Representaciones y comprensión en el profesor de matemáticas

Victoria Sánchez[1]
Universidad de Sevilla

RESUMEN

En esta presentación, nos centramos en como la forma de conocer un contenido matemático, entendida como la representación mental que el profesor tiene del mismo, influencia lo que los profesores consideran importante aprender y cómo estructuran las actividades de aprendizaje. Desde esta perspectiva, es importante analizar las relaciones entre dicha representación y lo que los profesores destacan cuando estructuran esas actividades. Estas relaciones pueden ser mostradas cuando el profesor transforma la materia con el propósito de la enseñanza. Aquí expondremos un ejemplo concreto que ilustra estos aspectos en el desarrollo de una unidad didáctica sobre semejanza de un profesor de Secundaria.

1. INTRODUCCIÓN

Dependiendo del contexto y del dominio matemático, 'representación' dentro de las investigaciones desarrolladas en Didáctica de las Matemáticas puede utilizarse en varios sentidos específicos, algunos de los cuales están siendo presentados en este seminario. Centrándonos en aquellos trabajos que se ocupan conjuntamente de 'representaciones' y 'profesores', suele aparecer en ellos de una forma general un especial énfasis en aclarar en qué sentido y con qué significado se está utilizando la palabra 'representación'. Esta aclaración no es algo trivial, ya que condiciona las preguntas que se plantean los investigadores y, consecuentemente, la forma de buscarles una respuesta.

Algunos investigadores emplean el término 'representación' para designar herramientas con la ayuda de las cuales es posible a los profesores mostrar la

1. Miembro del Grupo de Investigación en Educación Matemática (GIEM) de la Universidad de Sevilla (FQM-226).

encarnación (personificación) de los objetos matemáticos (Leinhardt et al., 1991). Al examinar como los profesores utilizan su conocimiento de la materia, considerado desde una perspectiva de la enseñanza como una destreza cognitiva compleja que ocurre en un entorno dinámico relativamente mal estructurado (Leinhardt & Greeno, 1986), se centran en varios puntos clave del proceso instruccional de los profesores como agendas, guiones curriculares, explicaciones y representaciones, señalando que:

'En la construcción de explicaciones, los profesores utilizan varias representaciones de la información que es su objetivo. Las representaciones son objetos físicos o conceptuales o sistemas de objetos que dan forma perceptible a ideas o entidades matemáticas (operadores), por ejemplo usando bloques multibase de Dienes para el valor de posición para enseñar la resta reagrupando o diagramas sombreados para enseñar fracciones. Comprender cuando una representación particular es apropiada y ser conscientes de los aspectos más sutiles de cada representación son ejemplos específicos del conocimiento del la materia del profesor' (Leinhardt et al., 1991, p. 90).

Bajo esta perspectiva, se entienden las representaciones como sistemas de símbolos que utiliza el profesor a la hora de presentar conceptos u otros aspectos. Para Leinhardt y sus colaboradores las representaciones utilizadas por los profesores *'permiten 'ver' aspectos muy detallados y sutiles de cómo los profesores entienden un particular tópico matemático*' (Leinhardt et al., 1991, p.106). Estos autores utilizan las representaciones para 'dar presencia' a las ideas matemáticas, y las cuestiones que se plantean en la paradoja primera planteada en la presentación inicial (dualidad representante-representado), se aumentarían en el sentido de tratar de profundizar en el papel del profesor en ese paso representante-representado.

Otros autores amplían la idea de representación mas allá del sistema de símbolos empleado, entendiendo que los profesores están constantemente involucrados en un proceso de construir y usar '*representaciones instruccionales*' del conocimiento de un contenido y utilizando este término para indicar '*un amplio rango de modelos que pueden comunicar algo sobre la materia para el aprendiz: por ejemplo, actividades, preguntas, ejemplos y analogías*' (McDiarmid et al, 1989, p. 194). Ellos mismos aclaran que no se están refiriendo al término representación en el sentido de una representación mental que los aprendices construyen por sí mismos conforme ellos aprenden, o que los profesores tienen que dan forma a su enseñanza, subrayando en este último caso la crítica incidencia de la comprensión del contenido de los profesores en estas representaciones instruccionales

Precisamente en algunos trabajos como los de Wilson et al. (1987) se presta especial interés al '*conjunto de actividades desarrolladas por el profesor para pasar de su propia comprensión de una materia y las representaciones más convenientes a esa comprensión a las variaciones de representación, narrativa, ejemplo, o asociación apropiada para iniciar comprensión por parte de los estudiantes*' (p.113). Para nosotros, dentro de esa comprensión tiene especial importancia la *forma de conocer un contenido matemático (entendida como la represen-*

tación mental que el profesor tiene del mismo), ya que puede influenciar lo que los profesores consideran importante aprender y cómo estructuran las actividades de aprendizaje.

