Representación y comprensión en pensamiento numérico

Isabel Romero Albaladejo
Universidad de Almería

RESUMEN

La importancia de los sistemas de representación a la hora de abordar la comprensión sobre un tópico matemático es hoy ampliamente reconocida en nuestra comunidad de Educación Matemática. El presente trabajo recoge los esfuerzos de nuestro grupo de investigación en Pensamiento Numérico por sistematizar, operativizar y poner en práctica una serie de ideas en torno a este tema. En lo que sigue, expondremos nuestro punto de vista sobre cuestiones ontológicas, psicológicas y didácticas en torno a las representaciones y la comprensión. Asimismo, ilustraremos cómo hemos puesto en práctica dichas ideas en algunas de nuestras investigaciones y qué resultados hemos obtenido. Finalizaremos con algunas reflexiones y cuestiones pendientes para el futuro.

1. INTRODUCCIÓN

Desde la década de los 80, las ideas en torno a las representaciones y a los sistemas de representación han ido ganando terreno a la hora de abordar el estudio de la comprensión en matemáticas y se han consolidado como herramienta útil a tal efecto. Dentro del grupo de investigación Pensamiento Numérico hemos venido trabajando en este campo durante aproximadamente una década, aplicando el resultado de nuestros esfuerzos al estudio de la comprensión de distintos sistemas numéricos y cuestiones afines.

En mi intervención en este seminario trataré de poner de manifiesto algunas de las posturas de nuestro grupo sobre el tema de la Representación y la Comprensión; en particular, sobre varias de las cuestiones que Luis Rico ha dejado abiertas a modo de introducción. Nuestro marco teórico ha tenido en cuenta las nociones de representación y sistemas de representación tratadas por Janvier et al. (1993) y Kaput (1987, 1992), el análisis semiótico de Duval (1993, 1995), los trabajos de Hiebert et al. (1986, 1992) y de Sfard (1991) sobre conocimiento matemático y comprensión, y la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1990).

2. CUESTIONES ONTOLÓGICAS Y PSICOLÓGICAS

Cuando hablamos de representación surge, casi de inmediato, la dualidad representante-representado. Parece que en la noción misma de representación se halla implícita la existencia de algo a lo cual ésta representa. Y así, podríamos postular la existencia de dos mundos: el *mundo de los objetos representantes* y el *mundo de los objetos representados*. En nuestro caso, los objetos representantes serían los objetos matemáticos, de los cuales podríamos preguntarnos de dónde surgen, dónde se ubican, qué objetividad tienen, etc.

Quisiera hacer notar aquí que el planteamiento ontológico no es absolutamente necesario a la hora de trabajar con las representaciones. Podríamos simplemente contemplar la cuestión en su aspecto psicológico y concentrarnos, a la hora de estudiar la comprensión, en tratar de explicar la efectividad de la mente humana para manejar ideas y procesos extremadamente sofisticados, tanto concretos como abstractos. Y podríamos postular aquí, de nuevo, la existencia de dos mundos: un *mundo de operaciones mentales*, que es siempre hipotético, y *un mundo de operaciones físicas*, en el que se incluyen las operaciones con sistemas de notación. No sería necesario entonces aludir explícitamente a la existencia de objetos o conceptos matemáticos a los que se refieran nuestras operaciones mentales o físicas.

La discusión de si es pertinente postular la existencia de conceptos matemáticos en un mundo aparte de la actividad cognitiva de los sujetos (cuya aprehensión sería el fin último de dicha actividad) o si, por el contrario, sólo deberíamos referirnos a esquemas de operaciones y redes de significados tomados como compartidos por sujetos que hacen matemáticas -y que se ponen de manifiesto parcialmente en situaciones determinadas- ha sido objeto de largo debate. Personalmente, me resulta difícil inclinarme por una u otra opción (incluso cuando pienso en qué supuesto objeto matemático correspondería a mis esquemas sobre diversos aspectos del número real, los cuales se activan de forma parcial dependiendo de las demandas de circunstancias concretas).

