La enseñanza del análisis matemático en el bachillerato y primer curso de universidad. Una perspectiva desde la teoría de los obstáculos epistemológicos y los actos de comprensión[1]

Ángel Contreras de la Fuente
Universidad de Jaén

RESUMEN

La enseñanza del Análisis Matemático en 1º y 2º de Bachillerato y primer año de Universidad, presenta unos problemas, asociados a los fenómenos didácticos inherentes al estudio de las Matemáticas, que es necesario tipificar a partir de la modelización del conocimiento matemático y del proceso de enseñanza escolar. En este Proyecto se estudian los conceptos elementales del Análisis Matemático –límite, continuidad, derivada e integral- desde la perspectiva de los obstáculos epistemológicos y de los actos de comprensión (Sierpinska, 1997), en cuanto al saber escolar (detectado en los manuales), el saber enseñado (que figura en los apuntes de los profesores) y el saber del alumno (identificado por medio de sus respuestas a un cuestionario) tratando de extraer datos que faciliten el uso de estrategias de enseñanza-aprendizaje de estas nociones en situaciones de enseñanza adecuadas.

1. INTRODUCCIÓN

Para poder responder al estudio de los problemas didácticos relacionados con la enseñanza del Análisis Matemático en el nivel elemental, identificado en los dos cursos del Bachillerato y en el primer curso de Universidad, se constitu-

1. En torno al Proyecto de Investigación: “Estudio sobre la enseñanza-aprendizaje de conceptos fundamentales del análisis matemático -límite, continuidad, derivada e integral- en manuales y en estudiantes del Bachillerato-LOGSE y de primer curso universitario”, financiado por el C.I.D.E.

yó, a principios de 1997, el grupo internivel GEAMJA (grupo de enseñanza del Análisis Matemático de Jaén)[2]. El grupo solicitó en la convocatoria del C.I.D.E. (Ministerio de Educación y Cultura) de 1997[3], y obtuvo, el *Proyecto de Investigación: "Estudio sobre la enseñanza-aprendizaje de conceptos fundamentales del análisis matemático (límite, continuidad, derivada e integral) en manuales y en estudiantes del bachillerato-LOGSE y de primer curso universitario"*.[4]

2. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Uno de los fenómenos didácticos que considero fundamental dentro de la enseñanza del Análisis Matemático es el de la "algebrización del cálculo diferencial escolar", ya señalado por Artigue (citado en Gascón, 1998) que se manifiesta en un enfoque algebraico y reduccionista del cálculo y se basa en las operaciones algebraicas con límites, derivadas e integrales, pero que trata de una forma simplista las ideas y técnicas específicas del Análisis, como son la idea de razón de cambio instantáneo, o el estudio de los resultados de esas razones de cambio.

De este fenómeno didáctico, la algebrización del cálculo diferencial escolar, emerge un problema didáctico-matemático, cuyo estudio implica abordar todo un complejo entramado de problemas de investigación que suponen un verdadero programa de investigación.

La preocupación por la actividad matemática que se realiza en las clases y, por tanto, la focalización en la modelización de las tareas y técnicas -enfoque antropológico (Gascón y Fonseca, 2000)- o en los significados personales emergentes de esas tareas -teoría del significado (Godino y Batanero, 1999 y Font, 1999)- tiende a considerar la propia tarea como "primitiva", que se acepta de modo acrítico en las teorías. Sin embargo, pensamos que las tareas que se plantean en las clases no son "inocentes". Así, cuando el profesor "explica" una determinada noción matemática y, por desgracia, no aborda o lo hace de forma superficial los problemas característicos del Análisis, deslizándose hacia posturas algorítmicas más fáciles de gestionar y evaluar -en una verdadera ruptura del contrato didáctico (tipificado ya de forma clásica por lo que Brousseau denomina "efecto Topaze")-, no lo hace por falta de responsabilidad o por comodidad, sino porque se enfrenta de forma fatalista a unos conceptos que, por su natura-

2. La composición del grupo es la siguiente: Responsable del grupo: Ángel Contreras de la Fuente. Didáctica de la Matemática. Universidad de Jaén. Colaboradores: - Carmen Sánchez Gómez. Matemática Aplicada. Universidad de Jaén. - Manuela Ortega Carpio. Matemática Aplicada. Universidad de Jaén. - Lorenzo Luque Cañada. Profesor de Enseñanza Secundaria. I.E.S. "Pablo de Olavide". La Carolina (Jaén). - Lourdes Ordóñez Cañada. Profesora de Enseñanza Secundaria. I.E.S. "Auringis". Jaén.

3. Convocatoria correspondiente a la Orden de 23 de septiembre de 1997, (B.O.E. núm. 243 del 10-10-97).

4. Además, dos de los miembros, la profesora Sánchez y quien suscribe, son miembros del Proyecto PB97-0851 del M.E.C: "Fenómenos didácticos ligados a la adquisición de conceptos matemáticos fundamentales en Educación Secundaria y Universidad."

leza, son problemáticos en sí mismos. Es decir, se encuentra ante diversos obstáculos epistemológicos que, junto a los obstáculos propios del desarrollo de la clase (didácticos), han de ser superados, por medio de los actos de comprensión, por los estudiantes, si se busca que éstos vayan madurando los problemas específicos y más significativos del Análisis Matemático.

