

Formación de oscilaciones y caos en el circuito de Chua

José Rodrigo Balbuena Herrera¹
 César Iván Beltrán López²
 Juan Carlos Ponce Fuentes¹
 Arlette Areli Rodríguez Zerón¹
 Francisco Vidal Caballero Domínguez^{1,2}
¹Universidad Simón Bolívar
²Tecnológico de Estudios Superiores de Ecatepec

Resumen

El presente trabajo muestra los resultados de diversas simulaciones realizadas al modelo no lineal denominado circuito de Chua, modelo prototipo importante en el campo de la ingeniería electrónica. Mediante la metodología de la dinámica no lineal es posible caracterizar: oscilaciones, desdoblamiento de periodos y generación del comportamiento caótico. Asimismo, utilizamos el diagrama de pronto retorno y los exponentes de Lyapunov como prueba definitiva para la confirmación de este comportamiento.

Palabras clave: *circuito de Chua, oscilaciones, sistemas no lineales y caos.*

Abstract

In this work we study the behavior of different simulations performed by Chua's circuit, an important prototype model in electronic engineering field. By using non linear dynamic's tools was possible quantify oscillations, period doubling and chaos. Finally next step diagram and Lyapunov exponents was implemented to confirm the chaotic behavior.

Keywords: *chua's circuit, oscillations, non-linear systems and chaos.*

“Las ecuaciones no lineales, en cambio, son horriblemente difíciles de tratar. Aunque en ciertos casos podemos resolverlas y en otros podemos obtener información útil sin resolverlas, la gran mayoría son tan poco dóciles como un tiranosaurio que hace un mes que sólo come ensalada. Como sabemos hoy, si uno mete la mano en la caja de ecuaciones diferenciales aplicables a la naturaleza para sacar una al azar, la probabilidad de que ésta sea lineal es igual a cero.”

Sergio de Régules (2000)

Introducción

En estos tiempos modernos, una parte de la investigación científica ha virado hacia el estudio de sistemas naturales de forma indirecta, esto es, mediante un modelo que los represente. Existen diversos tipos de modelos como las maquetas y ciertas gráficas o nomogramas (Martinez, 2007): particularmente en las ramas de ingeniería se analizan modelos matemáticos provenientes de las leyes de conservación de la materia y la energía. Es decir, poseen todo el peso teórico necesario para confiar en las predicciones y cuantificaciones que con éstos se realizan. De este modo es posible estudiar los efectos que ocasiona una modificación en un sistema de conservación. Si analizamos todo un intervalo de modificación estamos simulando un proceso. Si en el intervalo de estudio encontramos las mejores condiciones (llamado en nuestro campo, parámetros), optimizamos un proceso.

Desde los tiempos de Newton se analizó la naturaleza desde un punto de vista causa-efecto representado por un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales, donde pequeños cambios provocan pequeños efectos. Los grandes efectos se determinan a partir de la suma de todos los pequeños cambios.

Desde el siglo XIX se conocían las ecuaciones diferenciales no lineales, pero se carecía de técnicas eficientes para resolverlas. Afortunadamente en ese tiempo se utilizaron las aproximaciones lineales y aunque existían limitaciones se resolvían problemas de transferencia de calor, capa límite o mecánica celeste (Epstein y Pojman, 1998).

A partir de 1970 el avance de las computadoras ha permitido un estudio profundo de modelos no lineales; sin embargo, es increíble cómo la capacidad humana ha permitido sentar bases ¡sin necesidad de utilizar una computadora! (Brigs y Peat, 2000).

Poincaré, en el mismo siglo XIX, calculaba la órbita de la luna alrededor de la Tierra con la precisión de las leyes newtonianas. Posteriormente, decidió utilizar tres cuerpos celestes para repetir este cálculo. Lo anterior permitió la introducción de interacciones de más de dos elementos. El resultado fue un conjunto de tres ecuaciones diferenciales no lineales y aproximó su solución mediante una técnica conocida como la teoría de la

perturbación. A pesar de perturbar el sistema con cambios pequeños, éste evolucionaba y sus órbitas crecían pues el universo se expande y depende del tiempo. Por esta razón los manuscritos de Poincaré fueron revalorados. Actualmente son elementos de la dinámica no lineal, la retroalimentación y la termodinámica de procesos irreversibles (Epstein y Pojman, 1998).