Desde nuestra perspectiva, es importante analizar las relaciones entre los diferentes aspectos del conocimiento de la materia para la enseñanza que se integran en esa comprensión y lo que los profesores destacan con relación a los modos de representación usados (en el sentido de sistema de símbolos) y su gestión cuando estructuran dichas actividades. Estas relaciones pueden ser mostradas cuando el profesor transforma la materia con el propósito de la enseñanza, es decir, en el proceso de razonamiento pedagógico, entendido como '*el proceso de transformar la materia en formas que son pedagógicamente poderosas y sin embargo adaptables a las variaciones en habilidad y base presentadas por los estudiantes*' (Shulman, 1987, p.15). Este razonamiento pedagógico es específico de la enseñanza.

Nos situamos por tanto en una representación mental (en el sentido de reproducir en la mente indicado en la ponencia inicial), compartiendo algunas de las cuestiones mencionadas en la segunda paradoja planteada al comienzo de este seminario. Entendemos que la representación mental no sólo se sitúa en lo cognitivo, sino que debe ser analizada en sus múltiples y complejas conexiones con la actividad del sujeto.

2. ENMARCANDO UN PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Shulman y sus colaboradores (Wilson et al, 1987) han desarrollado un modelo teórico que describe el proceso de razonamiento pedagógico y la acción a través de lo que ellos consideran seis aspectos comunes del acto de enseñanza: comprensión, transformación, instrucción, evaluación, reflexión, nueva comprensión. Este modelo de razonamiento pedagógico va a ser el marco que nos permita mostrar la transformación del contenido con el propósito de la enseñanza, posibilitándonos estudiar la relación entre la forma de conocer el contenido matemático del profesor y los aspectos de dicho contenido que enfatiza, la elección de las tareas y el uso que hace de ellas en las situaciones del aula.

En particular, aquí nos vamos a situar en las dos primeras componentes. En relación a la *comprensión* del profesor del contenido matemático (considerada como la integración e interconexión de los conocimientos y otros aspectos relacionados con aquello que se comprende), centraremos nuestra atención en lo que el profesor considera importante para organizar el contenido que presenta a sus alumnos, y los diferentes usos que el profesor atribuye a los modos de representar conceptos matemáticos, de lo que se pueden inferir rasgos que nos ayudan a aproximarnos a su forma de conocer el contenido. Ahora bien, no hay que olvidar que esos aspectos están enmarcados dentro de unas concepciones de carácter más general sobre lo que significa enseñar una materia, que de alguna manera pueden definir los objetivos e influenciar la toma de decisiones (Grossman, 1990). Por ello, se incluyen también dentro de esta componente aquellas concepciones que están relacionadas más específicamente con lo que el profesor piensa sobre el contenido matemático para los estudiantes (lo que deberían aprender sobre las matemáticas y la naturaleza de las matemáticas).

La segunda componente, la *transformación*, comprende cuatro subprocesos que globalmente considerados tienen como objetivo generar un plan de acción específico para la enseñanza de un contenido determinado. El primero de ellos, la interpretación crítica, involucra la revisión de materiales instruccionales a la luz de la propia comprensión del contenido matemático. El segundo, repertorio representacional incluye las formas alternativas de presentar el contenido (diferentes modos de representación utilizados y cómo se justifica su uso). Por último, el considerar las características de los alumnos en general (los errores, las dificultades, etc.) y de alumnos de la clase concreta en particular correspondería a los subprocesos tercero y cuarto dentro de esta componente, que son la adaptación y el ajuste. Aquí no nos vamos a ocupar específicamente de estos dos últimos subprocesos, aunque en ocasiones interrelacionan con las decisiones tomadas en los anteriores.