Sin embargo, a efectos prácticos, hemos considerado útil referirnos a objetos matemáticos -y más concretamente, a conceptos y estructuras numéricos- como un constructo teórico que nos sirve de punto de partida a la hora de determinar los significados y usos que podemos observar en relación con los mismos, y que se ponen de manifiesto a través de los sistemas de representación. No entramos en las cuestiones de la existencia o no de un mundo aparte de objetos matemáticos y de la fidelidad con que se representaría dicho mundo, sino que, al posicionarnos, adoptamos el punto de vista de las modernas teorías de la ciencia y nos preocupamos únicamente por cuestiones de utilidad, coherencia, capacidad de explicación y acuerdo intersubjetivo.

Llegados a este punto, nos establecemos a nivel psicológico, y retomamos la distinción entre un mundo mental (interno) y un mundo físico (externo) para los sujetos. Dentro del mundo mental de la persona, siempre hipotético, situamos las llamadas *representaciones internas*, las cuales se refieren a las operaciones y estructuras mentales y a las concepciones[1] de los objetos matemáticos a los que aludimos en el párrafo anterior.

Dentro del mundo físico situamos las estructuras físicas y las llamadas *representaciones externas*, que corresponden a los sistemas de notación o sistemas semióticos. Entendemos por ello sistemas de reglas para identificar o crear sus caracteres, operar sobre ellos y determinar relaciones entre los mismos. Los caracteres no tienen por qué ser cadenas de letras o dígitos, sino que pueden incluir gráficos y diagramas, o incluso objetos físicos como bloques, regletas, piezas de puzzles, etc; además, los tipos de acción pueden variar según la naturaleza particular del sistema empleado.

Dejamos de lado la cuestión de si las representaciones internas son necesarias o prescindibles; son útiles para nosotros como constructo teórico por cuanto dichas representaciones y las actividades cognitivas asociadas a las mismas nos permiten dotar de significado a las actividades de los individuos manifestadas a través de los sistemas de representación externos. Y viceversa, realizamos acciones sobre las representaciones externas en un intento de aprehender significados, los cuales son de naturaleza interna.

A continuación, describimos una serie de actividades asociadas a los sistemas de representación, las cuales nos permitirán caracterizar nuestra noción de comprensión posteriormente.

I) La *formación de representaciones identificables* en un sistema dado. Implica una selección de rasgos y datos en el contenido que se quiere representar. Debe respetar unas reglas cuya función es asegurar las condiciones de identificación y reconocimiento; se trata de reglas de conformidad no de reglas de producción efectiva de un sujeto. La enunciación de una frase, la elaboración de un texto, el diseño de una figura geométrica, la escritura de una fórmula son ejemplos de actividades matemáticas, que reflejarían actividades cognitivas asociadas a sistemas dados de representación.

II) La *transformación dentro de un sistema de representación*. Debe respetar unas determinadas reglas sintácticas, con o sin referencia a significados exteriores.

III) La *traducción entre sistemas de representación*. Bajo esta acción, es posible conservar la totalidad o sólo parte del contenido, o ampliar el contenido de la representación inicial. De cualquier forma, la traducción supone la coordinación entre distintos sistemas de representación.

1. Utilizaremos los nombres “concepto” u “objeto matemático” cuando nos refiramos a una idea matemática en su forma “oficial” –como un constructo teórico dentro del “universo formal del conocimiento ideal”. Para referirnos a toda la red de representaciones internas y asociaciones evocadas por el concepto –la contrapartida del concepto en el universo interno y subjetivo del conocimiento humano—utilizaremos la palabra “concepción” (Sfard, 1991; p. 3).

IV) La *cristalización* o consolidación de relaciones y/o procesos en objetos conceptuales o "entidades congnitivas", los cuales pueden ser utilizados en relaciones o procesos en un nivel de organización más elevado.