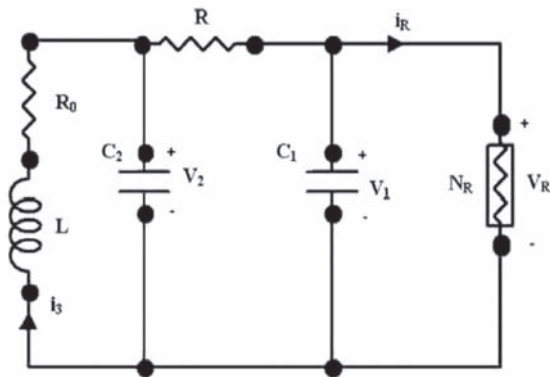
Dentro de estas teorías, las interacciones generan sistemas de ecuaciones no lineales, y en este marco, se encuentra el famoso modelo de Lorenz para la predicción del clima (Drazin, 1992), representado por tres ecuaciones diferenciales no lineales, función del tiempo con su respectiva condición inicial, es decir, su valor al inicio del experimento. Lorenz elaboró un retrato de fases (una gráfica de al menos dos dimensiones causa-efecto entre las mismas variables dependientes del tiempo) y obtuvo trayectorias que en determinados tiempos se acercaban y en otros tiempos diferentes, las trayectorias se alejaban. Este sistema es impredecible o caótico, razón por la cual el pronóstico del tiempo falla pues pequeñas perturbaciones desvían al modelo en tal grado que no puede determinarse ni aproximarse (efecto mariposa).

En la rama de ingeniería electrónica se ha estudiado un modelo no lineal para el modelado de un circuito y se conoce como circuito de Chua. Este modelo ha sido estudiado debido a los hallazgos experimentales que comprueban la validez del modelo.

El circuito de Chua

El circuito de Chua es un modelo no lineal y a determinados valores genera caos y produce un sinnúmero de comportamientos, incluso toda una familia de atractores extraños. El circuito ha sido ampliamente estudiado (Chua y Lin, 1990; Chua, 1993 y Chua et al., 1993a-b). Su importancia radica en que emula de manera adecuada un sistema real físico y comprobado en el laboratorio (Zhong y Ayrom, 1985; Matsumoto et al., 1986 y 1988 y Yalcin et al., 2000). La figura 1 muestra el diagrama del circuito, el cual está compuesto por 5 elementos lineales: 2 capacitores C_1 y C_2 , un inductor L y 2 resistencias R y R_0 . A lo anterior se añade un elemento no lineal llamado *diodo de Chua* preparado a partir de un amplificador operacional (Torres y Aguirre, 2000). El circuito puede describirse mediante el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

Figura 1. Diagrama para el Circuito de Chua



$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dt} &= \frac{1}{C_1} \left[\frac{V_2 - V_1}{R} - f(V_1) \right] \\ \frac{dV_2}{dt} &= \frac{1}{C_2} \left[\frac{V_1 - V_2}{R} + I_3 \right] \\ \frac{dI_3}{dt} &= -\frac{1}{L} (V_2 - R_0 I_3) \end{aligned} \quad (1)$$

donde $f(V_1) = G_b V_1 + \frac{1}{2} (G_a - G_b) \{ |V_1 + E| - |V_1 - E| \}$

Objetivo

El Objetivo principal de este trabajo es la caracterización de un sistema no lineal (circuito de Chua) al observar los comportamientos complejos que pueda presentar como las oscilaciones y caos. Asimismo, se enuncian los principales métodos y las estrategias recomendadas para el manejo de datos provenientes de éstos.

Método

En ingeniería un sistema como el anterior se trasladó a su forma adimensional, en nuestro caso utilizamos:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{V_1}{E}; \quad u_2 = \frac{V_2}{E}; \quad i_3 = \frac{R I_3}{E} \\ \alpha &= \frac{C_2}{C_1}; \quad \beta = \frac{R^2 C_2}{L}; \quad \gamma = \frac{R_0 R C_2}{L} \\ a &= R G_a; \quad b = R G_b \end{aligned} \quad (2)$$

$$\tau = \frac{t}{R C_2}; \quad k = \text{signo}(R C_2)$$

De este modo, el sistema (1) se convierte en:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= k \alpha [u_2 - u_1 - f(u_1)] \\ \frac{du_2}{dt} &= k [u_1 - u_2 + i_3] \\ \frac{di_3}{dt} &= -k(\beta y + \gamma z) \end{aligned} \tag{3}$$

donde $f(u_1) = b u_1 + \frac{1}{2}(a - b)\{u_1 + 1 - |u_1 - 1|\}$

Los diversos parámetros se tomaron del trabajo de Bilotta, Pantano y Stranges (2007b) (ver apéndice A). El sistema de ecuaciones diferenciales (3) requiere comprobar la condición $f(u_1)$ en cada paso de integración. Por esta razón, un método adaptativo es una excelente alternativa para su solución. Por este motivo se implementó el método de Runge Kutta Fehlberg de 5° orden. La fórmula en notación vectorial es:

$$\hat{y}^{i+1} = \hat{y}^i + \frac{16}{135} \hat{k}_1 + \frac{6656}{12825} \hat{k}_3 + \frac{28561}{56430} \hat{k}_4 - \frac{9}{50} \hat{k}_5 + \frac{2}{55} \hat{k}_6 \tag{4}$$

En nuestro caso usamos un paso de integración de 0.0001seg y lo codificamos en el software Visual Simulator (VisSim de Visual Solutions Inc.) para su solución. El software es atractivo pues presenta la solución en forma gráfica, en tiempo real y se programa en simbología de bloques de acuerdo a los fundamentos de función de transferencia de las transformadas de Laplace.

