La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos. Un estudio en el nivel universitario

Tomás Pardo Salcedo
IES Tirant lo Blanc

Bernardo Gómez Alfonso
Departamento de Did. Mat. Universidad de Valencia

Resumen

Presentamos algunos de los resultados más relevantes de un estudio sobre la problemática de la enseñanza-aprendizaje de los números complejos. El estudio se ha dirigido recabar información para sustentar sugerencias de intervención en las pautas educativas en relación con esta temática.

Marco de referencia

Esta investigación se enmarca en la línea seguida por los miembros del grupo de Pensamiento numérico y algebraico (PNA) del Departamento de Didáctica de las matemáticas de la Universidad de Valencia que toma como modelo de referencia el marco teórico de investigación en Matemática Educativa de Filloy (1999) denominado Modelos Teóricos Locales (MTL). Este marco fundamenta la investigación desde el punto de vista teórico y aporta, desde el punto de vista metodológico, una manera de organizar la investigación en matemática educativa orientada a la observación experimental de fenómenos de enseñanza y aprendizaje. En definitiva, los MTL nos ayudan a explicar de manera coherente los fenómenos observados. Los MTL se caracterizan por ser un modelo recurrente y contemplar cuatro componentes interrelacionadas: 1) Componente de enseñanza del MTL. 2) Componente de cognición del MTL. 3) Componente de competencia formal del MTL. 4) Componente de comunicación del MTL.

El objeto de estudio, el diseño y el desarrollo de la investigación

El objeto de estudio ha sido la problemática de la enseñanza/aprendizaje de los números complejos. El análisis previo de la problemática ha delimitado el marco teórico para la observación experimental situándolo en la componente formal, y dentro de ella en el análisis histórico y epistemológico.

Establecido el marco teórico se ha procedido al desarrollo de un programa de observación experimental donde ha entrado en juego la componente cognitiva mediante el procedimiento denominado *análisis de tareas*.

La hipótesis teórica a contrastar con la observación experimental fue la siguiente:

Es posible que algunas dificultades e inconsistencias conceptuales y algorítmicas en relación con los complejos, a las que se han enfrentado los matemáticos a lo largo de la historia, guarden paralelismo con las que afrontan los estudiantes cuando están intentando ser competentes en esta materia.

Para centrar el estudio se ha tratado de rebuscar en el desarrollo histórico de los números complejos algunas de las dificultades e inconsistencias conceptuales y algorítmicas que han tenido que sortear los matemáticos y que la enseñanza actual no está teniendo en cuenta.

Una revisión histórica preliminar, permitió identificar cuatro grandes etapas caracterizadas por los cambios observados en las concepciones epistemológicas de los números complejos:

- *Algebraica*. Primeras apariciones de las raíces cuadradas de cantidades negativas, consideradas cómo raíces inútiles, aunque coherentes con los métodos algebraicos.
- *Analítica*. Aceptación y generalización del uso de las expresiones imaginarias gracias al desarrollo del análisis infinitesimal, consideradas como cantidades que por su naturaleza son imposibles, ya que no se pueden ubicar entre los números posibles: positivos, negativos, o nulos. Por eso, se las llama cantidades imaginarias porque sólo existen en la imaginación.
- *Geométrica*. Introducción de un eje de imaginarios que tiene asociado $\sqrt{-1}$ como unidad perpendicular a 1 y consideración de los imaginarios como vectores del plano. Así, en el plano de ejes real e imaginario un vector queda representado por $a+bi$; y $\sqrt{-1}$ actúa como rotación de 90º alrededor de O, es decir como un signo o índice de perpendicularidad.
- *Formal*. Formalización de los números complejos y consideración de los mismos como pares ordenados de números reales.

Estas etapas se tomaron como referencia para organizar la búsqueda y selección de cuestiones relevantes para contrastar la hipótesis, contextualizándolas en una concepción epistemológica. Con estas cuestiones se procedió a la elaboración y al pilotaje de un cuestionario para su posterior aplicación a 19 estudiantes de primer curso de la licenciatura de matemáticas en la Universidad de Valencia, en su ambiente habitual de clase el último mes del curso académico.

La selección de cuestiones para la observación experimental

El cuestionario sometido a los estudiantes constó de cinco tareas, una por cada una de las etapas señaladas antes, excepto en el caso de la etapa analítica de la cual se extraen dos tareas.