V) La *modelización*. Este tipo de actividad incluye la construcción y prueba de modelos matemáticos. Supone una traducción entre aspectos de situaciones y sistemas de representaciones.

Nuestra noción de *comprensión* asume que el conocimiento se caracteriza por ser rico en relaciones. Puede pensarse como una membrana conectada de conocimientos, una red en la que las relaciones de conexión son tan importantes como las piezas discretas de información. Partiendo de la posición que hemos establecido anteriormente, suponemos que el conocimiento se representa internamente, y que esas representaciones internas están estructuradas. La comprensión de un concepto consiste entonces en el modo y grado de integración en la estructura de conocimientos de un sujeto:

> *"Una idea, procedimiento o hecho matemático es comprendido si forma parte de una red interna. Más específicamente, las matemáticas son comprendidas si su representación mental forma parte de una red de representaciones. El grado de comprensión viene determinado por el número y la fuerza de las conexiones. Una idea, procedimiento o hecho matemático es comprendido a fondo si se liga a redes existentes con conexiones más numerosas o más fuertes"* (Hiebert y Carpenter, 1992; p. 67).

Por tanto, podemos afirmar que se ha producido la comprensión de un concepto por parte de un sujeto cuando éste manifieste que ha enriquecido sus redes internas de conocimiento. Y esta manifestación sólo puede hacerse a través de los sistemas de representación y mediante las actividades asociadas a los mismos. Observando el dominio que el sujeto presenta a este nivel podemos inferir algo acerca de su organización mental interna y del grado de estructuración y la riqueza de la misma, la cual permitiría caracterizar diversos niveles de comprensión para un concepto determinado.

3. CUESTIONES DIDÁCTICAS

Una cuestión didáctica fundamental es la escasez de variedad en actividades relacionadas con los sistemas de representación que se han venido realizando en el sistema de enseñanza tradicional. Por lo general, sólo se suelen tener en cuenta las dos primeras actividades cognitivas mencionadas en el apartado precedente; una vez que se dominan las actividades de identificación y transformación dentro de distintos sistemas de representación, se ha venido considerando que el resto de las actividades se dominan espontáneamente. En lo que sigue, veremos que esto no es así e intentaremos dar algunas razones para ello. La repercusión que puede tener para la comprensión de los conceptos matemáticos se sigue directamente de la definición dada en el apartado precedente.

3.1. Sobre la traducción entre distintos sistemas de representación

Algunos de los bloqueos y obstáculos para la mencionada comprensión surgen de la imposibilidad de representar mediante un cierto sistema aspectos de un concepto que sólo pueden ser expresados mediante otros; esto es, de la irreductibilidad entre sistemas de representación. El interés de la traducción entre los distintos sistemas de representación de un concepto para lograr una coordinación entre los mismos tiene varios motivos. Por una parte podemos referirnos a una economía de tratamiento, ya que hay facetas de un concepto que un determinado sistema de representación puede poner de manifiesto con más claridad que otros. También hay acciones ligadas a un concepto en cuestión que pueden llevarse a cabo con más facilidad utilizando uno de sus sistemas de representación en detrimento de los otros. Así, la existencia de varios sistemas de representación permite cambiar de registro y, de este modo, trabajar de la manera más económica y más potente en cada caso.

Por otra parte, también existe una complementariedad de los sistemas, ya que una vez elegido un sistema de representación para un contenido, se impone una selección de algunos elementos significativos o de información del contenido que se representa; esta selección se hace en función de las limitaciones y las posibilidades del sistema elegido. Esto quiere decir que toda representación es cognitivamente parcial en referencia a lo que ella representa y que de un sistema de representación a otro no son los mismos aspectos de un contenido los que se representan. Los sistemas de representación pueden dividirse en los siguientes grupos: digitales y analógicos, analíticos y visuales, o simbólicos y gráficos. En toda tarea de pensamiento están presentes ambos, y la proporción entre uno y otro no sólo varía con la tarea o el aspecto que se quiera mostrar, sino también con las características de los sujetos, que pueden mostrar mayor habilidad o preferencia para uno u otro.

