Percursos de valores e indeterminação da referência [1]

Matthias Schirn*

Resumo

Neste artigo pretendo analisar a introdução de percursos de valores (*Wertverläufe*) nas *Grundgesetze der Arithmetik* (vol. I, 1893, vol. II, 1902) de Frege. Mais especificamente, quero avaliar criticamente, com respeito aos termos ou nomes de percursos de valores, aquilo que denomino "o problema de indeterminação de Frege". Na primeira seção, lido com seu "argumento da permutação" assim como sua solução do problema de determinar completamente as referências (*Bedeutungen*) dos termos de percursos de valores no § 10 das *Grundgesetze*. Na segunda seção, examino criticamente a identificação de Frege dos dois valores de verdade, o Verdadeiro e o Falso, com suas próprias classes unitárias e argumento que ele não teve sucesso em fixar completamente as referências dos termos de percursos de valores e que por isso tampouco em justificar com sucesso o uso destes termos na sua linguagem formal. Fazendo isto irei prescindir da inconsistência da teoria lógica de Frege.

1. O argumento de permutação

Em seu livro *Die Grundlagen der Arithmetik* de 1884, Frege havia proposto introduzir números cardinais por meio de um critério de identidade: o número que convém ao conceito F é idêntico ao número que convém ao conceito G se e somente se F e G são equinuméricos. Porém, esta definição contextual do termo "o número que convém ao conceito F "falhou, porque o critério de identidade envolvido não abrange todos os casos concebíveis. O critério é insuficiente para decidir, por exemplo, se Júlio César é o número dos planetas. Face a este problema, Frege finalmente definiu o número que convém ao conceito F como a extensão do conceito

*Matthias Schirn, Professor do Instituto de Filosofia, Lógica e Teoria da Ciência da Universidade de Munique. Principais publicações recentes: Frege: *Importance and Legacy* (ed.), Walter de Gruyter, Berlin, New York 1996; The *Philosophy of Mathematics Today* (ed.), Oxford University Press, Oxford 1998.

1. O material deste artigo foi apresentado e discutido em português nas seguintes universidades: Campinas (UNICAMP, Centro de Lógica, Epistemologia e Historia da Ciência), São Paulo (USP), PUC de São Paulo, PUC do Rio de Janeiro, Universidade de Brasília, Universidade Federal de Pernambuco (Recife, Departamento de Informática), Universidade Estadual Paulista (Rio Claro, Departamento de Matemática). Agradeço às diversas audiências pelo interesse em minha conferência, bem como a Guido Imaguire pelas observações críticas e especialmente a Juan Adolfo Bonaccini pela sua grande ajuda com este texto.

equinumérico ao conceito F. No entanto, esta definição explícita dependeu da suposição duvidosa de que já sabemos o que é a extensão de um conceito.

Nas *Grundgesetze*, Frege quer fundamentalmente manter esta definição explícita e definir também os demais números como extensões de conceitos. Por conseguinte, o domínio de objetos da teoria lógica das *Grundgesetze* deve conter as extensões de conceitos ou uma classe de objetos que inclua as extensões de conceitos como uma sub-classe. Uma tal classe de objetos é a classe de percursos de valores de funções (de primeiro nível).

Frege obviamente tem claro para si, nas *Grundgesetze*, que uma introdução metodologicamente consistente de percursos de valores como objetos lógicos não pode ser bem sucedida enquanto uma elucidação da função primitiva de segundo nível $\grave{\varepsilon}\varphi(\varepsilon)$, a função de percursos de valores. Pois em uma elucidação de $\grave{\varepsilon}\varphi(\varepsilon)$ — "Seu valor para cada função monádica de primeiro nível $\Phi(\xi)$ como argumento é o percurso de valores de $\Phi(\xi)$" — deve-se pressupor percursos de valores como já conhecidos. Mas exatamente isso parece dever ser proibido, tendo em vista o reconhecimento posterior de Frege de que o pressuposto nas *Grundlagen* de que o leitor saberia o que é a extensão de um conceito é questionável.