En el proyecto de investigación aludido anteriormente, se estudian los conceptos de: límite -Sierpinska (1990), Sánchez (1997), Sánchez y Contreras (1998), Contreras y col. (1999b) y Blázquez (2000)-, continuidad -El Bouazzoui (1988), Campillo (1999) y Contreras y col. (1999a)-, derivada - Azcárate (1990), Castela (1995), Cajaraville (1996), Font (1999) y Contreras y col. (2000a) e integral –Schneider (1988), Wenzelburger (1989), Turégano (1993) y Bessot y col. (1999).

3. MARCO TEÓRICO

3.1. Obstáculos epistemológicos

Se considera que la noción de obstáculo epistemológico, idea central de esta investigación, es suficientemente conocida por la comunidad de investigadores de Didáctica de las Matemáticas, por lo que no es necesario dar una definición del mismo. Igual ocurre con el término acto de compresión, ya clásico sobre todo en los trabajos basados en la teoría de Sierpinska. Por tanto, se tratará de fundamentar la utilización de estos conceptos como medio para abordar una investigación de los objetos del Análisis Matemático ya especificados.

El desarrollo del conocimiento no es acumulativo, es decir, cuando se pasa de un nivel de comprensión a otro se da simultáneamente una integración y una reorganización del conocimiento. Me parece pertinente la idea de Bachelard (citado en Sierpinska, 1997) cuando afirma que se conoce *contra* un conocimiento anterior, reelaborando conocimientos que no funcionan ante determinados problemas, superando lo que es un obstáculo al conocimiento. En este sentido Sierpinska señala: “Una nueva comprensión no es más que parte construida sobre las maneras anteriores de comprender”.

La filosofía de los obstáculos epistemológicos constituye una barrera a las ideas positivistas que postulan que el conocimiento científico se puede construir apoyándose únicamente en la observación y en la lógica, fuera de toda consideración metafísica. En relación con esto, Sierpinska (1997) puntualiza: “La comprensión científica no puede hacer abstracción de la metafísica, lo que supone que siempre existirán obstáculos epistemológicos” (p. 127).

Como han señalado algunos investigadores (Radford, 1997 y Artigue, 1998), la cultura es un factor de gran influencia en la noción de obstáculo epistemológico. Es decir, el desarrollo del conocimiento no tiene lugar únicamente dentro de la estructura de la evolución natural del sujeto, sino también, dentro de las estructuras socioculturales del desarrollo.

Cuando se tienen en cuenta los factores socioculturales, la noción de obstáculo epistemológico adquiere un giro importante. Es decir, como el conocimiento es también una producción cultural ineludiblemente relacionada con el medio, los factores culturales influyen en los obstáculos epistemológicos. Como señala Radford (1997): "Las Matemáticas son, básicamente, manifestaciones semióticas de ciertos elementos culturales que sus miembros desarrollan a través de experiencias compartidas y desde donde se forman el significado de los productos" (p. 30). Habrá, por tanto, que considerar que los obstáculos epistemológicos están ligados tanto al desarrollo personal como al medio cultural.

Una de las raíces de los obstáculos epistemológicos es de origen psicogenético, dado que el obstáculo epistemológico es una concepción que forma parte de un sistema de nociones, de modos de pensar, de creencias, que no pueden ser modificados ni eliminados sin que su incidencia afecte al sistema completo. Ahora bien, en la clase de Matemáticas, cuando el profesor muestra a sus alumnos cómo resolver problemas concretos, dirige su atención sobre las informaciones pertinentes desde el punto de vista matemático, dejando al margen las que no lo son, utiliza determinados recursos didácticos, … Es decir, trasmite una cultura. Ésta es, por tanto, una forma de comunicación, un comportamiento adquirido y común y un esquema de pensamiento, en el que la enseñanza y el aprendizaje juegan un papel crucial. Se pueden ver las Matemáticas como un sistema cultural en evolución y desarrollo.

Sierpinska (1997), basándose en la teoría de la cultura de Hall, considera tres niveles en la cultura matemática: "se pueden distinguir tres modos de pensamiento matemático, tres maneras de trasmitir este pensamiento, tres tipos de conocimiento, tres índoles de relaciones emocionales: el formal, el informal y el técnico" (p. 160). En el nivel formal la comprensión se apoya en las creencias, mientras que el informal se basa en los esquemas de acción y de pensamiento; por último, el nivel técnico hace referencia a un saber explícito, analítico y que se exige lógicamente coherente y justificado en el plano racional.

En una cultura matemática dada el nivel informal juega un papel crucial, positivo y negativo a la vez. Las formas implícitas de abordar y resolver los problemas aparecen aquí y, con ellas, el pensamiento matemático creativo. Sin embargo, en la medida en que este conocimiento y esta comprensión no son plenamente conscientes y cuestionados y están ligados a experiencias reales y a situaciones concretas, son susceptibles de conducir a un callejón sin salida cuando se aplican a una situación nueva. Se puede utilizar inconscientemente el mismo esquema de pensamiento o de acción y observar que no se dan los buenos resultados que se esperaban. Es decir, se puede estar frente a un "obstáculo", cuya superación supondrá cambiar nuestra manera de comprender. El nivel informal constituye, por tanto, la base de los obstáculos epistemológicos.