Por último, nos referiremos a la necesidad de coordinación e integración de registros de representación para la conceptualización. Como continuación de la idea anterior, si cada sistema de representación ofrece una consideración parcial para un concepto, el cruce de representaciones relativas a ese concepto mejora la información sobre el mismo; pero esto plantea mayores dificultades para el sujeto que está aprendiendo tales conceptos.

3.2. Sobre la cristalización

El siguiente paso, después de que el alumno haya interiorizado distintos sistemas de representación de un concepto y se haya familiarizado con las relaciones dentro de los mismos y entre los mismos, es el de la cristalización de las relaciones y/o procesos aprehendidos en objetos conceptuales. Estos objetos funcionan como entidades cognitivas que pueden ser utilizadas en procesos o relaciones de un nivel de organización más elevado. De esta manera, las redes conceptuales no sólo crecerían horizontalmente, fortificando y enriqueciendo conexiones, sino que crecerían también verticalmente, de un modo jerárquico, a través de estructuras cada vez más potentes que incluyen y permiten organizar a las anteriores.

La coordinación de distintos sistemas de representación de un concepto juega un papel fundamental aquí, aunque la cristalización supone un salto más allá, un salto en el que varias representaciones de un concepto pasan a ser unificadas semánticamente por un constructo abstracto, puramente imaginario.

El potencial de los nombres, símbolos, gráficos y otros sistemas de representación en la cristalización difícilmente puede sobreestimarse. A juzgar por la historia, en numerosas ocasiones la cristalización de conceptos ha estado ligada a los sistemas de representación. Por ejemplo, la introducción de la recta numérica puede considerarse como un paso definitivo para la conceptualización de los números negativos, lo mismo sucede con la ampliación del sistema decimal de numeración para incluir las fracciones decimales, en el caso de los números irracionales, y con la invención de lo que hoy conocemos como el plano Argand para considerar a los números complejos como objetos matemáticos legítimos. Parece razonable esperar que las representaciones puedan jugar un papel similar en el aprendizaje individual. Esta hipótesis, sin embargo, requiere un mayor trabajo empírico para ser corroborada.

3.3. Sobre la modelización

Por último, la modelización presenta un aspecto distinto de la utilización de sistemas de representación. Hasta ahora nos hemos referido a aspectos que tienen que ver con la construcción de significados a través del uso de representaciones ya establecidas. Sin embargo, cuando intentamos usar las matemáticas en situaciones de la vida real, los procesos que ponemos en juego implican la necesidad de hacer descripciones simbólicas de situaciones que ya son significativas de por sí. También aquí el dominio con los sistemas de representación es clave para realizar con éxito este tipo de actividad matemática.

Así, cuando los estudiantes desarrollan modelos para describir situaciones y dinámicas de la vida real, usualmente lo hacen utilizando una amplia variedad de representaciones que interactúan unas con otras y muchas de las cuales conllevan diagramas y gráficos e incluso sistemas de notación introducidos e inventados por los propios estudiantes.

En general, cuando se produce una descripción inicial de la situación que será modelizada, puede haber una combinación de palabras habladas, símbolos escritos, dibujos o diagramas. Pero, en cada caso, la representación tiende a organizar y simplificar la situación de manera que sale a la luz información adicional y, de esta forma, la atención puede dirigirse hacia patrones y regularidades subyacentes que pueden, a su vez, producir un cambio en las concepciones. Esta nueva información a menudo crea la necesidad de una descripción más refinada y elaborada, la cual tiende a hacer posible otro ciclo en el que vuelve a salir a la luz información adicional. Por tanto, en la construcción de un modelo matemático, los sistemas de representación internos y los externos interactúan y evolucionan en ciclos que se suceden hasta que la correspondencia entre el modelo y lo modelizado le parece al sujeto o sujetos suficientemente potente para producir los resultados deseados sin más adaptaciones.