No § 3 das *Grundgesetze*, Frege introduz contextualmente - à semelhança dos números cardinais nas Grundlagen - percursos de valores através da indicação de um critério de identidade: "eu uso as palavras 'a função $\Phi(\xi)$ têm o mesmo percurso de valores que a função $\Psi(\xi)$ de maneira geral com a mesma referência que 'as funções $\Phi(\xi)$ e $\Psi(\xi)$ têm sempre o mesmo valor para o mesmo argumento' ". Esta transformação de uma igualdade entre percursos de valores em uma identidade generalizada entre valores de funções (e vice-versa) será reconhecida por Frege como uma lei lógica fundamental e fixada como o Axioma V das *Grundgesetze*. Em sua notação, este Axioma tem a seguinte forma:

$$(\grave{\varepsilon}f(\varepsilon) = \grave{\alpha}g(\alpha)) = (\text{—}\smile\text{—} f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a})).$$

Quando Frege introduz os percursos de valores da maneira indicada, ele encontra uma variante de seu antigo problema de indeterminação das *Grundlagen*, agora numa roupagem formal. No início do § 10 das *Grundgesetze*, ele diz que sua estipulação informal "de nenhum modo determina completamente a referência de um nome como $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$' ". O critério de identidade para percursos de valores incorporado no Axioma V fixa o valor de verdade das equações nas quais ambos os termos relacionados são da forma "$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$". Porém, o critério não permite determinar o valor de verdade de "$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)=q$" se "q" não é da forma "$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$".

Pela mesma razão, não podemos decidir em geral se um percurso de valores dado tem uma propriedade dada, a menos que esta propriedade esteja conectada com uma propriedade da função correspondente. A seguinte argumentação pretende aclarar este assunto.

Suponha-se que h é uma função bijetiva definida para todos os objetos do domínio de primeira ordem do sistema lógico de Frege. Portanto, o critério de identidade que se aplica aos referentes dos termos dos percursos de valores, isto é a equivalência geral de duas funções $\Phi(\xi)$ e $\Psi(\xi)$ também se aplica aos referentes dos nomes de valores de funções da forma "h $(\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon))$". Dito concisamente, utilizando nossa suposição, a seguinte equação é verdadeira:

(1) $(\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon) = \acute{\alpha}\Psi(\alpha)) = (h(\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)) = h(\acute{\alpha}\Psi(\alpha)))$.

A partir de (1) e do Axioma V segue-se imediatamente que

(2) $(h(\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)) = h(\acute{\alpha}\Psi(\alpha))) = (-\!\!\smile\!\!- \Phi(\mathfrak{a}) = \Psi(\mathfrak{a}))$.

Conseqüentemente, o Axioma V não determina completamente a referência de um termo de percurso de valores "$\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$", pelo menos se há uma bijeção h tal que para algum percurso de valores, por exemplo $\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$, $\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon) \neq h(\acute{\varepsilon}\Phi(\varepsilon))$. Em terminologia moderna o argumento de Frege pode ser apresentado do seguinte modo:

(P1)
Suponha que φ é a atribuição de objetos a nomes de percursos de valores que satisfaz o Axioma V. Seja h uma permutação não trivial (de todos os objetos do domínio de primeira ordem) e considere-se a atribuição φ' de objetos a nomes de percursos de valores que está relacionada com φ da seguinte maneira: se Δ é atribuído por φ a um nome dado de percurso de valores e $\Gamma = h(\Delta)$, então Γ é atribuído por φ' àquele nome de percurso de valores. Segue-se que φ' é uma atribuição de objetos a nomes de percursos de valores diferente de φ, mas φ' satisfaz o Axioma V se φ o satisfaz.

De acordo com Dummett (1981), chamo de *argumento de permutação* de Frege este argumento inicial do § 10, porque para ele é essencial o conceito de uma aplicação bijetiva do domínio de objetos considerado nele mesmo, isto é, uma permutação. No restante desta seção, assim como na segunda seção, prescindo da inconsistência do sistema lógico das *Grundgesetze*.