Cuando se estudia un determinado concepto a lo largo de su evolución epistemológica (ver por ejemplo, Sánchez y Contreras, 1998, para el caso del límite de una función), aparecen concepciones que no son capaces de dar respuesta a nuevos tipos de problemas, pero que están muy ancladas en la cultura del momento y sí responden a otro tipo de problemas. Se hablará en estos casos de la idea de obstáculo epistemológico. Considero, por tanto, que se trata de obstáculos epistemológicos que surgen del nivel técnico de una etapa histórica concreta, como concepciones válidas para determinados campos de problemas, pero que se relegan al nivel informal en la época posterior, en la que emerge una nueva concepción (de esta manera creemos que debería quedar zanjada la polémica planteada por Radford en el trabajo citado). Como apunta Gascón (citado, en Cid (2000)), un obstáculo epistemológico debe buscarse en los orígenes de una bifurcación, entendiendo por tal un cambio en la naturaleza del trabajo matemático, tanto en lo referente a las técnicas como al campo de problemas que aborda.

Por otra parte, como señala Cid (2000), "la determinación de obstáculos en la historia de las Matemáticas es interesante desde el punto de vista didáctico si se constata su supervivencia en la enseñanza actual y, en particular, en los alumnos actuales. Un obstáculo epistemológico es, ante todo, una concepción detectable en un número significativo de alumnos que puede ser puesta en relación con ciertas nociones históricas" (p. 9). Es decir, el término obstáculo tiene un aspecto cognitivo ineludible que está ligado a los niveles formales e informales del conocimiento matemático.

3.2. Actos de comprensión

Sierpinska, basándose en las ideas de Vygotski sobre la formación de los conceptos espontáneos y científicos, al formular la hipótesis de que para que el sujeto comprenda ha de enfrentársele -mediante situaciones de enseñanza adecuadas- a los obstáculos epistemológicos inherentes a un determinado saber, de tal forma que se facilite la emergencia, por parte del sujeto, de los actos de comprensión necesarios para la superación de los obstáculos, propone cuatro operaciones mentales fundamentales que intervienen en la comprensión:

- La identificación, en el sentido de descubrimiento o de reconocimiento. Si se señala que se ha identificado un objeto de comprensión, quiere decir que se ha extraído del campo de la inconsciencia, donde se encontraba como oculto; además, también supone reconocer algo que se tiene intención de comprender.
- La discriminación, que consiste en la identificación de dos objetos como distintos. Se consideran varios grados en la discriminación y en identificación; desde la simple percepción, hasta la comparación de dos ideas generales bajo la perspectiva de las relaciones abstractas - pasando por la comparación por medio de circunstancias sensibles.
- La generalización, operación intelectual por la que se reconoce que una situación dada es un caso particular de otra situación - término que se utiliza en sentido amplio, es decir, para designar una clase de objetos (materiales a mentales) o de fenómenos -.
- La síntesis, búsqueda de un principio unificador, o de una semejanza entre varias generalizaciones que permite unificarlas como un todo.

Hay varias condiciones necesarias para que se dé un acto de compresión. Unas son de índole psicológico, como la atención y la intención de comprender, otras de carácter social, ligadas obviamente a las anteriores, como son el diseño de actividades significativas que logren captar la atención del alumno y la comunicación, como medio para poder debatir y validar las propuestas de solución a dichas actividades.

3.3. Los objetos del Análisis Matemático

Que el obstáculo epistemológico está presente en numerosos conceptos del Análisis Matemático se pone en evidencia recurriendo a algunos ejemplos. Así, Schneider (1988) considera como obstáculo epistemológico lo que denomina el "obstáculo de la heterogeneidad de las dimensiones" (pensemos simplemente lo que supone para un estudiante que se le diga que el área -magnitud bidimensional- de una región encerrada por la gráfica que representa a la velocidad es el espacio recorrido por el móvil, que es unidimensional). Sierpinska cita el propio teorema de Bolzano como fuente del obstáculo, relacionado con la continuidad, que considera a una función continua como aquella función cuya gráfica es conexa.

En El Bouazzoui (1988), un trabajo ya clásico, aparece un análisis muy completo sobre obstáculos y concepciones del concepto de continuidad. Basados en Cornu (1983) y Sierpinska (1985, 87, 90), Sánchez (1997) y Sánchez y Contreras (1998) pusieron de manifiesto la existencia de diversos obstáculos epistemológicos y actos de comprensión asociados a la noción de límite de una función en un punto. Asimismo, en Ruiz (1994) hay un detallado y excelente estudio sobre concepciones y obstáculos relativos al concepto de función.

Por otra parte, la enseñanza del Análisis Matemático en los niveles preuniversitario (de 1º y 2º de Bachillerato) y primer año de Universidad, sigue actualmente un programa que, aunque se vertebra en torno a la noción de límite, fluctúa entre los conceptos de continuidad, límite, derivada e integral. Como señala Cantoral (2000): "la visión más extendida, la más dominante, entre los cursos de Análisis Matemático consiste en asumir al análisis escolar como un aparato simbólico que opera sobre variables, que se ocupa de su optimización, de sus derivadas e integrales, así como de resolver problemas que involucren tasas de crecimiento, cálculos de longitud de curvas, áreas y volúmenes" (p. 2).