Esta necesidad de una estabilidad conceptual cada vez mayor es fundamental para la progresiva diferenciación e integración de sistemas conceptuales relevantes; los sistemas de representación externos son imprescindibles, tal como se ha descrito, para que el proceso se lleve a cabo. Más aún, las habilidades matemáticas que se han señalado pueden llevar a los estudiantes más allá de pensar mediante el uso de una representación o un sistema de representación dados para desarrollar un pensamiento crítico y ser capaces de evaluar los puntos fuertes y débiles de sistemas de representación alternativos.

4. EJEMPLIFICACIÓN DEL USO DE LAS REPRESENTACIONES PARA CARACTERIZAR COMPRENSIÓN DE LOS ESTUDIANTES EN NUESTRAS INVESTIGACIONES

Dentro del grupo de investigación Pensamiento Numérico se han venido realizando trabajos que tienen en común el interés por poner de manifiesto la pluralidad de los sistemas de representación mediante los que se expresan las estructuras numéricas. Cada sistema numérico, como complejo de entes, relaciones y operaciones, necesita de la coordinación de distintos sistemas de representación para expresar aspectos esenciales de su estructura. En lo que sigue, ejemplificaremos cómo hemos trabajado este tipo de actividad con los alumnos en dos de nuestras investigaciones, en las cuales las representaciones gráficas han ocupado un lugar relevante paralelamente con las representaciones simbólicas. Mostraremos las potencialidades y las dificultades que hemos observado en la coordinación de sistemas de representación en estructuras numéricas y en otras actividades tales como la identificación de representaciones y la cristalización.

4.1. Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales con alumnos de secundaria

Este trabajó se centró en el estudio de las sucesiones de números naturales, lineales y cuadráticas, mediante el empleo de tres sistemas de representación: figurativo (configuraciones puntuales), simbólico estructurado (sistema decimal de numeración) y operatorio (desarrollos aritméticos). Se pretendió incidir en los patrones de formación de secuencias, tanto puntuales como numéricas.

Por lo que respecta a la identificación de representaciones y a las actividades correspondientes a transformaciones dentro de un mismo sistema de representación, los escolares con los que se trabajó (primer ciclo de secundaria: 12-14 años) admitieron sin dificultad el sistema de representación puntual para los números naturales y lo utilizaron adecuadamente, trabajando con diferentes modelos geométricos y enunciaron una gran riqueza de relaciones para números triangulares y cuadrados.

Con respecto a la coordinación entre distintos sistemas de representación, estos alumnos establecieron argumentos que conectaban el patrón geométrico y su correspondiente patrón aritmético a través de las representaciones puntuales. La economía de tratamiento se puso de manifiesto cuando sus trabajos mostraron que, de los tres sistemas empleados en la representación de números, la configuración puntual es el más intuitivo debido a su carácter gráfico, lo cual permite un tratamiento y análisis visual de la estructura de una cantidad.

Sin embargo, este sistema adquirió su mayor potencia cuando se trabajó conjuntamente con los desarrollos aritméticos y la notación decimal usual. Una configuración puntual completa su sentido cuando se emplea como visualización de un determinado desarrollo aritmético de un número, o familia de números concretos. Esto ilustra la complementariedad de los sistemas de representación, que requiere el apoyo continuado y alternado entre unos y otros -especialmente entre los de tipo gráfico y los de tipo simbólico- para lograr el dominio de ellos, tal como para andar requerimos usar coordinadamente nuestras dos piernas.