Para el estudio de las respuestas, se ha aplicado la metodología del "análisis de tareas", lo que ha permitido realizar una primera descripción y categorización de las actuaciones de los estudiantes mediante un modelo de interpretación, puesto a punto en otros trabajos precedentes de miembros de nuestro grupo de P.N.A. (Fernández, A. Figueras, O, Gómez B. y Margarit J.,1997; Fernández, A. Gómez B.; y Margarit J., 1997). Este análisis permite aventurar que se confirma la hipótesis de partida en el sentido de que la enseñanza y aprendizaje de los números complejos no está teniendo en cuenta las dificultades identificadas que han estado presentes a lo largo de la historia y que los estudiantes las reproducen, y en algunos casos agravadas.

Las cuatro primeras tareas fueron las siguientes (prescindimos de la quinta porque no ha cumplido con las expectativas):

Tarea 1: *la partición*

Esta tarea, la elegimos de la etapa que hemos llamado algebraica. Está tomada literalmente de Cardano (Ars Magna, 1545, p. 287) y consiste en un problema cuya solución viene de la mano de una ecuación de segundo grado. Su propósito es hacer aflorar las posibles dificultades e inconsistencias de los estudiantes para resolver un problema planteado con números enteros pero cuya solución no es real sino compleja. La respuesta adecuada implica aceptar que las raíces complejas de la ecuación de segundo grado que permite resolver el problema son soluciones matemáticamente válidas, aunque en el enunciado no se mencione el campo numérico en el que debe darse la solución.

Tarea 2: *el logaritmo*

Esta tarea, corresponde a la etapa que hemos denominado analítica. Está basada en una conocida controversia sobre la existencia de los logaritmos de los números negativos entre Bernouilli y Leibniz, recogida por Euler (1749). Esta controversia surgió ante las contradicciones a las que llevaba el uso poco exigente de las reglas de cálculo.

Su propósito es hacer aflorar las posibles dificultades e inconsistencias de los estudiantes cuando tienen que interpretar una secuencia de operaciones lógicas con logaritmos de números negativos.

La respuesta adecuada, implica el reconocimiento de la existencia de estos últimos en el campo complejo. Además, hay que saber cuando se pueden extender las reglas generales de la operatoria con logaritmos de los reales positivos a los negativos y por qué (hay infinitos logaritmos para cada número: los números reales positivos tienen un sólo valor del logaritmo que es real, siendo todos los otros imaginarios; los números negativos y los números complejos tienen todos los valores del logaritmo imaginarios).

2

Cuestión 1. La partición

Divide el número 10 en otros dos números cuyo producto sea 40

Explica como lo haces

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

Cuestión 2. El logaritmo

Dado que $(-x)^2 = x^2$ se tiene que:

$\log(-x)^2 = \log x^2 \Rightarrow 2\log(-x) = 2\log x \Rightarrow \log(-x) = \log x$,

por lo que

$\log(-x)$ existe y es un número real.

En particular para $x=1$, $\ln(-1) = \ln(1)$ que, como sabemos, es cero.

¿Es cierto?

……………………………………………………

……………………………………………………

¿Es correcto el razonamiento?

……………………………………………………

……………………………………………………

Explica tu respuesta

……………………………………………………

……………………………………………………

Tarea 3: *las operaciones*

Esta tarea, la ubicamos en la etapa analítica y está basada en anotaciones de Euler (1984, p.42-44) y Vallejo (1841, p.242), sobre el cuidado que hay que tener al multiplicar expresiones imaginarias. El objetivo de la tarea es hacer aflorar las dificultades e inconsistencias de los estudiantes ante la multiplicación de raíces con radicando negativo, dado que si se aplica la regla general de la multiplicación*: la raíz del producto es el producto de las raíces*; se obtiene un resultado contradictorio con la regla para multiplicar los números imaginarios. La respuesta adecuada implica el reconocimiento de que las reglas generales de la multiplicación no funcionan en el producto de raíces con radicando negativo.

Tarea 4: *el orden*

Esta tarea, la hemos diseñado basándonos en un comentario de Hamilton (1837; cit. Ferreirós, 1998, p. 11) donde se pone de manifiesto la dificultad de situar bajo la definición clásica de número a los imaginarios, dado que éstos no pueden satisfacer el requisito de ser un cuerpo ordenado, como ocurre con los números reales. El objetivo de esta tarea es hacer aflorar las dificultades e inconsistencias de los estudiantes cuando se les pide que ordenen números complejos presentados de varias formas. La respuesta adecuada implica reconocer que los complejos no tienen un orden compatible con su estructura de cuerpo.