En el Proyecto se estudian los conceptos de límite, continuidad y derivada en los niveles anteriormente aludidos, desde la óptica de los obstáculos epistemológicos y actos de comprensión. Sin embargo, en futuros desarrollos se piensa ampliar y orientar estas cuestiones hacia ideas que aborden aspectos relacionados con la organización de una actividad cuya intención declarada sea el aprendizaje de un cierto saber.

4. DISEÑO Y METODOLOGÍA

4.1. Hipótesis

La experiencia de tres de los miembros participantes en este proyecto como profesores de Enseñanza Media y Universidad y como Coordinadores de Matemáticas I de COU y Ponentes de Matemáticas II del Bachillerato-LOGSE en los últimos 4 cursos (continuando en la actualidad uno de ellos), las diversas investigaciones efectuadas sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje relativos al concepto de límite, junto a la experiencia de los restantes miembros como profesores en enseñanza secundaria, nos permite formular las siguientes hipótesis de trabajo:

- Con referencia a las situaciones de enseñanza donde aparecen los conceptos de límite, continuidad, derivada e integral, los libros de texto y los estudiantes muestran unas concepciones que pueden, en general, identificarse dentro de las que el estudio histórico determina sobre la noción.
- En el tratamiento didáctico que se da a los conceptos de límite, continuidad, derivada e integral, en los textos dirigidos al Bachillerato-LOGSE y al primer curso de Universidad, no aparece de modo sistemático una secuenciación adecuada de los pasos necesarios para provocar los actos de comprensión en el estudiante que le permitan superar los obstáculos inherentes al concepto y al proceso de transposición didáctica.
- Los estudiantes del Bachillerato-LOGSE y de primer curso universitario no muestran, en general, una evolución en la comprensión de los conceptos objeto de estudio, en cuanto a la ampliación de sus concepciones y la superación de obstáculos, una vez recibida la instrucción.
- Las respuestas erróneas de los estudiantes no ocurren al azar, sino que están asociadas a los distintos obstáculos inherentes a los conceptos y al proceso de transposición didáctica.

4.2. Objetivos

Para dar respuesta a las hipótesis formuladas, se propone un *doble objetivo general:*

- La identificación de los factores y fenómenos didácticos que influyen en una adecuada comprensión, por parte de los estudiantes, de los conceptos fundamentales del Análisis Matemático: límite, continuidad, derivada e integral.
- El logro de una armonización de la enseñanza, por medio del uso de estrategias de enseñanza-aprendizaje en situaciones didácticas adecuadas, en los cursos que enlazan dos niveles educativos (Bachillerato-LOGSE y Universidad).

Para alcanzar este doble objetivo general se requieren los siguientes objetivos específicos:

Objetivo específico 1: Análisis epistemológico de la génesis y evolución histórica de las distintas nociones objeto de estudio.

Objetivo específico 2: Análisis comparativo de libros de texto actuales, según autor y nivel de enseñanza, respecto a los conceptos de límite, continuidad, derivada e integral.

Objetivo específico 3: Estudio cualitativo-cuantitativo de la evolución de concepciones y obstáculos de los estudiantes de ambos niveles por medio de cuestionarios aplicados antes y después de la enseñanza de los conceptos.

Objetivo específico 4: Realización de un diagnóstico, a la vista de los resultados obtenidos, sobre los contenidos y el tipo de enseñanza a realizar en ambos niveles educativos con objeto de lograr su armonización.

4.3. Población, muestra y procedimiento de muestreo

El universo donde se realiza la investigación lo constituyen, por una parte, los libros de texto más utilizados en la enseñanza de los conceptos matemáticos, antes señalados, en el Bachillerato-LOGSE y primer curso de Universidad y, por otra, los estudiantes de los cursos que enlazan ambos niveles educativos: 2º de Bachillerato-LOGSE y primer curso de enseñanza universitaria científico-tecnológica.

De acuerdo con las características de este proyecto, la muestra y el tamaño de la misma considerados en cada caso es la siguiente:

- Estudiantes de 2º curso de Bachillerato-LOGSE de los I.E.S. “Martín Halaja” y “Pablo de Olavide” de La Carolina (Jaén): 30 alumnos aproximadamente.
- Estudiantes de 1º de I.T. en Informática de Gestión: 30 alumnos aproximadamente.
- Respecto a libros de texto, se analizan aproximadamente 10 libros de texto y se efectúa su selección atendiendo a diversos aspectos: relevancia de los autores, que sean conocidos a nivel andaluz y estatal o que se recomienden o utilicen por los profesores y estudiantes de los distintos niveles educativos participantes en el proyecto. Los manuales que se analizan corresponden al período de tiempo 1995-2000.