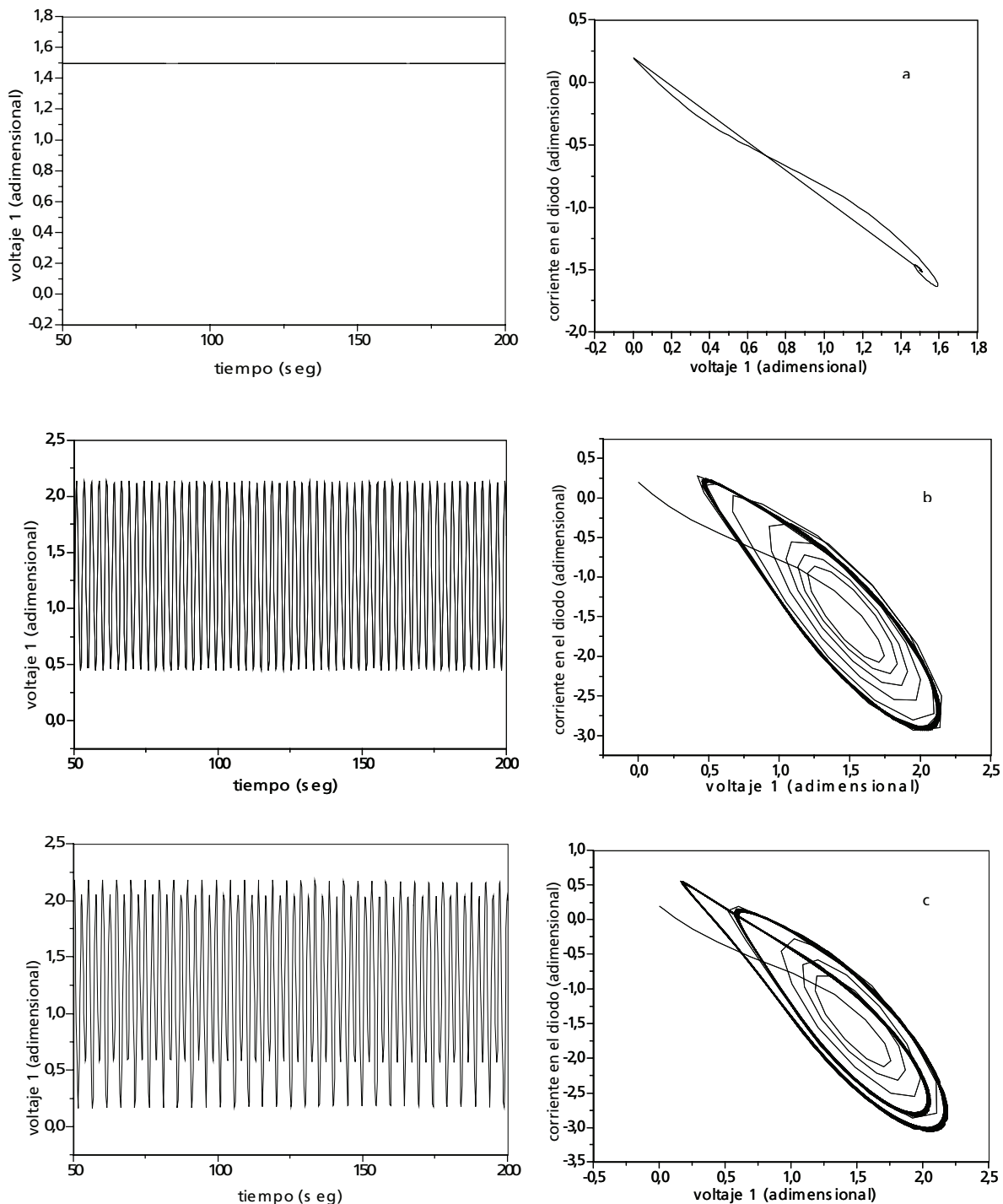
Resultados

Con la información anterior el sistema (3) fue resuelto; primeramente se tomaron valores donde el parámetro $\alpha = C_2/C_1$ para el circuito de Chua se comporta estacionariamente y se muestra en la figura 2^a. Observamos que el sistema evoluciona con respecto al tiempo (gráficas de la columna izquierda). Las gráficas del lado de derecho son los planos de fase. En este caso se graficó el voltaje 1 adimensional versus la intensidad de corriente adimensional (u_1 vs. i_3). Se observa que la trayectoria cesa en un punto, es decir, el sistema permanece invariante hasta que una perturbación física lo modifique. A medida que aumentamos α observamos una oscilación con una frecuencia y periodo único y en el plano de fase se confirma una órbita perfectamente definida. Las gráficas que a continuación se muestran (2c, 2d, 2e, 2f) pasan a oscilación con 2, 3, 4 y 5 periodos de oscilación; al comportamiento en conjunto se le denomina desdoblamiento de periodos (Epstein y Pojman, 1998) y es una ruta al caos (Scott, 1991; Drazin, 1992). Lo anterior significa que un aumento en α permitirá la aparición de caos en el sistema. Bajo estas condiciones, no es posible diferenciar cuántas oscilaciones existen pues las órbitas no se definen de forma clara (ver figura 3).