3. EJEMPLIFICACIÓN DE LA NOCIÓN DE REPRESENTACIÓN ADOPTADA EN INVESTIGACIONES CONCRETAS

Dentro de nuestro grupo de investigación, tanto en la línea de aprender a enseñar (Llinares y Sánchez, en revisión) como en nuestros trabajos sobre el conocimiento profesional del profesor de Matemáticas en acción (ver García, 1997; Llinares, 1999, 2000; García & Llinares, 1999), se ha puesto de manifiesto como la forma de conocer el profesor (o futuro profesor) el contenido matemático influencia su toma de decisiones instruccionales, condicionando el proceso de enseñanza/aprendizaje. Apoyándonos en la información obtenida en algunas de nuestras investigaciones (Escudero & Sánchez, 1999a,b), aquí vamos a tratar de caracterizar es la relación entre la forma de conocer el profesor el concepto matemático como objeto de enseñanza/aprendizaje (su representación mental del mismo) y el uso de los modos de representación (entendidos en el sentido de sistemas de representación utilizado en la ponencia presentada por la Dra. Romero en este mismo seminario), y las justificaciones dadas a ese uso. Intentaremos presentar diferentes aspectos de esa relación a través de un ejemplo, extraído de una serie de entrevistas a un profesor de Secundaria, Daniel, sobre su unidad didáctica sobre la semejanza en un curso de 3º de ESO. La hipótesis que subyace es que la secuencia adoptada, tareas escogidas y uso de ellas definen distintas formas de introducir el concepto, influenciando una determinada presentación del mismo a los alumnos.

3.1 La comprensión del profesor de la semejanza

Daniel ve el concepto de semejanza como un modo de conectar la 'visión numérica abstracta con imágenes gráficas', siendo para él 'la semejanza, entre otras cosas, es una ocasión para que los alumnos distingan que algo es proporcional'. Esta forma de conocer la semejanza, que enfatiza la conexión entre los aspectos numérico/algebraico y gráfico del concepto, se pone de manifiesto cuando piensa en su enseñanza en el uso que hace de diferentes perspectivas relacionadas con los problemas que tiene seleccionados, destacando siempre en sus comentarios sobre ellos la inclusión de diferentes tipos de configuraciones y variaciones que presentan en los aspectos numérico/algebraicos. Al situar el énfasis en los aspectos numérico y geométrico en el concepto de semejanza, Daniel considera en la secuencia de enseñanza las traslaciones dentro del modo de representación gráfico como un medio para reconocer el concepto en distintas presentaciones figurales, estableciendo asimismo traslaciones dentro del modo de representación numérico/algebraico. En dicha secuencia, las actividades de traslación entre ambos modos de representación son un medio para establecer las conexiones pretendidas. El uso de los problemas, modos de representación y los diferentes roles que éstos juegan en la enseñanza recogen su consideración de la semejanza (con el propósito de la enseñanza) como un contexto para visualizar la proporcionalidad.

Junto con esta idea de 'comprender la proporcionalidad en el contexto de la semejanza', entre las ideas importantes que Daniel quiere 'afianzar' en sus alumnos destaca la importancia de que los alumnos reconozcan figuras semejantes. La trascendencia que para él tiene visualizar a través del dibujo lo que significa la semejanza de figuras y el posterior paso a la expresión numérica se refleja cuando trata de representar el contenido matemático para los alumnos, como se infiere del siguiente protocolo: 'para mí, a estos niveles, la idea de semejanza podríamos decir que son figuras con una misma forma, unas mismas proporciones... son las figuras semejantes, pero que luego eso lo sepan transcribir a un lenguaje matemático'. Señala la particularidad que tiene el triángulo en el sentido de que 'basta que se fijen en sus ángulos o basta que se fijen en los lados y no son necesarias las dos cosas' frente a 'lo que seria semejanza en cualquier otro tipo de figuras geométricas'.

También destaca que 'la semejanza de figuras es independiente de la posición que tengan las figuras, o sea, que yo muevo las figuras y siguen siendo semejantes'. Esta forma de comprender la idea de figuras semejantes subraya la relación que se establece entre figuras y corresponde a una visión de la semejanza como relación intrafigural, implicando una potenciación del modo de representación gráfico, de modo que permita la adquisición de un buen grado de visualización para lograr la identificación pretendida. Es precisamente la particularidad que ve en la semejanza relacionada con la presentación de figuras en distintas posiciones lo que le lleva a considerar que permite detectar problemas de lateralidad vinculados a dificultades de organización del plano, y aunque considera que esto lo cumple la geometría en general, se da especialmente en la semejanza por el hecho de que 'se cambien las posiciones de figuras'.

Con los párrafos anteriores no hemos pretendido en absoluto entrar en un análisis detallado de la comprensión de la semejanza de Daniel. Simplemente, dentro de esa comprensión, inferimos como rasgos clave de su forma de conocer la semejanza como objeto de enseñanza/aprendizaje: considerarla un contexto para visualizar la proporción y un medio de establecer una conexión entre lo numérico y las imágenes gráficas, que nos sirven de referente para abordar el proceso de transformación.