4.4. Metodología empleada

Una vez realizado el diseño de la investigación, se sigue la línea propuesta por Fox (1981) en cuanto a las etapas a considerar en el proceso de la investigación (diseño, recogida de datos, análisis de datos y resumen de resultados); en el enfoque metodológico se ha tenido en cuenta lo indicado por Huberman y Miles (1994) y, además, las interacciones de esas etapas con los componentes propios del análisis de datos (reducción-clasificación de datos y exposición de éstos).

Al tratarse de una investigación fundamentalmente de tipo cualitativo interpretativo, abarca en su conjunto rasgos de los paradigmas cualitativos-interpretativos, Goetz y Lecompte (1988); no obstante, como estos investigadores afirman, una investigación nunca es totalmente cualitativa o cuantitativa y, por tanto, se consideran también aspectos cuantitativo-experimentales para los casos de los cuestionarios.

Como instrumentos de recogida de datos, para el estudio de la evolución de las concepciones de los alumnos, se utiliza un cuestionario escrito de ítems con preguntas abiertas y cerradas sobre las concepciones y obstáculos relativos a los conceptos objeto de estudio. En aquellos casos precisos se realizan entrevistas a los alumnos que permiten profundizar en sus concepciones.

4.5. Variables

Se han clasificado en la forma siguiente:

En los libros de texto analizados

1) Variables dependientes: - Número y tipo de obstáculos presentes. - Número y tipo de obstáculos superables. - Número y tipo de obstáculos no superables. - Concepciones históricas presentes. - Definición. - Conceptos asociados. - Ejemplos y ejercicios que se proponen. - Estatuto de la noción. - Introducción.
2) Variables independientes: - Autor. - Nivel de enseñanza.
3) Variables concomitantes: - Conceptos que se investigan. - Libros de texto elegidos. - Los periodos globales de tiempo elegidos. - Obstáculos epistemológicos y didácticos. - Concepciones históricas y asociadas.

En los alumnos participantes

1) Variables dependientes: - Número y tipo de obstáculos presentes. - Número y tipo de obstáculos superados. - Número y tipo de obstáculos no superados. - Número y tipo de concepciones erróneas. - Número y tipo de concepciones correctas. - Contextos utilizados en los ejemplos que proponen.
2) Variables independientes: - Grupo. - Instante en el que se efectúa la evaluación (pretest y postest).
3) Variables concomitantes: - Conceptos tratados. - Nivel académico: Diplomatura Técnica, 2º curso de Bachillerato-LOGSE. - Nivel de conocimiento matemático previo. - Procedencia según estudios realizados (COU, Bachillerato-LOGSE, otros) - Sexo. - Obstáculos epistemológicos y didácticos. - Concepciones históricas y asociadas.

4.6. Técnicas de análisis

El análisis de libros de texto se efectúa desde un punto de vista descriptivo, realizándose un estudio comparativo que considera las interacciones entre autor y nivel (igual autor y distinto nivel de enseñanza, igual nivel de enseñanza y distinto autor) teniendo en cuenta los trabajos de Schubring, (1985,87), Weber (1986), Sánchez y Contreras (1995b, 1996a,b, 1997) y Contreras y Sánchez (1998).

Para el análisis de concepciones y obstáculos de los alumnos se elaboró un cuestionario piloto en el que se estudiaron aquellos aspectos que permitieron el diseño del cuestionario definitivo.

El análisis de los datos que se obtienen del cuestionario definitivo a aplicar a los estudiantes de ambos niveles educativos tiene aspectos cualitativos y cuantitativos. Para la reducción de los datos, que no está separada del análisis ya que forma parte de él, se consideran las respuestas dadas por los estudiantes, clasificándolas en categorías, según la naturaleza de las mismas y de los objetivos que se pretenda lograr con cada ítem teniendo en cuenta concepciones y obstáculos. Se codifican los datos y se aplican los paquetes estadísticos BMDP y SPSS.

4.7. Fases y duración

Teniendo en cuenta que este Proyecto se presentó en el mes de diciembre de 1997 y se resolvió a los 9 meses, y dado que los resultados se han de entregar en un plazo de dos años, las fases a realizar para lograr los objetivos antes indicados se han distribuido entre los cursos 1998-99 y 1999-2000 de acuerdo al siguiente esquema:

Curso 1998-99

Fase 1. Profundización en el estudio histórico de los conceptos de límite, continuidad, derivada e integral, a fin de clarificar las concepciones y obstáculos, analizando éstos bajo la perspectiva de que su superación supone un avance en la comprensión de los conceptos.

Fase 2. Dado que tanto las concepciones como los obstáculos se utilizan posteriormente en otros objetivos, en esta fase será preciso categorizar tanto unos como otros para poder analizar los libros de texto y efectuar la clasificación de las respuestas de los alumnos.

Fase 3. Realización del análisis de los libros de texto.

Fase 4. Elaboración de un cuestionario piloto y de otro definitivo, a partir de los datos obtenidos en las fases anteriores, para aplicar antes y después de la instrucción a los estudiantes participantes es la investigación con objeto de analizar la evolución de sus concepciones y obstáculos.

Curso 1999-2000

Fase 5. Aplicación del cuestionario definitivo, antes y después de la instrucción, a los estudiantes participantes es la investigación y análisis de los resultados.

Fase 6. Extracción de conclusiones, a partir del análisis realizado, aplicadas a la enseñanza de los conceptos fundamentales del Análisis Matemático.