Con un valor de $\alpha = 14.3637$, el sistema se torna caótico. Existen tres posibles rutas al caos, desdoblamiento de periodos (Caballero y Vicente, 2003), secuencias periódico-caóticas (Swinney, 1983) e intermitencia (Ballandis y Plath, 2000). En nuestro caso la aparición de periodos 3 y 5 (ver figuras 2d y 2f, respectivamente) lo clasifican como secuencia periódico-caótica. En la figura 3 se encuentra el comportamiento dinámico y el plano de fases para las condiciones en que el circuito de Chua genera caos. Es de observar cómo las trayectorias nunca son las mismas y no se remarcan como en los caos de la figura 2. Sin embargo, es importante aclarar lo siguiente: las figuras 2a, b y c, muestran algunas trayectorias con desviación y no coinciden con la principal (la más mar-

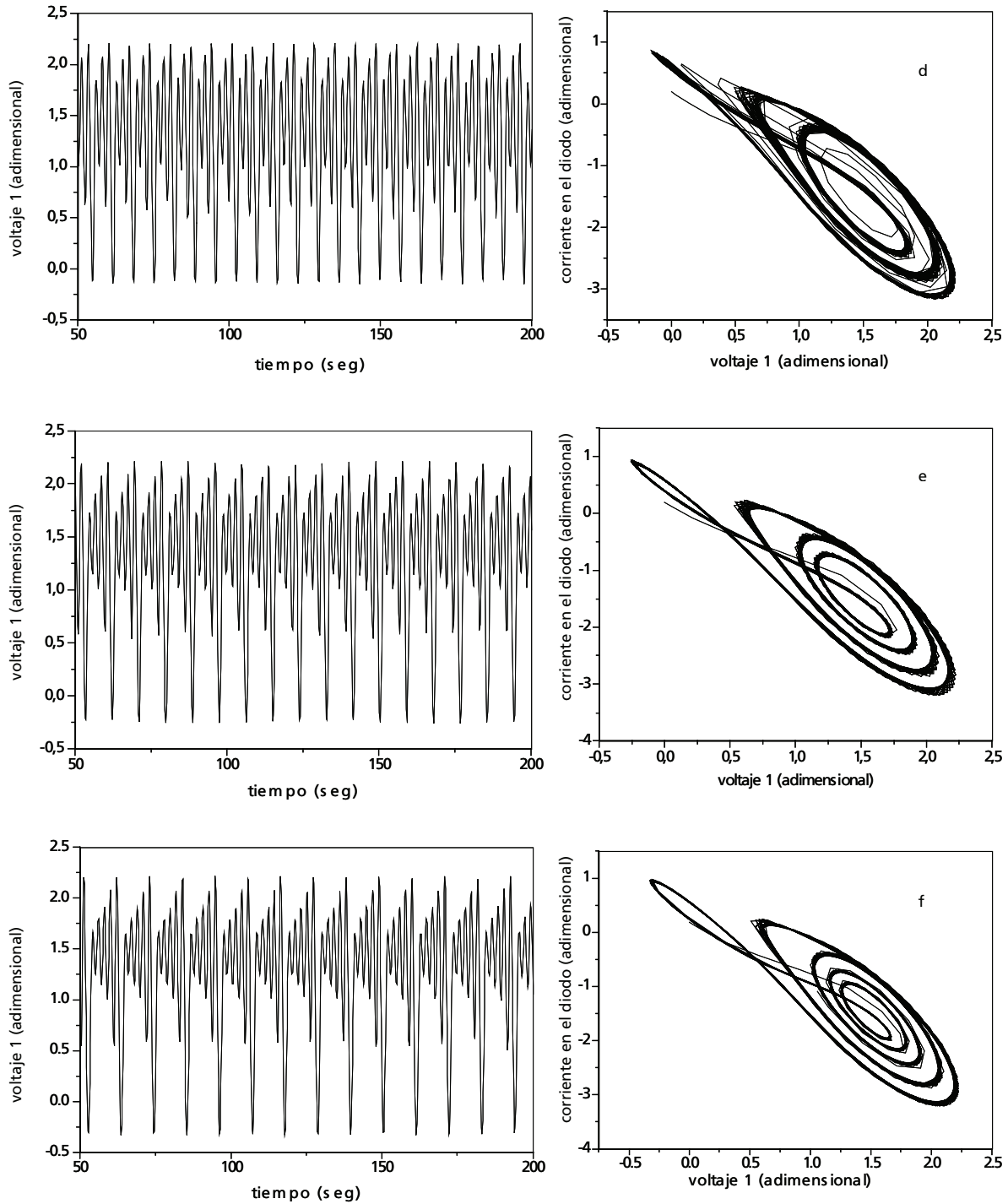
cada). Esto se debe a que estas gráficas se generaron desde el $\tau = 0$, mientras que en las órbitas de las figuras 2d y e no se observan estos defectos, porque se graficó a partir de un $\tau > 50$. Por esa razón, las trayectorias no presentan desviaciones. En los experimentos y simulaciones se puede seguir este procedimiento que es recomendado en la literatura (Parker y Chua, 1989).