En la investigación que nos ocupa surgieron también dificultades a la hora de coordinar los tres sistemas de representación que se manejaron. Tal como señalamos en apartados precedentes, la dificultad estriba en que cada uno de estos sistemas de representación ofrece una consideración parcial de las sucesiones a las cuales representan y del término general de las mismas. Así, cuando se pide obtener el término general de una sucesión, lo que se pide es encontrar -mediante la notación algebraica- una expresión general de la estructura común de todos los términos. Esta pregunta no puede ser respondida desde el sistema decimal de numeración, ya que, en este sistema, cada término viene dado por un símbolo único y no se considera su estructura compartida; de ahí que la respuesta más común que se encuentra es n, que es un símbolo único y representa "un término general". En la representación mediante configuraciones puntuales sí se aprecia la estructura común, pero el carácter concreto de tales representaciones dificulta la obtención de un término genérico. Sólo mediante los desarrollos aritméticos es posible generalizar los términos de una sucesión. Sin embargo, tal como ya vimos, el cruce de representaciones relativas plantea dificultades de integración de las mismas. En los alumnos de este estudio se apreció una integración muy débil entre los tres sistemas de representación para expresar la noción de término general de una sucesión. Muy pocos identificaron el término general con la estructura operatoria común que comparten los términos de una secuencia, cuya notación más adecuada viene dada por el desarrollo aritmético. La comprensión de los escolares de 12-14 años sobre la noción de término general fue prácticamente inexistente dado que no se apreció estructuración entre las representaciones mentales correspondientes a los diferentes sistemas de representación utilizados. Sólo unos pocos estudiantes, que integraron total o parcialmente los tres sistemas, dieron muestras de un cierto dominio de la noción de término general de una sucesión. El salto a la cristalización, en el cual las distintas representaciones se unifican semánticamente en una noción abstracta, se revela una vez más como problemático de dar para una gran mayoría de los alumnos, al menos en los primeros intentos de integrar representaciones.

4.2. Introducción del concepto de número real en secundaria

En el segundo trabajo que presentamos se realizó un estudio de la introducción de los conceptos de número irracional y número real en secundaria. Dicha introducción tuvo lugar en un curso de estudiantes de 14-15 años y en ella jugaron un papel fundamental los distintos sistemas de representación de los números reales: el sistema de notación decimal y la notación operatoria de los reales, dentro de las notaciones simbólicas, y el modelo de la recta, junto con la medida de longitudes en el terreno de las representaciones gráficas.

En cuanto a la identificación y el manejo de sistemas de representación, nuestros alumnos mostraron comprensión del significado de los dígitos en el sistema de notación decimal y algunas dificultades a la hora de interpretar signos gráficos. Así ocurrió con los significados atribuidos al concepto de punto, segmento o línea, en los que salió a la luz la confusión entre aspectos empíricos y teóricos de las representaciones gráficas, y cuya aclaración resultó fundamental para la comprensión de la existencia de longitudes inconmensurables.

Por lo que respecta a la traducción entre distintos sistemas de representación de los reales y a la coordinación entre los mismos, pudimos observar cómo nuestros estudiantes llegaron a dominar relaciones de complementariedad y economía de representaciones, pasando adecuadamente de unas a otras cuando la ocasión lo requería. Así, fueron capaces de recurrir a la notación fraccionaria de decimales periódicos cuando el fin era realizar operaciones aritméticas con ellos, o viceversa, cuando se trataba de ordenarlos, así como de utilizar pertinentemente las notaciones operatorias para pasar a las representaciones geométricas y, de este modo, argumentar que determinados decimales no periódicos podían representarse exactamente.

No obstante, como sucedió en la investigación anterior, el hecho de que cada representación de los reales dé cuenta de aspectos parciales del concepto en cuestión provocó dificultades a la hora de integrarlas. Así, pudimos observar la resistencia de varios alumnos a considerar como equivalentes representaciones de los números reales que presentan facetas distintas y exclusivas de cada una. Un punto clave aquí es llegar a admitir que un decimal infinito puede ser “igual exactamente” a su notación operatoria correspondiente (fracción, si éste es periódico, raíz cuadrada, etc.) y también que un decimal infinito pueda corresponder a la medida de una longitud finita y bien delimitada. No todos los alumnos parecen dispuestos a admitir esto de buen grado, aunque el hacerlo facilita el paso siguiente de la cristalización de conceptos como número irracional y número real.