4

Cuestión 3. Las operaciones

Calcula

a) $\sqrt{-5}\sqrt{-5} =$.

Explica tu respuesta

...

b) $\sqrt{-5}\sqrt{-1}\sqrt{5}\sqrt{-1} =$

Explica tu respuesta

...

5

Cuestión 4. El orden

Usando los signos <, >, = ordena los números:

a) $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-1}$, 0, $\sqrt{1}$

...

Explica tu respuesta

...

b) 1+i, 1+2i, 2+2i, 2+i

...

Explica tu respuesta

...

c) i, $\sqrt{i}$,

...

Explica tu respuesta

...

LOS RESULTADOS

A continuación se presenta una muestra de las respuestas más relevantes de los estudiantes al resolver las cuatro primeras tareas del cuestionario para ilustrar el tipo de análisis que hemos hecho de las mismas.

Tarea 1: *la partición*

Ejemplo: Alumno 1

Cuestión 1. La partición

Divide el número 10 en otros dos números cuyo producto sea 40 $40 = 2^3 \cdot 5 \wedge 10 = 5 \cdot 2$

Explica como lo haces

$40 = 2^3 \cdot 5 = 8 \cdot 5$ i $10 = 5 \cdot 2$ (sols els podem dividir per potències de 2 fins 3 ∧ 5.

Transcripción: “sólo los podemos dividir por potencias de 2 hasta 3 ∧ 5 ” (hasta 2^3 y 5)

Explicación: El estudiante calcula los factores de 40 y de 10. Divide el 10 por dos números naturales menores que 10 y cuyo producto es 40.

Interpretación: De lo que manifiesta en el apartado “explica como lo haces”, interpretamos que el estudiante entiende que éste es un problema aritmético, y que en consecuencia sólo intenta resolverlo mediante operaciones aritméticas con números naturales. Tal vez hace una interpretación demasiado estricta de la palabra *divide* del enunciado. Es decir, lo entiende como la orden de hacer uso del algoritmo de la división, por eso divide por los números naturales cuyo producto es 40.

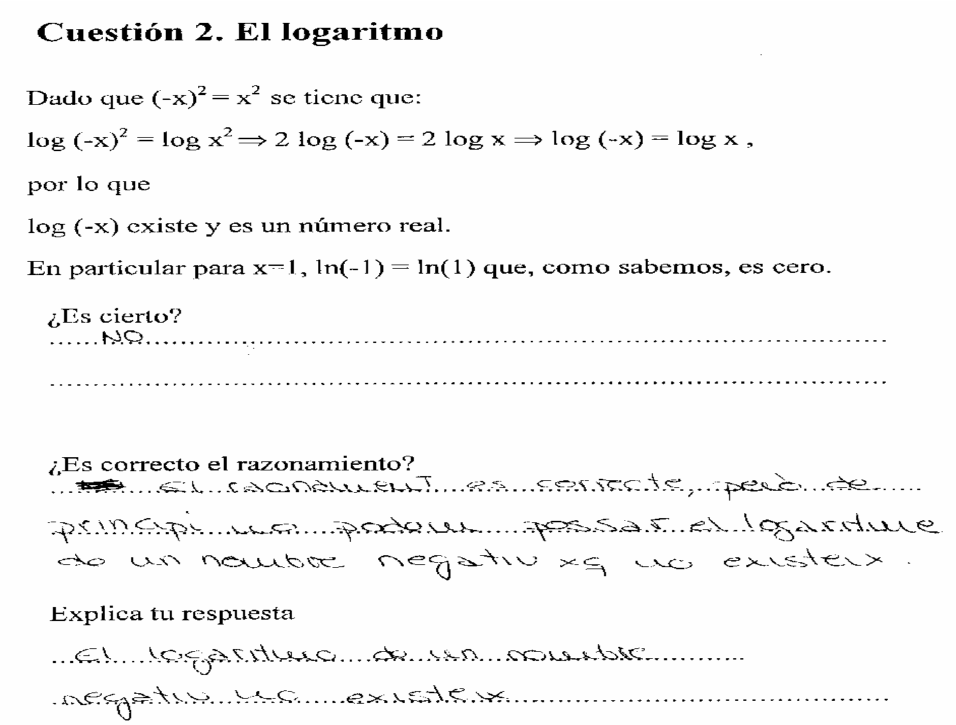
Predicción y sugerencias: Creemos que el estudiante repetirá este tipo de procedimiento con problemas análogos mientras no se le haga ver que éste es un problema que admite una lectura y una resolución algebraica, y que la palabra del enunciado *divide* se refiere aquí a *descomponer* en dos sumandos y no necesariamente a dividir en sentido estricto.