Figura 2. Comportamiento dinámico (izquierda) y retrato de fases (derecha) para el voltaje adimensional (u_1) y la corriente en el diodo (i_2) generada en el circuito Chua.



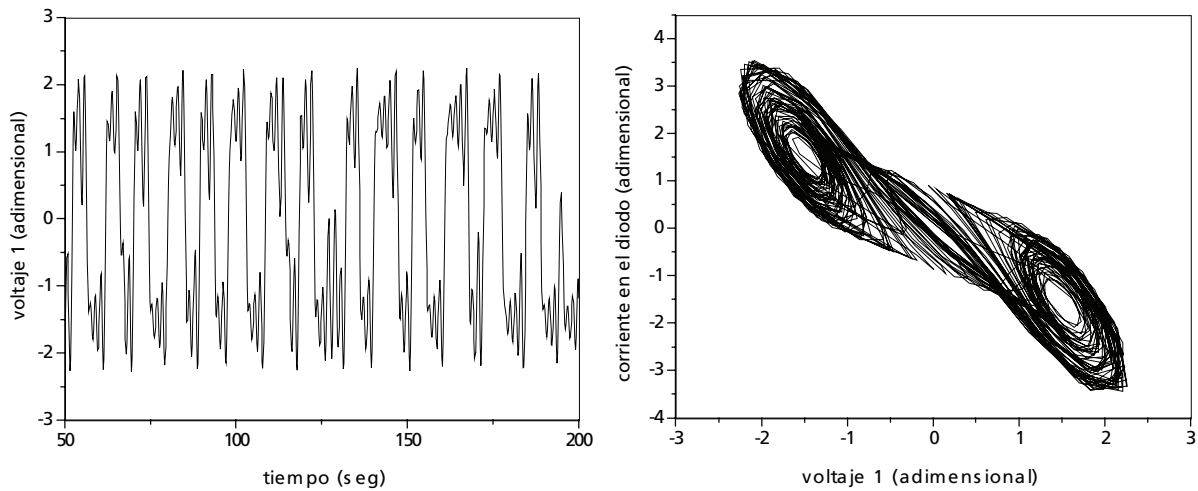
Los valores de α (relación de capacitores) para los diversos comportamientos son: a) $\alpha = 0.861821$ estado estacionario, b) $\alpha = 6.70305$ periodo de oscilación uno, y c) $\alpha = 7.66$ periodo dos

Figura 2 (cont). Comportamiento dinámico (izquierda) y retrato de fases (derecha) para el voltaje adimensional (u_1) y la corriente en el diodo (i_3) generada en el circuito de Chua.



Los valores de α (relación de capacitores) para los diversos comportamientos son: d) $\alpha=0.861821$ periodo 3, e) $\alpha=6.70305$ periodo 4, y f) $\alpha=7.66$ periodo 5; por lo tanto el desdoblamiento de periodo ocurre con el aumento de α .

Figura 3. Comportamiento caótico generado en el circuito de Chua.