Un considerable progreso hacia la mencionada cristalización se produjo a través de los reiterados intentos por dotar a los decimales no periódicos de un estatus de objeto actual, trascendiendo así su consideración como mero proceso operatorio o como una secuencia de dígitos imposible de controlar -en cualquier caso como un proceso infinito-, en lugar de cómo un objeto matemático, susceptible de ser manipulado y utilizado. Fruto de estos intentos fue el que algunos estudiantes aglutinaran a determinadas longitudes inconmensurables con la unidad- tales como las correspondientes al Número de Oro, a p y a raíces cuadradas- y les asociaran el término “proporción”. De esta forma, distinguieron una clase especial de entre todos los decimales infinitos, correspondientes a lo que ellos llamaron proporciones, diferente de aquellos otros decimales infinitos que eran periódicos o que tenían cifras arbitrarias.

Nuestros alumnos dieron así el primer paso de un proceso en el que surge un nuevo objeto matemático, separado del proceso que le dio origen, y que empieza a derivar su significado de ser miembro de una determinada categoría. Es esta categoría la que otorgará, al consolidarse, su estatus de existencia definitivo al nuevo concepto matemático. Si bien los estudiantes con los que trabajamos estaban lejos de tener una conceptualización sólida de los números reales, consideramos un logro que el trabajo didáctico con los sistemas de representación diera lugar, de forma natural, a que surgiera en la comunidad de la clase este tipo de cristalizaciones o consolidaciones.

Para una consideración más específica de estas investigaciones -en las que puedan observarse con profundidad las descripciones de los distintos sistemas de representación mencionados, así como de las actividades asociadas a los mismos que se trabajaron con los alumnos y los resultados obtenidos- remitimos a las referencias de los trabajos de Castro, Rico y Romero.

5. CUESTIONES ABIERTAS

1) El hablar de “objetos matemáticos” o “conceptos” dentro de un universo de conocimiento ideal me sigue resultando un tanto problemático. Concretamente, en el caso de los conceptos numéricos, que son verdaderos sistemas y estructuras numéricas, no resulta fácil la caracterización exhaustiva de todos los entes, operaciones, y relaciones que constituyen dichas estructuras. Es decir, no resulta fácil caracterizar estas parcelas conceptuales dentro del conocimiento ideal y toda la extensión de sus campos semánticos, los cuales vienen establecidos por sus distintos usos. Parece como si no pudiéramos más que realizar aproximaciones sucesivas en este sentido. Estas aproximaciones a una caracterización exhaustiva vendrían mediadas por la persona o personas que las realizan y, en ese sentido, siempre me parecen susceptibles de ser ampliadas y enriquecidas.

Ahora bien, si atendemos a la idea de Fey (1990), de que la estructura de cada sistema viene determinada por un grupo reducido de grandes y potentes ideas, sí que sería factible, y además necesario, contar con la delimitación de éstas para cuántas más estructuras conceptuales mejor. El estudio de los sistemas de representación de dichas estructuras puede seguramente ponernos en la pista de cúales son esas claves. ¿Qué otros parámetros necesitaríamos? ¿Existen procedimientos generales que nos permitan acometer el trabajo para cualquier estructura conceptual?