3.2 La transformación del contenido matemático para la enseñanza

El plan para la unidad didáctica de semejanza que el profesor ha preparado y las razones que proporciona muestran la influencia de su forma de conocer la semejanza (junto con otras concepciones sobre la enseñanza aprendizaje mas generales). Los subprocesos considerados en la componente 'transformación' dentro el modelo de razonamiento pedagógico anteriormente mencionado nos permiten organizar nuestro análisis. A lo largo de este apartado iremos presentando en primer lugar la interpretación crítica, inferida de la organización del contenido en el plan para la lección (que características del concepto identifica y en que orden las presenta). En segundo lugar, nos ocuparemos del repertorio representacional, a partir de los datos obtenidos de las formas alternativas de presentar el contenido matemático y en la forma de concretar los objetivos que se pretenden con las tareas que va indicando.

* *Interpretación crítica*: En coherencia con su forma de conocer la semejanza anteriormente mencionada, Daniel considera importante que los alumnos relacionen a través de ese concepto la idea de proporción numérica con imágenes gráficas. Dos características emergen en sus decisiones y elecciones curriculares que determinan como estructura sus actividades de aprendizaje: conectar la proporción con su visualización en figuras geométricas y considerar que los contenidos del tema son prácticamente los mismos que se han dado en cursos anteriores, aunque con 'un nivel superior de formalización' (el que aquel año sus alumnos hayan pasado a tercero de ESO habiendo cursado los dos años anteriores en un centro de Primaria le lleva a no estar demasiado seguro de lo realmente dado). Para él 'no es un tema nuevo', y por lo tanto no se trata de introducir nuevos contenidos, sino relacionar los ya dados, en concreto: proporcionalidad numérica (dada por él en el tema anterior), semejanza (contenido tratado en años anteriores) y Thales (ya que 'han oído hablar del teorema'). Daniel considera como punto de partida que los alumnos lleguen a una formalización del teorema estableciendo relaciones entre esos contenidos y la división de un segmento en partes iguales (que están aplicando este año en tecnología y dibujo), porque 'aunque la semejanza podría ir antes de... quizás antes del teorema de Thales, pero prefiero enlazar con algo que... sea a ellos más próximo y después, como a partir del teorema de Thales y de forma natural probablemente... bueno, natural, no, buscada a través de alguna de las actividades, vendrá la idea de semejanza...'.

Por ello, sitúa como punto de partida en la secuencia de enseñanza problemas que plantean situaciones reales que, además de motivar, permitan a los alumnos reconocer en ellas los contenidos anteriormente mencionados. El primero, sacado de un manual de montañismo, plantea en sus dos apartados la justificación de la relación existente entre unas distancias que se mencionan en el texto. Para ello es necesario identificar esas distancias como lados de triángulos semejantes, estando cada uno distintas configuraciones geométricas de pico y mariposa (Lemonidis, 1991). El segundo problema plantea en un primer apartado la relación existente entre aviones y sus sombras, y demanda el cálculo de la longitud de uno de ellos; en los otros dos apartados se pide representar las dimensiones de los aviones por letras y recordar el nombre de la relación entre los segmentos, indicando explícitamente en su último apartado que se establezca una relación con el procedimiento de dividir un segmento en partes iguales. El modo de representación que Daniel utiliza para identificar las relaciones es por tanto la situación real, produciéndose un traslado al modo de representación gráfico; en él debe producirse la identificación de lados homólogos o segmentos correspondientes, como paso previo a la traslación al modo de representación numérico/algebraico en el que se desarrolla la justificación. Para él, estos problemas le van a permitir hacer explícitas las condiciones que permiten una aplicación del teorema y dar su expresión formal.

Reconocer esas condiciones permite para Daniel aplicar la fórmula, por lo que sitúa en la secuencia de enseñanza 'ejercicios que permitan aplicar el teorema y su consecuencia'. En los problemas seleccionados coexisten dos criterios: presentar directamente distintas configuraciones de Thales (sin situaciones reales), sobre las que identificar los datos numérico/algebraicos (del mismo modo que en los problemas anteriores) y posibilitar el reconocer que con estos datos se puede aplicar la fórmula dada.