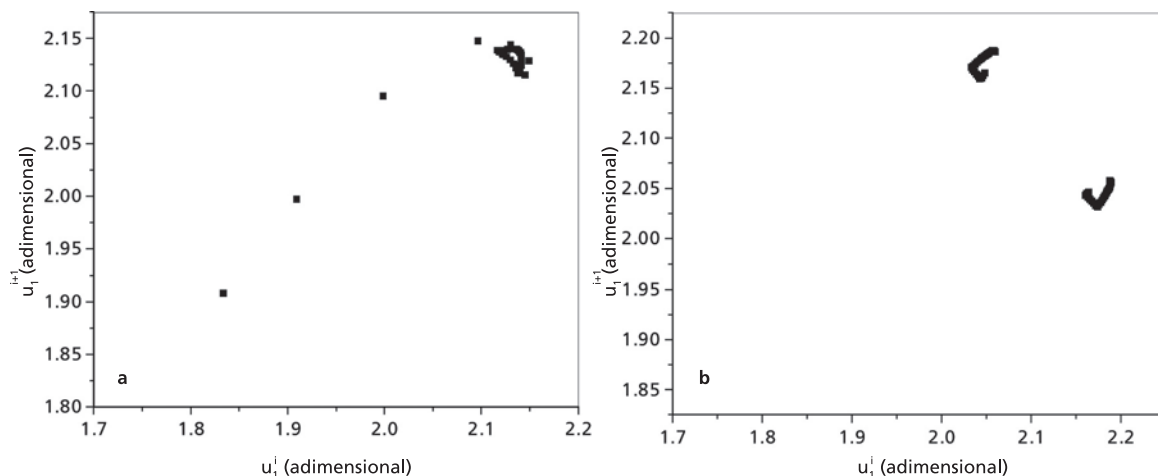


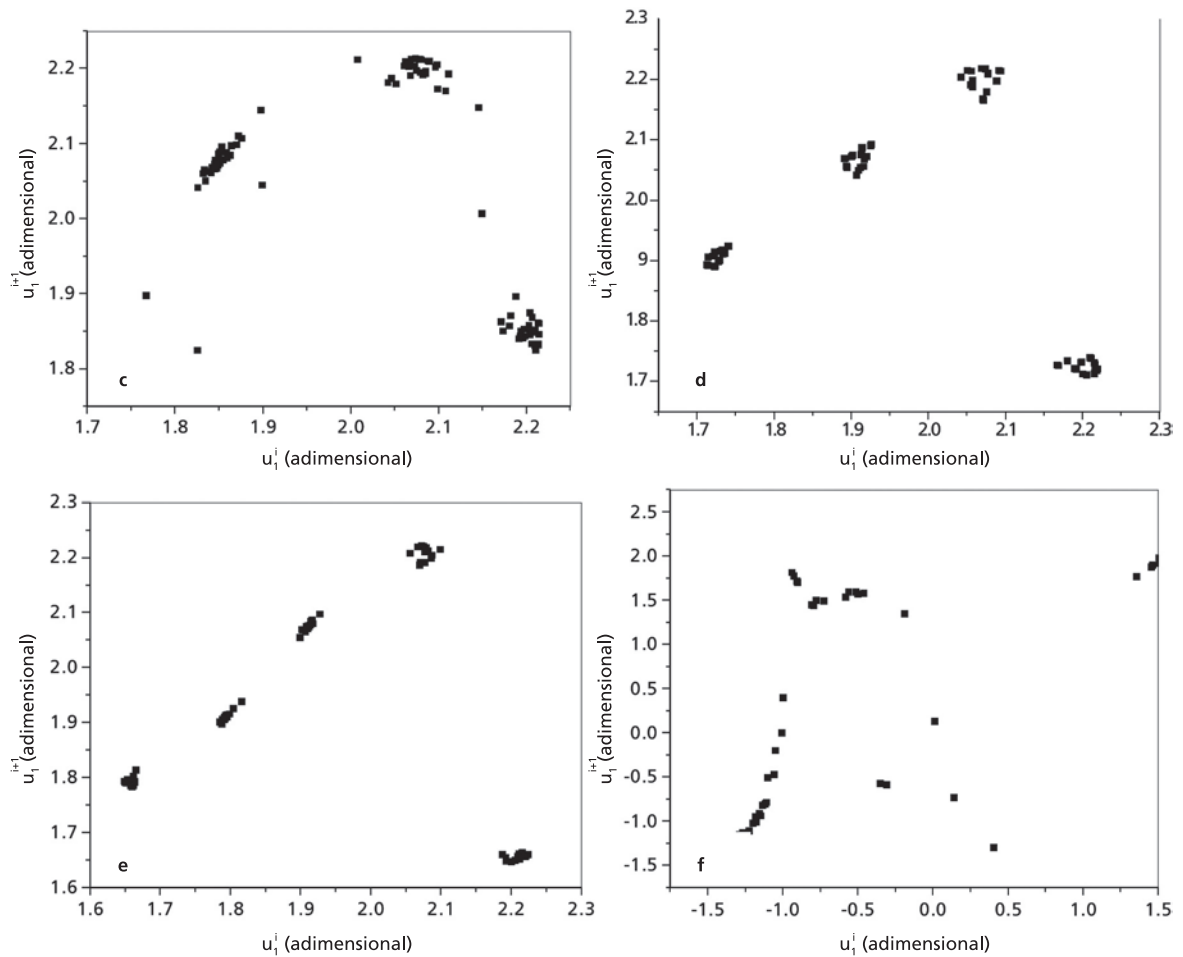
El valor de α utilizado en la simulación fue de 14.3637.