2) Una vez caracterizadas las estructuras conceptuales que sería deseable que los alumnos aprendieran, lo cierto es que el único medio que tenemos para lograr nuestro objetivo es el trabajo con situaciones didácticas a través de sistemas de representación. Así, tendremos ocasión de observar e interactuar con esquemas de operaciones y redes de significados manifestados a través de representaciones externas, normalmente dentro de la comunidad de la clase. En este punto es esencial recordar que los sistemas de representación son, en realidad, sistemas de comunicación, mediante los cuales construimos y compartimos significados. ¿Qué tipo de comunicación sería deseable establecer en nuestras comunidades de aprendizaje? ¿Cómo podríamos utilizar los sistemas de representación al servicio de una comunicación significativa, que promueva un progreso cognitivo auténtico?
3) Dentro de las actividades asociadas a los sistemas de representación, hemos argumentado la importancia de todas ellas para lograr un dominio de las ideas y estructuras matemáticas representadas. En nuestros trabajos empíricos hemos tratado ampliamente con las tres primeras, es decir con la identificación y formación de representaciones, con las transformaciones dentro de un mismo sistema de representación y con la coordinación entre sistemas. También nos hemos acercado a la actividad de la cristalización, constatando su dificultad. Dada la importancia de la quinta actividad, de modelización, teóricamente explicitada, sería muy deseable contar con estudios empíricos que nos permitieran ilustrar y profundizar en este punto.

REFERENCIAS

Castro Martínez, E. (1994), *Exploración de Patrones Numéricos mediante Configuraciones Puntuales. Estudio con escolares de Primer Ciclo de secundaria (12-14 años).* Granada: Comares.

Coriat, M. y Scaglia, S. ´Representación de los números reales en la recta‘. *Enseñanza de las Ciencias* (en prensa).

Douady, R. (1986). ´Jeux de cadres et dialectique outil-objet‘. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7, 5-31.

Duval, R. (1993). *Semiosis y Noesis.* Lecturas en Didáctica de la Matemática. Escuela Francesa. Sección de matemática educativa del CINVESTAV-IPN. México.

Duval, R. (1995). *Semiosis et pensée humaine.* Berna: Peter Lan.

Fey, J. (1990). Quantity, en Steen, L (ed.). *On the shoulders of giants. New approaches to numeracy*. Washington: National Academy Press.

Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). ´Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An introductory analysis‘. En *Conceptual and Procedural Knowledge: the case of Mathematics*. Hiebert, J. (ed.). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hiebert, J. y Carpenter, T. (1992). ´Learning and teaching with understanding‘. En *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Grouws, D.A. (Ed.). New York: MacMillan Publishing Company.

Janvier, C; Girardon, C. y Morand, J. (1993). ´Mathematics Symbols and Representations‘, en Wilson, P. (ed.) *Research Ideas for the Classroom. High School Mathematics* (pp. 79-102) Reston VA: NCTM.

Kaput, J. (1987). ´Representation Systems and Mathematics‘. En Janvier, C. (ed.) *Problems of Representation in the Teaching and Learning of mathematics.* New Jersey: LEA. Hillsdale.

Kaput, J. (1992). ´Technology and Mathematics Education´. En En *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Grouws, D.A. (Ed.). New York: MacMillan Publishing Company.

Lesh, R. (1997). ´Matematización: la necesidad "real" de la fluidez en las representaciones`. *Enseñanza de las Ciencias*. Vol. 15 nº 3.

Romero I. y Rico, L. (1996). *Sobre la introducción del concepto de irracionalidad en enseñanza secundaria: el caso de ÷2.* Educación Matemática, vol. 8, nº2, 18-33.

Romero Albaladejo, I. (1997). *La introducción del Número Real en Educación secundaria: una experiencia de investigación-acción.* Granada: Comares.

Romero I. y Rico, L. (1999). *Representación y comprensión del concepto de número real. Una experiencia didáctica en Secundaria.* Revista EMA, vol. 4, nº2, 117-151.

Ruíz López, F. (2000). *La tabla 100: representaciones geométricas de relaciones numéricas. Un estudio con profesores de Primaria en formación*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Scaglia, S. (2000). *Dos conflictos al representar números reales en la recta*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Sfard, A. (1991). ´On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin‘. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Vergnaud, G. (1990). 'Théorie des champs conceptuels´. *Recherches en Didactique des Mathématiques.*

Vergnaud, G. (1993). La teoría de los campos conceptuales. En Sánchez, E. Y Zubieta, G. (eds.), Lecturas en Didáctica de la Matemática. Escuela Francesa, pp. 88-117. CINVESTAV-IPN. México, D.F.