Así, por ejemplo, en el primero de los problemas que tiene preparados, el enunciado indica que se trata de configuraciones de Thales. Las configuraciones se presentan en forma de pico; las dos primeras presentan datos numéricos, y se pide calcular los valores que corresponden a las incógnitas, mientras que el tercer apartado los segmentos vienen dados en forma algebraica y se pide expresar una relación entre las variables. Se relaciona de este modo un determinado modo de representación geométrico (una configuración en pico) con diferentes posiciones de los datos numéricos, que se sitúan sobre las secantes en el primer apartado y sobre secantes y paralelas en el segundo, con lo que se presenta tanto el aspecto proyección como el de homotecia, y un paso de datos numéricos a algebraicos. Pero lo que es importante destacar es el uso que se hace de los modos de representación: se prescinde en el enunciado de la situación real (haciéndose explícito que se trata de una configuración de Thales), presentándose directamente en el modo de representación gráfico la identificación de los datos numérico/algebraicos con los correspondientes segmentos sobre la configuración y pidiendo directamente el cálculo del valor numérico o la justificación. En otro de los problemas preparados se dan tres segmentos a, b y c y se pide encontrar con instrumentos de dibujo un cuarto segmento x que verifique a/b=c/x (cuarta proporcional) y otro y que cumpla a/b=b/y (tercera proporcional). Esta tarea implica una traslación del modo de representación algebraico al geométrico, y un trabajo dentro de este modo de representación apoyándose en la construcción.

Considerados globalmente estos problemas y los otros que Daniel tiene preparados (que para él como las anteriores deben ser planteadas a los alumnos en forma conjunta para su trabajo en grupo y posterior discusión), presentan para Daniel los aspectos necesarios para establecer la conexión entre los aspectos numérico y geométrico de la proporcionalidad, por lo que 'pasado ese primer bloque de actividades del teorema de Thales' incorpora ahora otro aspecto de su forma de conocer la semejanza como objeto de enseñanza/aprendizaje: la idea de la semejanza de figuras como relación intrafigural. Daniel señala que 'yo sería quien les preguntaría a ellos que idea tienen de semejanza, en función de cursos anteriores, o bien lo que la palabra figuras semejantes les pueda decir a ellos', indicando que: 'me ha pasado en otros cursos, aunque no sea de estos niveles, cuando pregunto que ideas tienen de figuras semejantes te dicen que parecidas, entonces un poquito centrar parecidas en qué sentido...', para llegar a precisar la importancia de 'mantener las proporciones'.

Sus decisiones y elecciones curriculares se fundamentan ahora en la importancia que da a la presentación de la semejanza de figuras a partir de una comparación entre ellas, vinculada a lo que significaría mantener la proporción en esa comparación, y se concretan en figuras geométricas ya que 'como no nos vamos a centrar... no podemos dedicarnos a la semejanza de todo tipo de figuras, pues nos vamos a dedicar a figuras más geométricas'. Para establecer esta comparación utiliza en primer lugar problemas en los que se presentan triángulos. Así, por ejemplo, en uno de los problemas seleccionados se dan dos triángulos en posición de Thales y se incluyen sobre el dibujo como datos las medidas de los segmentos sobre las secantes, pidiendo una comprobación de la proporcionalidad de lados homólogos (paso de segmentos identificados sobre la figura a expresión algebraica de la proporción). En otro de ellos se mantiene la representación en pico, pero dos lados se dan como datos numéricos y se pide la relación entre otros, señalando expresamente el enunciado que se identifique con algún ejercicio similar realizado al principio del tema. Para él, estos problemas 'deberían ir... sí, como aplicación de la semejanza de triángulos...'.

En el uso que en estos problemas hace del modo de representación gráfico para desarrollar los significados pretendidos, las figuras se reconocen expresamente como triángulos y se consideran 'figuras separadas' que se comparan, aunque formen parte de una misma configuración. Por ejemplo, una determinada representación gráfica (dos triángulos en una configuración de pico con datos numéricos e incógnita sobre los lados) que en el bloque anterior de problemas se usaba para calcular el valor de la incógnita en este bloque de tareas se utiliza para comprobar que los triángulos tienen los lados homólogos proporcionales por lo que, a diferencia del caso anterior se hace ahora explícito en el enunciado que dos de los lados son paralelos, (lo que en el caso anterior se consideraba implícito en el dibujo). La visión de la semejanza como relación intrafigural también se pone de manifiesto en los problemas que tiene seleccionados para la introducción de la semejanza de polígonos, en las que destaca de nuevo el papel de lados y ángulos como elementos que permiten establecer la distinción entre la semejanza de triángulos y la de los otros polígonos.