El comportamiento del desdoblamiento en el circuito de Chua puede ser explicado de la siguiente forma: como un capacitor permite un almacenamiento de cierta cantidad de energía o carga, al aumentar el parámetro α que es una relación entre dos capacitores (C_2/C_1), se almacenan mayores cargas para diferentes tiempos (o periodos de oscilación). Al seguir aumentando la capacidad, esta cantidad de corriente se retroalimenta al diodo de Chua y a todo el circuito y no puede sincronizarse. Por este motivo las oscilaciones no pueden ser cuantificadas para sus diversas amplitudes.

Otra forma de confirmar el comportamiento caótico es mediante la sección de Poincaré, el cual se describe en el texto de Parker y Chua (1989). En nuestro caso presentamos en la figura 4 las diversas gráficas desde periodo 1 hasta periodo 5. Los aglomerados de puntos generados obedecen al periodo. Así, observamos un aglomerado para periodo 1, 2 aglomerados para periodo 2 y así sucesivamente. Finalmente, para el comportamiento caótico no observamos aglomerados, más bien una curva con una meseta. Esta es la sección de Poincaré.

Figura 4. Mapas de próximo retorno generados para las diversas oscilaciones obtenidas con la modificación de α .





Las gráficas a, b, c, d y e corresponden a oscilaciones con periodo 1, 2, 3, 4 y 5 respectivamente, la gráfica f no forma aglomerados de puntos, genera una curva con una meseta

Otra forma de caracterizar el comportamiento caótico es mediante los exponentes de Lyapunov, sea la siguiente solución de una ecuación diferencial:

$$y = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda t} \tag{5}$$

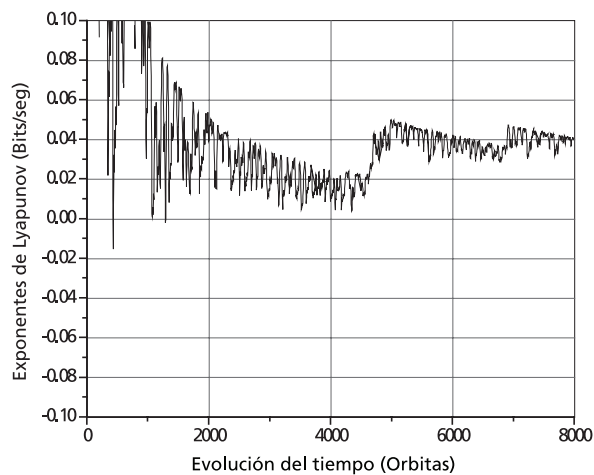
Discusión

Establecemos entonces que los comportamientos oscilatorios definen trayectorias cerradas. De este modo los valores de λ serían sólo parte compleja. En el caos no sucede así, pues las órbitas pueden contraerse o expandirse. Los exponentes de Lyapunov dan un estimado de este comportamiento y existe un valor de $\lambda > 0$. Este valor es determinado por varios métodos (Parker y Chua, 1989). Nosotros calculamos λ a partir del algoritmo de Wolf (Wolf et al., 1985). Los resultados del cálculo se muestran en la figura 5 con un valor obtenido de $\lambda = 0.04$.

Con todas las pruebas realizadas podemos validar el comportamiento caótico aquí

Mostrado. Finalmente mencionamos que Bilotta et al. (2007a y b) ofrecen una amplia revisión de todas las condiciones y parámetros de este oscilador. Por tal motivo los procedimientos aquí analizados pueden aplicarse para todas las condiciones reportadas en la literatura, sin importar el campo de investigación.

Figura 5. Obtención del exponente de Lyapunov mediante el algoritmo de Wolf (1985).



Las órbitas son las diversas trayectorias que se van corrigiendo hasta obtener el exponente positivo en este caso tiene un valor de 0.04

Conclusión

Las herramientas de la dinámica no lineal, apoyadas en las teorías de la termodinámica de procesos irreversibles, son aplicables en los diversos campos de ingeniería y ciencias. Cada vez son más familiares, pues los modelos que representan a la naturaleza pueden tratarse de forma no lineal e implementarse en los modernos equipos de cómputo. Sí se desea caracterizar un comportamiento complejo, el presente trabajo aplicó el desdoblamiento de periodos, retratos de fase, mapas de próximo retorno y obtención de los exponentes de Lyapunov al circuito de Chua. Lo anterior puede servir como base para esta caracterización y aplicación a pruebas de plataformas de sincronización, control de caos, encriptación de señales y comunicaciones seguras (Albuquerque et al., 2007), campos alternativos en la ingeniería en comunicaciones y electrónica.

