edit) *Formación científico-didáctica del Profesor de Matemáticas de Secundaria*. Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada. pp. 25-39.
- González, J. L. y otros, (1990). Números enteros. Madrid: Síntesis.
- Hiebert, J.; Carpenter, T. (1992). Learning and Teaching with understanding. Capítulo 4 en Grouws, D. A. (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: MacMillan Pub. Co.

- Ortiz, A. (1993). *Series Numéricas y Razonamiento Inductivo*. Memoria de Tercer Ciclo. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Ortiz, A. (1997). *Razonamiento Inductivo Numérico*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Popper, K. R. (1989). *Conjeturas y refutaciones. El desarrollo del conocimiento científico*. Barcelona: Paidós.
- Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En Rico, L. (ed.) *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona: ICE-Horsori.
- Rico, L. (1997). Los Organizadores del Currículo de Matemáticas. En Rico, L. (ed.) *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona: ICE-Horsori.
- Rico, L. (1999). Educación Matemática, Investigación y calidad. Contribución al Panel: "Qualidade da Investigaçao". *Actas Escuela de Verano de Didáctica de la Matemática Luso-Italo-Española*. Santarem (Portugal), 6-10 de julio. En prensa.
- Rico, L.; Castro, E.; Sierra, M. (1999). *Didáctica de la Matemática*. Documento inédito. Autores.
- Romberg, T. (1992). Perspectives on Scholarship and Research Methods. En Grouws, D. A. (eds.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 49-64). New York: MacMillan Publishing Company.
- Sierpinska, A.; Kilpatrick, J. (eds.) (1998). *Mathematics Education as a research domain: A search for identity*. Dordrecht: Kluwer.
- Steiner, H. G. y otros (eds.) (1984). *Theory of Mathematics Education*. ICME 5. Institut für Didaktik der Mathematik. Universität Bielefeld.
- Vergnaud, G. (1990). Epistemología y Psicología de la Educación Matemática [Capítulo 1]. En Neshier, P.; Kilpatrick, J. (eds) *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Cambridge: Cambridge University Press; 1990: pp. 14-30.
- Vergnaud, G.; Durand, C. (1976). Structures additives et complexité psychogénétique. *Revue Française de Pédagogie*, 36, pp. 28-43.