Otra característica de su forma de conocer en relación a la semejanza de figuras es la importancia de su identificación variedad de posiciones de los triángulos. Para ello, utiliza un problema en el que se da un triángulo rectángulo en el que se ha trazado la altura correspondiente a la hipotenusa y, por el punto de intersección de ambas, la paralela a un cateto. Se pide nombrar el máximo número de triángulos semejantes que se encuentran en la figura, razonando la repuesta. Este problema le va a permitir un reconocimiento de la semejanza de triángulos en base a la igualdad de ángulos y, como el mismo indica, conectar con los teoremas del cateto y de la altura. Para ello, prescinde del modo de representación numérico/algebraico, siendo la representación gráfica que presenta el problema la que le permite desarrollar estos significados.

En líneas generales, podríamos decir que las decisiones curriculares de Daniel se han caracterizado por la coexistencia de la vinculación de la idea de semejanza como un contexto para profundizar en la proporcionalidad numérica (puesta de manifiesto en el modo de introducir y aplicar del teorema de Thales) y la semejanza de figuras como comparación intrafigural (introducida partir de figuras parecidas – semejantes). Para él, lo que significa ‘aplicar’ un teorema o concepto ya formalizado implica el reconocimiento de unas condiciones en variedad de modos de representación gráfico. Esto influencia la elección que hace de los problemas, en los que se incluyen gran variedad de representaciones geométricas (formas de pico y mariposa), añadiendo posiciones no estándar de triángulos semejantes (vinculadas a la importancia que concede a la presentación de figuras en distintas posiciones). Por último, en los problemas seleccionados se pone de manifiesto como interrelacionan la variación de aspectos numéricos y geométricos, que caracterizan el objetivo de cada grupo de tareas, con las dificultades de los aprendices, haciendo explícito que son estas dificultades la que van condicionando la secuenciación dentro de cada bloque de tareas (por ejemplo, dentro de una misma configuración, primero tareas con datos numéricos y luego con letras).

**Repertorio representacional*: Formas alternativas de presentar el contenido que el profesor utiliza, y aspectos de las tareas seleccionadas que el profesor destaca para lograr sus objetivos.

En este apartado, situamos el énfasis sobre la actividad que puede ser generada cuando se establecen relaciones entre los modos de representación, poniendo de manifiesto el ‘espacio’ que define el profesor para gestionar la relación entre distintos modos de representación: situaciones, marco geométrico (con sus diferentes manifestaciones según la forma en que se presentan las figuras) y símbolos como un medio para conseguir su objetivo. En el caso de la identificación de contenidos que llevan a la formalización del teorema de Thales, concentrándonos en el papel que Daniel da a los diferentes modos de representación en la secuencia de enseñanza, su presentación destaca la importancia que para él tiene reconocer y conectar unos contenidos ya dados. Para ello, selecciona problemas que presentan situaciones reales, justificando la elección de los mismos en base a que el alumno 'vea que las matemáticas están mas cerca de la vida real', y que '(en el primer apartado) tienen que aplicar directamente el teorema de Thales (contenido que considera ya dado) y en el otro (el segundo apartado) lo pueden aplicar, pero cambiando la posición de los triángulos e insistiendo en que 'tienen que justificar matemáticamente por que se procede de esa forma'. Aquí se utiliza la situación real como un contexto en el que se puede establecer el reconocimiento de unos contenidos matemáticos (y no como modo de representación), estableciéndose a partir de ese reconocimiento traslaciones dentro y entre modos de representación gráfico y numérico. La presentación se completa con un segundo problema, que es para Daniel 'de proporcionalidad entre longitudes de aviones y su sombra […] entonces hay un momento que ellos dicen 'aplico la regla de tres', y hay otro momento en que se les pide que generalicen ... [...] ... el objetivo de esta tarea es que salga el teorema de Thales con su formulación matemática incluida...'. En la traslación de la situación real al modo gráfico, este segundo problema permite conectar esa situación con una configuración en pico en la que aparecen letras, poniéndose el énfasis en la traslación del dibujo a los símbolos algebraicos; esto le va a permitir llegar a la formulación matemática estándar del teorema. El modo de representación gráfico se utiliza para favorecer la identificación de la presentación clásica del teorema de Thales a través del uso de una representación gráfica prototípica (la configuración en pico), dando a través de ella 'pistas' que ayuden a favorecer la identificación pretendida.