Referencias

- Albuquerque H.A, Rubinger R.M y Rech P. C. (2007) Theoretical and experimental time series analysis of an inductorless Chua's circuit, *Physica D*. 233, 66-72.
- Ballandis C. y Plath P. J. (2000) A New discrete model for the Non-isothermic dynamics of the exothermic CO-Oxidation on Palladium Supported Catalyst I, *Journal of Non-equilibrium Thermodynamics*. 25, 301-324.
- Bilotta E, Pantano P y Stranges F. (2007a) A Gallery of Chua attractors: part I, *International journal of Bifurcation and chaos*. 17, 1-60.
- Bilotta E, Pantano P y Stranges F. (2007b) A Gallery of Chua attractors: part II, *International journal of Bifurcation and chaos* 17, 293-380.
- Brigs J. y Peat F. D. (2000) *Espejo y reflejo del caos al orden guía ilustrada de la teoría del caos y la ciencia de la totalidad*. Gedisa Barcelona.
- Caballero F. V. y Vicente L. (2003) a simulation of oscillatory behavior in the NO + H₂ reaction on Pt(100): effect of diffusion and blocking sites. *Chemical engineering science*, 58, 5087-5102.
- Chua, L. O. y Lin, G. N.(1990) Canonical realization of Chua's circuit family. *IEEE Trans. Circuits Syst.* 37,885-902.
- Chua L. O. (1993) Global unfolding of Chua oscillators, *IEICE Trans. Fundam. Electron. Commun. Comput. Sci.* E76-A, 704-734.
- Chua, L. O., Wu, C. W., Huang, A. & Zhong G. (1993a) A universal circuit for studying and generating chaos. II. Strange attractors, *IEEE Trans. Circuits Syst. I: Fund. Th. Appl.* 40, 732-744.
- Chua, L. O, Wu, C. W., Huang, A y Zhong, G. Q. (1993b). A universal circuit for studying and generating chaos. II. Strange attractors, *IEEE Trans. Circuits Syst. I: Fund. Th. Appl.* 40, 745-761.
- Drazin, P. G. (1992). *Nonlinear systems*. Cambridge University Press, Cambridge.
- De Regules S. (2000). Caos: El desorden ordenado, *¿Como ves?* 2(22), 11-14.
- Epstein I. R. y Pojman J. A. (1998). *An Introduction to Nonlinear chemical Dynamics. Oscillations, Waves, Patterns, and Chaos*. Oxford University Press. Oxford.
- Martinez J.C. (2007). De la realidad a los modelos, *¿Como ves?* 9(99), 22-25.
- Matsumoto, T., Chua, L. O. & Kobayashi, K (1986). Hyperchaos: Laboratory experimental and numerical confirmation, *IEEE Trans. Circuits Syst.* 33, 1143-1147.
- Matsumoto, T., Chua, L. O. & Ayaki, K. (1988). Reality of chaos in the double scroll circuit: A computer assisted Prof, *IEEE Trans. Circuits Syst.* 35,909-925.

Parker T. S. y Chua L. O. (1989). *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. Springer-Verlag. Berlin.

Scott S. K. (1991). *Chemical Chaos*. Clarendon Press. Oxford.

Swinney H. L. (1983). Observations of order and chaos in Nonlinear systems, *Physica* 7D, 3-15.

Torres L.A. y Aguirre L.A. (2000). Inductorless Chua's circuit, *Electronics Letters* 36(23) 1915-1916.

Wolf A., Swift J. B., Swinney H. L. y Vastano J. A. (1985). Determining lyapunov exponents from a time series. *Physica* 16D, 285-317.

Yalcin, M. E., Suykens, J. A. K. y Vandewalle, J. (2000). Experimental confirmation of 3- and 5-scroll attractors from a generalized Chua's circuit, *IEEE Trans. Circuits Syst.* 47, 425-429.

Zhong, G. Q. & Ayrom, F. (1985b) Experimental confirmation of chaos from Chua's circuits. *IEEE Trans. Circuits Syst.* 13, 93-98.

Apéndice A

Nomenclatura y valores utilizados en la simulación:

C1 (nF)	Capacitor en el circuito 0.10443
C2(nF)	Capacitor en el circuito parámetro libre a través de α .
G(mS)	Constante de tiempo 0.011
L(J/kg K)	Inductor en el circuito 0.0625
R0 (Ω)	Resistencia en el circuito 0.0
R (Ω)	Resistencia en el circuito 1.0
Ga	Constante de tiempo del diodo de Chua -1.143
Gb	Constante de tiempo del diodo de Chua -0.714
α (adim)	Relación de capacitores C2/C1 parámetro libre
β (adim)	Parámetro adimensional ver fórmulas (2). 24.0
λ (adim)	Parámetro adimensional ver fórmulas (2). 0.0
I (mA)	Intensidad de corriente

Correlaciones utilizadas en la simulación:

Forma compacta utilizada.

$$f(V) = I = \begin{cases} G_b V + (G_b - G_a) V & \text{sí } V < -E \\ G_a V & \text{sí } -E \leq V \leq E \\ G_b V + (G_a - G_b) V & \text{sí } V > E \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{Diodo} \\ \text{de Chua} \end{matrix}$$

$$f(V_1) = G_b V_1 + \frac{1}{2} (G_a - G_b) \{ V_1 + E - V_1 - E \}$$

Forma compacta utilizada.