5. LIMITACIONES DE LA INVESTIGACIÓN

Como en todo trabajo de investigación, a lo largo de la evolución del mismo aparecen factores y condicionantes que aconsejan efectuar una reorientación de su desarrollo. En el caso de este Proyecto, han sido varios los factores que han influido en su elaboración definitiva, aunque de todos esos factores ha sido la propia formación, continuada sin duda, de los investigadores el que más puede haber condicionado algunos de los pasos dados en este sentido.

La investigación se ha desarrollado a lo largo de tres cursos, de 1997-98 a 1999-2000, habiéndose estudiado los conceptos de límite, continuidad, derivada e integral. Aunque se eligieron estas nociones por ser las básicas del Análisis Matemático, es obvio que un análisis profundo –como así lo requiere todo trabajo serio de indagación- de esos conceptos supone un planteamiento a largo plazo que, en tres cursos, ha sido imposible lograr. En consecuencia, *una limitación en el desarrollo del Proyecto* es que si bien se analizan en toda su extensión el límite y la continuidad de una función, en la derivada se realizan determinados planteamientos parciales y, por último, únicamente se realizan incursiones en el conocimiento de la integral.

Otra limitación ha sido el trabajo con los grupos de estudiantes a los que se aplicó el cuestionario. Si bien se contaba con 30 alumnos en cada uno de los dos grupos analizados, únicamente hemos podido contar con 18 en Bachillerato y 15 en Universidad. Las razones de ello es que como sólo ese número de sujetos cumplían la condición de haber realizado pretest y postet a la vez, y obviamente se han aplicado escrupulosamente las condiciones metodológicas de la investigación, se dan los resultados obtenidos con ese número de individuos, aún a costa de la cuestión de la generalidad de los resultados. Además, como se trata de un estudio cualitativo consideramos que son las aportaciones teóricas que se efectúan en el Proyecto las que han de servir fundamentalmente a los futuros investigadores.

Hemos de llamar la atención sobre un fenómeno didáctico cada vez más frecuente, lo que hemos denominado "fracaso escolar residual", consistente en que de los 30 alumnos que pueden formar un grupo de Matemáticas, únicamente unos cuantos estudiantes son los que verdaderamente siguen el curso hasta el final, lo cual limita "per se" toda investigación en el campo de la Didáctica de las Matemáticas.

Dado que se está trabajando en el seno de un Grupo de Investigación (GEAMJA), habrá una continuidad natural en el desarrollo de la investigación, de tal forma que la idea es completar en el futuro el campo conceptual de los procesos infinitesimales en cuanto a su enseñanza-aprendizaje.

6. CONCLUSIONES

Si bien las conclusiones se refieren, obviamente, a la constatación de las hipótesis formuladas –lo cual aparece en el Proyecto de Investigación (Contreras y col., 2000b)- se considera que son las conclusiones respecto a las nociones estudiadas lo que interesa hacer explícito en este apartado.

6.1. Conclusiones respecto a la enseñanza del límite de una función

Después de haber analizado los resultados de la investigación y, sobre todo, las hipótesis se llega a la conclusión de que, en general, el alumno no ha comprendido el concepto de límite. Puede que sepa manipularlo algorítmicamente e incluso sea capaz de salir airoso de algunos de los problemas que le plantean los manuales - ya que en ellos se suelen plantear normalmente cuestiones de índole algebraico -, pero son numerosos los obstáculos que, antes y después de la enseñanza, manifiestan estos estudiantes.

Es decir, la idea motriz aportada por Sierpinska (1991) de "enfrentar a los alumnos a los obstáculos inherentes al concepto mediante situaciones que le faciliten la emergencia de actos de comprensión" no se ve reflejada - de modo sistemático - en los manuales ni en los apuntes del profesor, que seguramente no es exactamente lo que el profesor hace y dice en clase - como así se ha constatado cuando el profesor ha analizado sus propios apuntes - pero, al menos, es lo que un buen alumno transcribe y, por tanto, lo que incide directamente sobre lo que Chevallard denomina "el saber del alumno".

El límite, a pesar de que pueda ser presentado con un estatus de objeto de conocimiento, es realmente usado tanto por los alumnos como por los manuales e incluso por el profesor como una herramienta para otros objetos: continuidad y derivabilidad principalmente.

La concepción que normalmente presentan los alumnos, tras su enseñanza, es la numérica dinámica (Sánchez, 1997), pero es significativo el hecho de que no sean capaces de responder satisfactoriamente a situaciones planteadas con tablas numéricas. Parece más bien que la idea de aproximación que tienen es de índole geométrico pero, sin embargo, no son capaces de relacionar con fluidez y soltura expresiones de límites con sus correspondientes traducciones gráficas aunque seguramente al contrario les resultaría más asequible.