Utilizan el álgebra y dan la solución compleja	5/19
Utilizan el álgebra y dejan solución indicada sin expresión imaginaria	1/19
Utilizan la aritmética y se centran en factores del 40	5/19
Utilizan la aritmética e interpretan que hay que dividir el 10 en sentido estricto	2/19
No contesta o lo hace sin sentido aparente	6/19

Frecuencia de los tipos de respuestas por categorías de la tarea

Tarea: *el logaritmo*

Ejemplo: Alumno 2



Cuestión 2. El logaritmo

Dado que $(-x)^2 = x^2$ se tiene que:

$\log(-x)^2 = \log x^2 \Rightarrow 2\log(-x) = 2\log x \Rightarrow \log(-x) = \log x$,

por lo que

$\log(-x)$ existe y es un número real.

En particular para $x=1$, $\ln(-1) = \ln(1)$ que, como sabemos, es cero.

¿Es cierto? ......NO......

¿Es correcto el razonamiento? ...El raonament es correcte, però de principi no podem passar el logaritme de un nombre negatiu xq no existeix.

Explica tu respuesta

...El logaritme de un nombre negatiu no existeix...

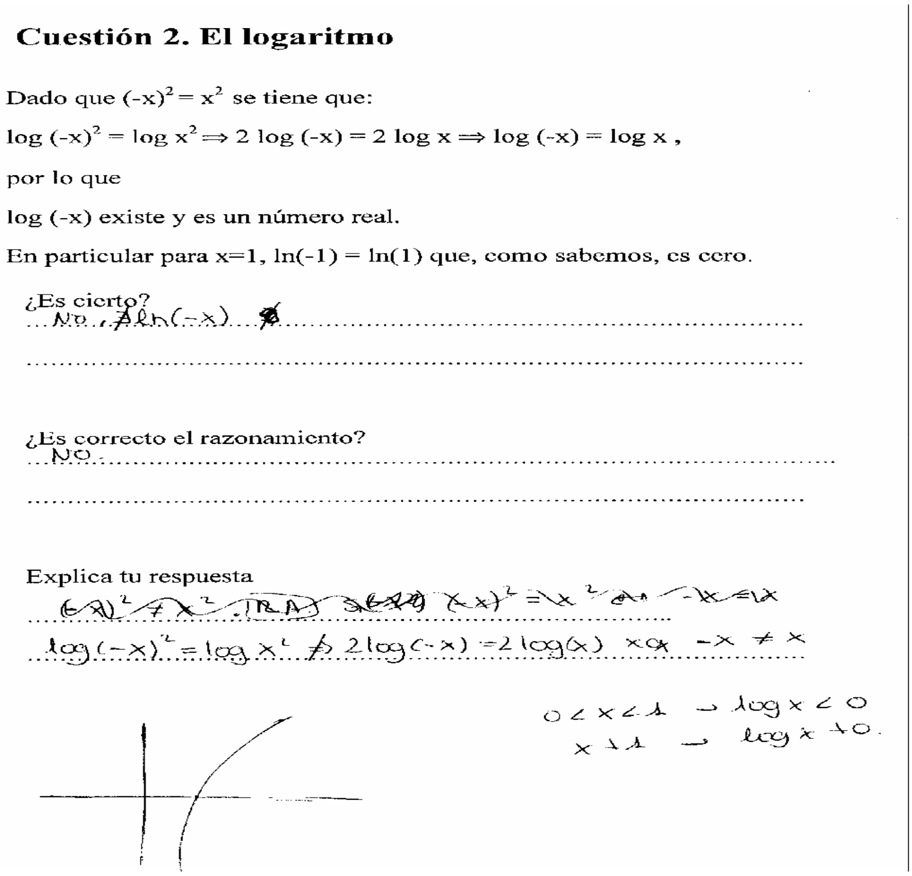
Transcipción: “No”. “El razonamiento es correcto, pero en principio no podemos poner el logaritmo de un número negativo xq no existe”. “El logaritmo de un número negativo no existe”

Explicación: Por un lado dice que el razonamiento es correcto y por otro que el logaritmo de un número negativo no existe.

Interpretación: Su respuesta es incoherente, ya que si cree que no existen los logaritmos de los números negativos, no debería decir que el razonamiento es correcto.