Las presentaciones geométricas anteriormente consideradas se amplían en los problemas seleccionados con el objetivo de aplicar el teorema (ya dado en su forma estándar) con otras 'donde se vea que... pueden planteárseles dificultades... o bien porque no se les dice previamente que es una configuración de Thales, o bien porque las rectas se cruzan, y aquí vuelve a aparecer de nuevo la organización del plano y la lateralidad', conectando con dificultades del aspecto numérico al indicar que 'el hecho de que las rectas se crucen, entonces, al establecer la proporción, primero tienen que poner arriba unos segmentos que están a la derecha y luego los que están a la izquierda, porque están en la misma recta, eso a ellos les cuesta trabajo'. Además comenta 'esa misma actividades las he trabajado con otros alumnos de otros niveles y la dificultad siempre está ahí'. Podemos apreciar un cambio en la gestión de la relación entre los modos de representación: se prescinde de la situación, y las traslaciones entre las distintas configuraciones que se utilizan en el modo de representación gráfico se usan ahora para reconocer los datos en posiciones en las que el profesor 'sabe' que este reconocimiento presenta una especial dificultad (seleccionadas teniendo en cuenta la información recogida de otros aprendices con respecto a las dificultades concretas que presentan); como en el caso anterior, la proporción sigue estableciéndose en base a una traslación entre los segmentos identificados sobre el dibujo y sus correspondientes valores, pero se inicia una aproximación al paso inverso (dados los segmentos pasar al dibujo) por medio de la construcción.

Otra característica de la forma de establecer la relación dentro del modo de representación gráfico (y entre éste y el numérico) se presenta en la gestión que hace de los diferentes modos de representación como medio aproximarse a la semejanza de figuras desde la perspectiva de relación intrafigural. En el caso de los triángulos, dentro del modo gráfico la comparación se establece entre ellos (que se consideran por separado formen o no parte de una misma configuración) y dentro del numérico la proporción se establece en base a la identificación de los lados homólogos, destacando la independencia de la semejanza de la posición en la que se presenten los triángulos semejantes. De lo que enfatiza en los problemas se infiere que para él permiten mostrar la particularidad del triángulo, en el sentido de que 'basta con que se fijen en los ángulos o basta con que se fijen en la proporcionalidad de los lados, y no son necesarias las dos cosas'.

Así, por ejemplo, Daniel justifica el uso de uno de los problemas seleccionados para este objetivo indicando que en él 'se da un triángulo rectángulo cortado por la altura correspondiente a la hipotenusa y que encuentren triángulos semejantes .. la finalidad, el objetivo de esto es que manejen triángulos semejantes se les ponga en la posición que se les ponga' señalando que su objetivo con esta tarea es 'que los triángulos semejantes no los vean siempre así, con sus lados homólogos paralelos'. Este problema le permite conectar con otros contenidos, ya que 'como ahí los triángulos no están en la misma posición... creo que les puede aclarar bastante la idea y además es el momento de pararse [...] y darle forma al teorema del cateto y al de la altura'. La importancia de la comparación en base a lados y ángulos vuelve a apreciarse en los aspectos que destaca en los problemas que ha seleccionado para la aplicación de la semejanza de polígonos, en las que se incluyen diferentes polígonos para 'ver si ellos se dan cuenta que se tienen que fijar en los ángulos y los lados ...'.

En este apartado se ha ido poniendo de manifiesto como el profesor gestiona los diferentes modos de representación para lograr la articulación pretendida entre los aspectos numéricos y gráficos que permiten para él la visualización en contexto geométrico de la proporcionalidad y de la semejanza de figuras, en coherencia con los aspectos destacados en apartados anteriores de su forma de conocer estos conceptos. A través de las traslaciones establecidas entre las diferentes formas de presentación geométrica en las representaciones gráficas y las variaciones en los aspectos que se destacan en la representación numérico/algebraica, el profesor intenta relacionar la actividad generada en el modo de representación gráfico con el numérico/algebraico, apreciándose a en sus justificaciones los intentos de potenciar ambos modos de representación.