6.2. Conclusiones respecto a la enseñanza de la continuidad de una función

La idea de continuidad de una función es un concepto, a priori, más asequible para el alumno que la de límite de una función. Sin embargo, tras la investigación realizada y los resultados obtenidos, se observa como la gran mayoría de los estudiantes es capaz de estudiar, de manera más o menos satisfactoria, la continuidad de una función definida a trozos mediante el empleo de la concepción de Cauchy (El Bouazzoui, 1988), pero esos mismos estudiantes han sido incapaces de definir mediante dicha concepción el concepto de función continua en un punto, dándose numerosos casos en los que se presentan incluso concepciones erróneas (de Euler y la denominada CH) a lo largo de la prueba.

Todo esto no hace sino reafirmar el problema central de la investigación de que en la enseñanza de los conceptos tratados se produce un deslizamiento didáctico hacia la algebrización del concepto. El alumno es capaz de aplicar el método para estudiar la continuidad de una función en un punto, pero podría ser que no sólo no estuviera entendiendo el concepto de continuidad sino que ni siquiera supiera lo que es una función definida a trozos.

6.3. Conclusiones respecto a la enseñanza de la derivada de una función

El concepto de derivada de una función en un punto es, según nuestra experiencia y los resultados de la investigación, el más desconocido por los alumnos tras su enseñanza. La concepción que adquieren, a lo sumo, es la geométrica denominada CDG (saben encontrar puntos de no derivabilidad en la gráfica de una función siempre que sean angulosos o no continuos) o de la pendiente CDP (identifican la derivada de la función en un punto con la pendiente de la recta tangente) aunque en esta última concepción se vuelve a producir un deslizamiento hacia la algebrización del concepto; el alumno es capaz de resolver problemas más o menos complicados sobre el cálculo de ecuaciones de rectas tangentes mediante técnicas aprendidas pero es difícil que entienda realmente lo que construye y sea capaz de asociar la idea de variación con la de pendiente de la recta tangente.

La algebrización del concepto es propiciada en Bachillerato por el hecho de que no sea introducido normalmente - en la asignatura de matemáticas - hasta el primer trimestre de 2º, mientras que en la asignatura de física ya se habrá introducido en 1º como una herramienta para resolver problemas cinemáticos.

Otro problema que se presenta en la enseñanza del concepto de derivada es la poca atención que se presta a la concepción de razón de cambio (CDRC), ya que a pesar de que la mayoría de los manuales introducen el concepto mediante la definición y algunos ejemplos de la tasa de variación media, finalmente este tipo de ejercicio es marginado en los de recapitulación final. Además, como en los exámenes -no sólo del profesor sino también en los de las instituciones (se puede observar la ausencia total de este tipo de ejercicios en los exámenes de selectividad)- no aparecen situaciones acordes a esta concepción, su marginación es casi total.

Finalmente, y no por ello menos importante, la dificultad de la comprensión del concepto de derivada de una función en un punto puede deberse también a la "trasparencia" aparente del concepto de recta tangente. Hemos podido constatar las concepciones erróneas, no solo previas sino incluso posteriores a la enseñanza de la derivada, que los alumnos poseen sobre la recta tangente a una curva. Ningún manual hace un estudio sobre las tangentes. Resulta paradójico que el problema fundamental que condujo históricamente al concepto de derivada no sea abordado por los manuales, y es más, sea dado por sabido en el estudiante, es decir, como noción transparente para el estudiante.

REFERENCIAS

Artigue, M.: 1998, 'L'évolution des problématiques en didactique de l'Analyse', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 18, nº 2, pp. 231-262.

Azcárate, C.: 1990, *La velocidad: introducción al concepto de derivada,* Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona.

Bessot, D. y col.: 1999, *Aux origines du calcul infinitésimal. Comprendre les mathématiques par les textes historiques,* IREM – HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES, Ellipses.

Blázquez, M.S.: 2000, *Noción de límite en Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales,* Tesis Doctoral, Universidad de Valladolid.

Cajaraville, J.A.: 1996, *Evaluación del significado del Cálculo Diferencial para estudiantes preuniversitarios. Su evolución como consecuencia de una Ingeniería Didáctica alternativa*, Tesis Doctoral, Universidad de Santiago.

Campillo, P.: 1999, *La noción de continuidad desde la óptica de los niveles de Van Hiele,* Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Valencia.

Cantoral, R.: 2000, *Pensamiento matemático avanzado: Una revisión de los enfoques a la investigación sobre Didáctica del Análisis,* Documento interno del CINVESTAV, México.

Castela, C.: 1995, 'Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures. Un exemple concret, celui de la tangente', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 15, nº 1, pp. 7-47.

Cid, E.: 2000, Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos, *XIV Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, Cangas de Marazzo (Pontevedra).

Contreras, A. y Sánchez, C.: 1998, Estudio de manuales universitarios de la segunda mitad del siglo XX sobre el concepto de límite de una función, en cuanto a los ejemplos, *V Simposio de Enseñanza e Historia de las Ciencias,* Jaca.

Contreras, A. y col.: 1999a, La enseñanza de la continuidad de una función en el primer curso de Universidad. Una metodología de análisis de análisis de manuales en cuanto a concepciones y obstáculos. Aplicación a un manual, *IX JAEM*, Lugo.

Contreras, A. y col.: 1999b, Una metodología de análisis, en cuanto a los ejemplos que aparecen en los libros de texto, del concepto de límite de una función. Estudio de un manual de primer curso de Universidad, *IX JAEM*, Lugo.