Predicción: El estudiante está anclado en una idea de los logaritmos que es propia de los números reales. Esto le induce a creer que las reglas aprendidas con los reales son válidas siempre. Si no se le advierte de que esto no es así y el por qué, difícilmente podrá salir de esta creencia por sí sólo.

Ejemplo: Alumno 17



Cuestión 2. El logaritmo

Dado que $(-x)^2 = x^2$ se tiene que:

$\log(-x)^2 = \log x^2 \Rightarrow 2\log(-x) = 2\log x \Rightarrow \log(-x) = \log x$,

por lo que

log (-x) existe y es un número real.

En particular para x=1, ln(-1) = ln(1) que, como sabemos, es cero.

¿Es cierto?

No, $\nexists$ ln(-x) $\nexists$

¿Es correcto el razonamiento?

No.

Explica tu respuesta

$\log(-x)^2 = \log x^2 \not\Rightarrow 2\log(-x) = 2\log(x)$ xq $-x \neq x$

$0 < x < 1 \to \log x < 0$

$x > 1 \to \log x > 0$

Transcripción: “ No, ∃ ln(-x) ”. “ No ”. “$\log(-x)^2 = \log x^2 \Rightarrow 2\log(-x) = 2\log x$ xq $-x \neq x$

$0 < x < 1 \to \log x < 0$

$x > 1 \to \log x > 0$

Explicación: El estudiante niega el razonamiento del enunciado porque dice que a números diferentes le corresponden logaritmos diferentes. Usa la creencia de que los logaritmos de los negativos no existen y dice que el razonamiento no es correcto. Pero no explica satisfactoriamente el por qué.

Interpretación: Usa un argumento lógico para explicar que algo está mal, detecta la contradicción y la usa para negar uno de los pasos; pero su explicación es insuficiente como respuesta a la pregunta ya que no se basa en la cadena de razonamientos del enunciado. No explica por qué la regla que es válida con los reales aquí no lo es.

Predicción: Como el anterior, el estudiante está anclado en una idea de los logaritmos que es propia de los números reales. Si no se le advierte de con los complejos hay que reconceptualizar la noción de logaritmo y revisar sus reglas de cálculo, podemos esperar que incurra en contradicciones.

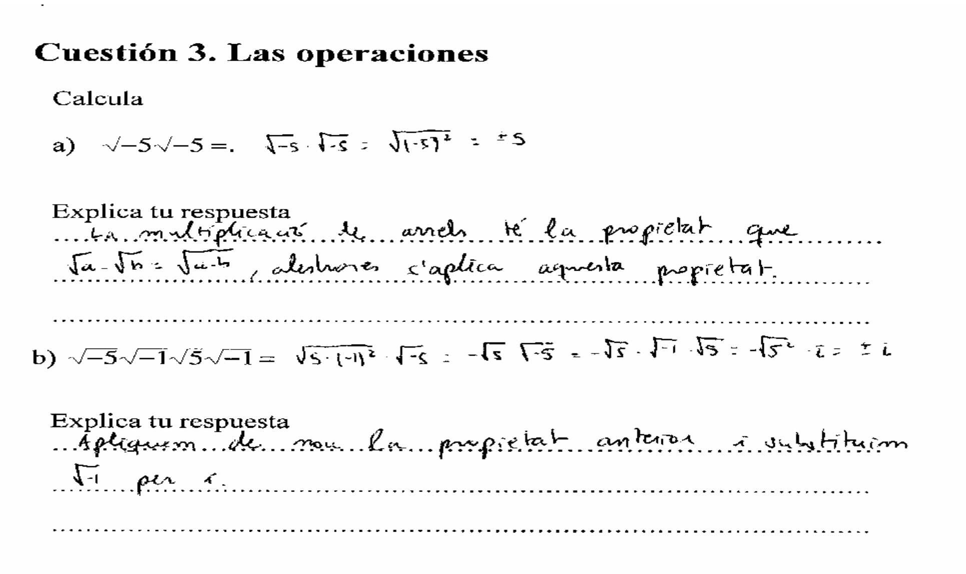
Usan la creencia de que los logaritmos de los negativos no existen y dicen que el razonamiento no es correcto. Pero no explican por qué	8/19
Usan la creencia de que los logaritmos de los negativos no existen y dicen que el razonamiento sí que es correcto. Son inconsistentes	3/19
Usan la creencia de que los logaritmos de los negativos no existen pero no contestan a la pregunta si el razonamiento es correcto	3/19