4. CUESTIONES ABIERTAS

A lo largo de este trabajo hemos intentado mostrar un ejemplo de como la forma de conocer de un profesor un contenido matemático como objeto de enseñanza/aprendizaje influencia el proceso de presentación del mismo. Hemos tratado de identificar el papel jugado por dicha forma de conocer en ese proceso, poniendo de manifiesto la relación que se establece entre su aproximación al concepto de semejanza y los aspectos que él destaca, la secuenciación escogida, los tipos de problemas seleccionadas, la organización de las actividades de aprendizaje, los modos de representación usados y lo que se pretende con ellos. Reconocido este papel, cabría entonces preguntarse si esto nos ayudaría a responder a cuestiones como ¿qué lleva a un profesor a organizar de una manera determinada el contenido matemático a enseñar?, ¿a seleccionar determinadas tareas?, ¿a potenciar el uso de un sistema de símbolos frente a otro?…. Porque lo que está claro es que todo esto va a condicionar lo que sus alumnos aprenden. Todo esto, junto con el papel jugado por el conocimiento del profesor de las dificultades de los alumnos en la toma de decisiones en el proceso de transformación, (importancia que ya ha sido señalado en trabajos como el de Even & Tirosh (1995)) nos lleva a reflexionar sobre contenidos específicos que deben forma parte de los programas de formación de profesores y abre para todos nosotros nuevas vías de debate e investigación. Si, siguiendo a Wilson et al., 'creemos que la transformación del conocimiento de la materia está en el corazón de la enseñanza en las escuelas de secundaria. El conocimiento de la materia del individuo, además, juega un importante papel en este proceso' (Wilson et al, 1987, p.117), abordar desde distintas perspectivas la forma en la que el profesor conoce el contenido matemático como objeto de enseñanza/aprendizaje y el uso que hace de los diferentes modos de representación es clave para aproximarnos a lo que necesita conocer un profesor para desarrollar su compleja labor.

Pero no queremos terminar esta presentación sin hacer mención a lo que nosotros hemos aprendido. Hemos visto como un profesor experto establece conexiones, crea relaciones, incorpora información de experiencias anteriores en un proceso dinámico, que forma parte de su desarrollo profesional. Y, sobre todo, hemos valorado su disponibilidad y esfuerzo por colaborar con nosotros, haciendo posible el desarrollo de este tipo e investigación.

REFERENCIAS

Escudero, I. & Sánchez, V.: 1999a, The relationship between professional knowledge and teaching practice: the case of similarity, en Zaslavsky (ed.) *Proceedings of the 23 conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education, Haifa, Israel*, vol. 2, 305-312.

Escudero, I. & Sánchez, V.: 1999b, Una aproximación al conocimiento profesional del profesor de matemáticas en la práctica: la semejanza como objeto de enseñanza-aprendizaje, *Quadrante*, vol. 8, nº 1-2, 85-110.

Even, R. & Tirosh, D.: 1995, Subject-matter knowledge and knowledge about students as sources of teacher presentation of the subject-matter, *Educational Studies in Mathematics* 29:1-20.

García, M.: 1997, *Conocimiento profesional del profesor de Matemáticas. El concepto de función como objeto de enseñanza-aprendizaje,* GIEM-Kronos: Sevilla.

García, M. & Llinares, S.: 1999, Procesos interpretativos y conocimiento profesional del profesor de matemáticas: Reflexiones desde la perspectiva de la enseñanza como diseño, *Quadrante*, vol. 8, nº 1-2, 61-84.

Grossman, P.L.: 1990, *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education,* New York: Teachers College Press.

Leinhardt, G., Putnan, R.T., Stein, M.K. & Baxter, J., 1991, Where subject knowledge matters, en J. Brophy (ed) *Advances in Research on Teaching*, vol. 2, JAI Press: London, 87-113.

Leinhardt, G. & Greeno, J.G.: 1986, The cognitive skill of teaching. *Journal of Educational Psychology*, 78(2), 75-95.

Lemonidis, C.: 1991, Analyse et realisation d'une experience d'enseignement de l'homothétie, *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 11 (2.3), 295-324.

Llinares, S.: 1999, Intentando comprender la práctica del profesor de Matemáticas. En J.P Ponte y L. Serrazina (eds) *Educaçao Matematica em Portugal, Espanha e Italia*. SEM de SPCE: Lisboa, Portugal, 109-132.

Llinares, S.: 2000, Secondary school mathematics teacher's professional Knowledge: A case from the teaching of the concept of function. *Teachers and Teaching: Theory and Practice*, 6(1), 41-62.

Llinares, S. y Sánchez, V.: (revisión), Four student teachers' pedagogical reasoning on functions.

McDiarmid, G.W., Ball, D.L. & Anderson, C.W.: 1989, Why Staying One Chapter Ahead Doesn't Really Work: Subject-Specific Pedagogy. En M.C.Reynolds (ed) *Knowledge Base for the Beginning Teacher,* Oxford: Pergamon Press, 193-206.

Shulman, L.: 1987, Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, vol. 57 (1), 1-22.

Wilson, S., Shulman, L. & Richert, A.: 1987, '150 different ways' of knowing: representations of knowledge in teaching. En J. Calderhead (ed*) Exploring teachers' thinking*, London: Casell, 104-124.