Contreras, A. y col.: 2000a, Concepciones y obstáculos en la noción de derivada. Análisis de un manual de 2º de Bachillerato-LOGSE, *IX Congreso sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, San Fernando (Cádiz).

Contreras, A. y cols.: 2000b, *Estudio sobre la enseñanza-aprendizaje de conceptos fundamentales del análisis matemático -límite, continuidad, derivada e integral- en manuales y en estudiantes del Bachillerato-LOGSE y de primer curso universitario,* Proyecto de Investigación financiado por el C.I.D.E. del M.E.C.

Cornu, B.: 1983, *Apprentissage de la notion de limite*, Thèse de doctorat de troisième cycle de Mathématiques pures, Université de Grenoble.

El Bouazzoui, H.: 1988, *Conceptions des éleves et des professeurs a propos de la notion de continuité d'une fonction*, PHD, Université de Bordeaux I.

Font, V.: 1999, *Procediments per obtenir expressions simbóliques a partir de gràfiques aplicacions a les derivades*, Tesis Doctoral, Universitat de Barcelona.

Fox, D. J.: 1981, *El proceso de investigación en Educación,* Edunsa, Pamplona.

Gascón, J.: 1998, 'Evolución de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina científica', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 18, nº 1, pp. 7-34.

Gascón, J. y Fonseca, C.: 2000, Reconstrucción de las Organizaciones Matemáticas en las Instituciones Didácticas. *XIV Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*. Cangas de Marazzo (Pontevedra).

Godino, J.D. y Batanero, M.C.: 1999, 'Significado y comprensión de los conceptos matemáticos', Documento interno del Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada.

Goetz, J.P. y Lecompte, M.D.: 1988, *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa,* Morata, Madrid.

Huberman, A.M. y Miles, M.: 1994, Data management and analysis methods, en N.K. Denzin y Y.S. Lincoln (eds.), *Handbook of cualitative research,* Londoon :Sage Publications, pp. 428-444

Radford, L.: 1997, On Psychology, Historical, and the Teaching of Mathematics. Towards a Socio-Cultural History of Mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 17, 1, pp. 26-33.

Ruiz, L.: 1994, *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: análisis epistemológico y didáctico*, Tesis Doctoral, Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada.

Sánchez, C. y Contreras, A.: 1995a, Concepciones de los alumnos de COU en torno a la noción de límite de una función, *VII Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas "Thales",* Córdoba.

Sánchez, C. y Contreras, A.: 1996a, Un estudio sobre la evolución del proceso de enseñanza-aprendizaje de la noción de límite funcional en los siglos XIX y XX, *ICME 8*, Sevilla (España).
Sánchez, C. y Contreras, A.: 1996b, Un estudio sobre la noción de límite de una función a través del análisis de manuales de los siglos XIX y XX, *ICME 8*, Sevilla (España).
Sánchez, C.: 1997, *Estudio estadístico sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la noción de límite de una función*, Tesis Doctoral, Universidad de Granada.
Sánchez, C. y Contreras, A.: 1997, Evolución del concepto de límite de una función, respecto a su introducción, en manuales universitarios. (1950-1970), *VIII Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas*, Salamanca.
Sánchez, C. y Contreras, A.: 1998, 'Análisis de manuales a través del tratamiento didáctico dado al concepto de límite de una función: Una perspectiva desde los obstáculos', *Enseñanza de las Ciencias*, 17, 1, pp. 73-84.
Schneider-Gilot, M.: 1988, *Des objets mentaux "aire" et "volume" au calcul des primitives*, Tesis Doctoral, Lovain-La-Neuve.
Schubring, G.: 1985, 'Essais sur l'histoire de l'enseignement des Mathématiques'. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 5, 3, pp. 343-385.
Schubring, G.: 1987, 'On the methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as texbook Author', *For the Learning of Mathematics,* 7, 3, 41-51.
Sierpinska, A.: 1985, 'Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite', *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol 6, nº 1, pp. 5-67.
Sierpinska, A.: 1987, 'Humanities students and epistemological obstacles related to limits', *Educational Studies in Mathematics* 18 , pp. 371-397.
Sierpinska, A.: 1990, 'Some remarks on understanding in mathematics', *For the Learning of Mathematics*, vol. 10, pp. 24-36.
Sierpinska, A.: 1991, 'Some remarks on understanding in mathematics', Versión de Sierpinska, A.: 1990, 'Some remarks on undertanding in mathematics', *For the Learning of Mathematics*, vol. 10, pp. 24-36. Presentado al Canadian Mathematics Education Study Group. Vancouver.
Sierpinska, A.: 1997, *La compréhension en mathématiques*, in Boeck & Larcier, s.a. (ed.), París, Bruxelles.
Turégano, P.: 1993, *Los conceptos en torno a la medida y el aprendizaje del Cáculo Infinitesimal*, Tesis doctoral, Universidad de Valencia.
Weber, J.: 1986, *Basic content analysis*. Newbury Park, California: Sage University Press.
Wenzelburger, E.: 1993, 'Introducción de los conceptos fundamentales del Cálculo diferencial e integral – Una propuesta didáctica', *Educación Matemática*, vol. 5, nº 3, pp. 93-123.