Señalan uno de los pasos como incorrecto, pero su razonamiento no está bien argumentado	3/19
Manifiestan dificultades de tipo algebraico. Inconsistencias con los paréntesis	2/19

Frecuencia de los tipos de respuestas por categorías de la tarea

La tarea *las operaciones*

Ejemplo: Alumno 5



Cuestión 3. Las operaciones

Calcula

a) $\sqrt{-5}\sqrt{-5} =$. $\sqrt{-5}\cdot\sqrt{-5} = \sqrt{(-5)^2} = \pm 5$

Explica tu respuesta

La multiplicació de arrels té la propietat que $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{a\cdot b}$, aleshores s'aplica aquesta propietat.

b) $\sqrt{-5}\sqrt{-1}\sqrt{5}\sqrt{-1} =$ $\sqrt{5\cdot(-1)^2}\cdot\sqrt{-5} = -\sqrt{5}\sqrt{-5} = -\sqrt{5}\cdot\sqrt{-1}\cdot\sqrt{5} = -\sqrt{5^2}\cdot i = \pm i$

Explica tu respuesta

Apliquem de nou la propietat anterior i substituim $\sqrt{-1}$ per i.

Transcripción

a)"$\sqrt{-5}\cdot\sqrt{-5} = \sqrt{(-5)^2} = \pm 5$. La multiplicación de raíces tiene la propiedad que $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{a\cdot b}$, entonces se aplica esta propiedad".

b)"$\sqrt{-5}\sqrt{-1}\sqrt{5}\sqrt{-1} = \sqrt{5\cdot(-1)^2}\cdot\sqrt{-5} = -\sqrt{5}\cdot\sqrt{-5} = -\sqrt{5}\cdot\sqrt{-1}\cdot\sqrt{5} = -\sqrt{5^2}\cdot i = \pm i$ Aplicamos de nuevo la propiedad anterior y sustituimos $\sqrt{-1}$ per *i*. "

Explicación: El estudiante, en el apartado a), aplica la regla general para multiplicar radicales, calcula el cuadrado de dentro del radical, calcula la raíz cuadrada del resultado y acompaña la respuesta con el doble signo ±.

En el apartado b) aplica la misma regla general que antes, aunque lo que escribe bajo el radical no se corresponde con el signo menos que extrae y que cabe suponer que procede de considerar que $\sqrt{(-1)^2}$ = -1 y no 1. Esto queda corroborado por su actuación posterior, donde extrae la forma imaginaria $\sqrt{-1}$ que escribe después como *i*. Finalmente, aplica otra vez la regla general a √5√5 y calcula la raíz cuadrada con el doble signo ± , aunque olvida escribir el 5.

Interpretación: En la respuesta del alumno se evidencian dificultades e inconsistencias de naturaleza diferente. En el apartado a) no tiene en cuenta que se trata de expresiones imaginarias, lo que le hubiera llevado a extraer √-1, a diferencia de lo que hace en el apartado b) donde si que lo hace. Otro aspecto llamativo es que parece interpretar el signo radical como la orden de calcular la doble raíz cuadrada de un número, lo que es una interpretación aritmética inconsistente porque produce respuestas contradictorias cuando se opera con radicales.

Predicción y : Entendemos que el estudiante conoce y puede manejar las reglas para operar radicales, raíces cuadradas y la expresión imaginaria implicadas en la tarea, pero encuentra dificultades para decidir cuando estas reglas están permitidas y cuando no. En concreto ignora que la regla para multiplicar radicales no funciona con los radicandos negativos. Por otra parte el estudiante utiliza una concepción aritmética del signo radical que le lleva a confundirlo con la orden de calcular la raíz cuadrada. Ignora que $\sqrt{(a)^2}=|a|$ y no ±a como él manifiesta.

En consecuencia, podemos esperar que el estudiante repetirá este tipo de comportamiento con problemas análogos y entendemos que son un producto de la enseñanza, que no advierte de estas restricciones adecuadamente. Creemos que es necesario revisar la distinción entre radical y raíz cuadrada, redefinir la noción de raíz cuadrada para incorporar el caso de radicandos negativos y justificar por qué $\sqrt{-1}\,\sqrt{-1}$ no es 1 ni ±1, sino que es –1.

Utilizan correctamente la regla para operar imaginarios	9/19
Utilizan la regla para operar imaginarios con errores de descuido	4/19
Usan las dos reglas: la general para multiplicar radicales y la regla para multiplicar raíces imagnarias.	4/19
Aplican exclusivamente la regla general de multiplicar radicales	2/19

Frecuencia de los tipos de respuestas por categorías de la tarea

Tarea: *el orden*

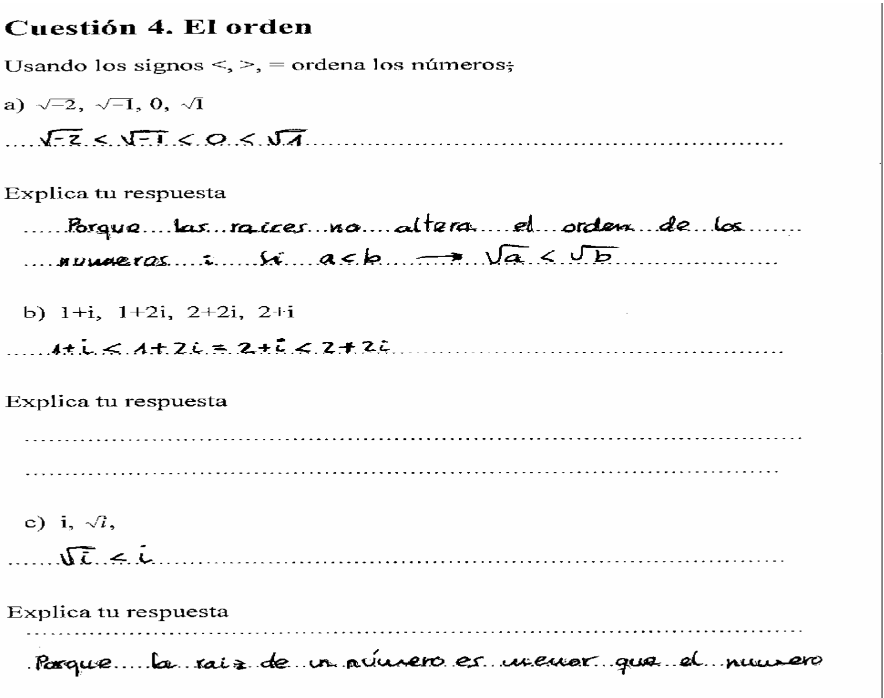
Ejemplo: Alumno 3

Transcripción

a) $\sqrt{-2} < \sqrt{-1} < 0 < \sqrt{1}$. Porque las raíces no alteran el orden de los números: si $a < b \rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

b) $1 + i < 1 + 2i = 2 + i < 2 + 2i$

c) $\sqrt{i} < i$. Porque la raíz de un número es menor que el número.


Cuestión 4. El orden

Usando los signos <, >, = ordena los números:

a) $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-1}$, 0, $\sqrt{1}$

$\sqrt{-2} < \sqrt{-1} < 0 < \sqrt{1}$

Explica tu respuesta

Porque las raices no altera el orden de los numeros i si $a < b \rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$

b) 1+i, 1+2i, 2+2i, 2+i

$1+i < 1+2i = 2+i < 2+2i$

Explica tu respuesta

c) i, $\sqrt{i}$,

$\sqrt{i} < i$

Explica tu respuesta

Porque la raiz de un número es menor que el numero

Explicación: El estudiante ordena todos los números en los tres apartados, pero sólo explica el criterio que usa en a) y c). En estos apartados, extiende reglas no enseñadas propias de los reales a los complejos: *si un número es menor que otro su raíz también lo es, la raíz de un número es menor que el número.*

Interpretación: De la respuesta del alumno se evidencian dificultades e inconsistencias de naturaleza diferente. En el apartado a) y c) no tiene en cuenta que se trata de expresiones imaginarias y que las reglas de los reales no tienen por qué funcionar. En el apartado b) dado que los números están expresados en forma binómica utiliza un criterio idiosincrásico que creemos que se basa en el orden de los módulos.

En ningún caso se plantea que pueda ser imposible ordenar los números dados y tampoco tiene en cuenta que las raíces de los números negativos no existen en el campo real.

Predicción y sugerencia para la enseñanza. El alumno conoce reglas para ordenar números reales pero no percibe que éstas no son ciertas cuando los números son imaginarios y ordena de modo *sui generis* números complejos por lo que creemos que se debe actuar en los métodos de enseñanza para evitar la creencia de que las propiedades de un campo numérico se cumplen en otro campo que lo contenga.

Extienden propiedades de los números reales	12/19
Utilizan las componentes de los números complejos	10/19
Usan el módulo de los números complejos	5/19
Tropiezan con dificultades de naturaleza diferente	9/19

Frecuencia de los tipos de respuestas por categorías de la tarea

CONCLUSIONES DEL ANÁLISIS DE TAREAS

Nuestro modelo es una herramienta válida para llevar a cabo la investigación planteada. En ésta se pone de manifiesto que los alumnos presentan dificultades e inconsistencias al responder a las tareas del cuestionario las cuales permiten aventurar que se confirma la hipótesis teórica inicial de modo que la enseñanza y aprendizaje de los números complejos no está teniendo en cuenta las dificultades e inconsistencias que han estado presentes a lo largo de la historia y que los estudiantes las reproducen, en algunos casos agravadas.

REFERENCIAS

Cardano (1545). *Ars Magna*.

Euler (1749). *De la controverse entre MM. Leibniz et –bernouilli sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires*. Mémories de l'Académie de Berlin. Opera 17 p 195-232. (Bulletin Irem 68. www-irem.univ–fcomte.fr/bulletins/068/bull068.pdf).

Euler, L. (1770). *Elements of Algebra.* Tranlated by Rev. John Hewlett, B. D. F.A.S. &c with an Introduction by C. Truesdell. Springer-Verlag New York. Reimpresión de1984 de la edición inglesa traducida del francés de 1840. London. Longman.

Fernández, A., Figueras, O, Gómez B. y Margarit J. (1997). Algunas aportaciones a un modelo de interpretación de respuestas de alumnos de primaria a un cuestionario de tareas relacionadas con razón y proporción. *VIII JAEM (Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas).* Salamanca. Septiembre, pp. 429-433.

Fernández, A., Gómez B.; y Margarit J. (1997). Comportamientos relevantes observados en las respuestas incorrectas de estudiantes de primaria en tareas de razón y proporción. *III Jornades* *d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana*, Valencia.

Fernández, A., Gómez, B., Figueras, O., Margarit, J., Puig, L., Monzó O., y Ruiz, E. (1998). Estudio en la escuela primaria sobre competencias vinculadas a la razón y proporción. Documento interno. Departament de Didáctica de la Matemática. Universitat de Valencia.

Ferrirós, J. (1998). El problema de la aritmética en perspectiva histórica. En José Ferreirós (Ed.) *Richard Dedekind. ¿Qué son y para qué sirven los números? Y otros escritos sobre los fundamentos de la matemática.* Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid. Alianza Editorial

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Gómez, B., Ferrandis, D., Valero, R., Pardo, T., Díez, P., Delgado, M., De la Rosa, P., y Pastor, C. (2002). Estudio histórico epistemológico de los números complejos**.** *VI Seminario de investigación en pensamiento numérico y algebraico.* Santiago 23 a 25 de Mayo.

Gómez, H. (1996). *Indicios del pensamiento proporcional.* Un estudio en la escuela primaria sobre competencias al resolver situaciones de cambio. Tesis de Maestría. México, D. F.

Jiménez de la Rosa, E. (1996): *De la lectura del error a una interpretación de los saberes de los niños. Un estudio en la escuela primaria sobre competencias al resolver situaciones de cambio*. Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav. México.

Margarit, J.; Figueras, O.y Gómez, B. (2001). Ratio Comparison: Performance on Ratio in Similarity Tesk. *Proceedings of the 25 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education).* Vol. I, 340 Utrech The Netherland.

Muñoz, E. (1996): *Pensamiento relacional en una etapa de transición. Un estudio en la escuela primaria sobre competencias al resolver situaciones de cambio*. Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav. Méjico.

Puig, E., Gómez, B. y otros, (15/12/1997-15/12/2000). *Razón y proporción: Precursores de los conceptos, tendencias cognitivas de los alumnos, resolución de problemas. Un estudio con alumnos de enseñanza obligatoria*, Programa sectorial de promoción del conocimiento, que desarrolla los planes nacionales de investigación científica y desarrollo tecnológico, de la Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología (CICYT), correspondiente a la Secretaría de Estado de Universidades, Investigación y Desarrollo y de la Dirección General de Enseñanza Superior.

Vallejo, J. M. (1841). *Tratado Elemental de Matemáticas* .escrito de orden de S. M. para uso de los caballeros seminaristas del seminario de nobles de Madrid y demás casas de educación del Reino. Cuarta edición corregida y considerablemente aumentada. Tomo I. Parte primera, que contiene la Aritmética y Álgebra. Madrid. Imp Garrayasaza. (1ª ed. 1813).