Frege propõe resolver a indeterminação de um nome de percurso de valores pelo fato de que para toda função (primitiva) de primeiro nível será determinado, na sua introdução, o valor que a mesma assume para percursos de valores como argumentos, assim como para todos os demais argumentos (permissíveis). Com relação aos demais argumentos, Frege crê poder restringir-se a ambos os valores de verdade. Ele explica ou tenta justificar esta restrição mencionando o fato de que até o § 10 nenhum outro objeto foi introduzido. Para as três funções primitivas de primeira ordem $-\!\!-\xi$, $\neg\!\!-\xi$, e $\xi = \zeta$ introduzidas até o § 10 a determinação exigida deve ser recuperada. Para a função $\neg\!\!-\xi$, isto não e necessário, uma vez que como seus argumentos podem ser sempre considerados os valores da função $-\!\!-\xi$, os quais são exclusivamente valores de verdade: o Verdadeiro para o Verdadeiro como argumento, e o Falso para qualquer outro argumento de primeiro tipo. E para valores de verdade como argumentos o valor da função $\neg\!\!-\xi$ é completamente determinado através de sua elucidação. A função $-\!\!-\xi$ pode, por sua vez, ser reduzida à função de identidade: $-\!\!-\xi$ e $\xi = (\xi = \xi)$ são evidentemente conceitos coextensionais. Trata-se, portanto, de fixar qual é o valor que $\xi = \zeta$ assume quando se coloca em uma das posições para argumento o nome de um percurso de valores e na outra o nome de um valor de verdade, o qual não tem a forma de um nome de percurso de valores. Não podemos, no entanto, decidir, por meio do Axioma V, se o Verdadeiro ou o Falso é idêntico a um percurso de valores.

Uma vez que no sistema lógico de Frege percursos de valores não são passíveis de definição (a função $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ é uma das oito funções primitivas deste sistema), ele deve então tomar um caminho diferente daquele dos *Grundlagen* para a solução do problema da indeterminação do § 10. Frege tenta obter uma solução através da construção de uma variante do argumento de permutação do § 10.

(P2)

Como em (P1), seja φ uma atribuição de objetos a nomes de percursos de valores que satisfaz o Axioma V. Sejam $f(\xi)$ e $g(\xi)$ duas funções particulares, extensionalmente não equivalentes. Suponha-se que φ atribui o objeto α a "$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$" e o objeto b a "$\grave{\alpha}g(\alpha)$". Seja h uma função tal que

(i) h(a) é o Verdadeiro,
(ii) h(o Verdadeiro) é a,
(iii) h(b) é o Falso,
(iv) h(o Falso) é b, e
(v) para todo argumento diferente destes, h(x) = x.

Finalmente, seja φ' uma atribuição de objetos a nomes de percursos de valores relacionada com φ como em (P1), com respeito à permutação particular h recém definida. Portanto, como em (P1), φ' satisfará o Axioma V.

Recorrendo-se a (P2) segue-se que, sem que se seja levado a uma contradição pelo Axioma V, pode-se estipular o seguinte: o Verdadeiro é o percurso de valores de uma função monádica arbitrária de primeiro nível, e o Falso é o percurso de valores de uma outra função monádica de primeiro nível que não seja coextensional com a primeira. Frege estabelece que o percurso de valores $\grave{\varepsilon}(—\varepsilon)$ deve ser idêntico ao Verdadeiro, e o percurso de valores $\grave{\varepsilon}(\varepsilon = —\smile— (\alpha = \alpha)\ (\neg—\smile— \alpha = \alpha)$ idêntico ao Falso. Portanto, cada um dos valores de verdade é identificado com a sua correspondente classe unitária. Os valores de verdade funcionam agora como valores da função $\grave{\varepsilon}\varphi(\varepsilon)$ para determinados argumentos e, portanto, como objetos que satisfazem o Axioma V.

Frege conclui o § 10 indicando que ele determinou os percursos de valores tanto quanto é possível determiná-los neste ponto. Sempre que se introduz uma nova função de primeiro nível que não pode ser reduzida completamente a funções já conhecidas, podemos estipular que valor ela terá para argumentos que sejam percursos de valores; na mesma medida que isto pode ser interpretado como uma determinação dos percursos de valores, pode ser também interpretado como uma determinação da função em questão. De fato, nos §§ 10 e 11 das *Grundgesetze* Frege introduz mais duas funções primitivas de primeiro nível, a função descritiva e a função condicional.

Agora quero examinar a argumentação na segunda nota de rodapé do § 10 das *Grundgesetze*, bem como fornecer uma resposta à questão se Frege consegue fixar completamente as referências de termos de percursos de valores, justificando assim o uso destes termos na sua teoria formal.

A segunda nota de rodapé ao § 10 é complexa e enigmática; além disso, ela é de importância considerável para avaliar a estratégia de Frege no § 10. Vimos que Frege obteve êxito em estabelecer a legitimidade formal de sua estipulação adicional por meio de um argumento engenhoso. Com efeito, sua principal realização no § 10 foi ter mostrado que os dois valores de verdade podem ser identificados com suas classes unitárias sem cair numa inconsistência devido ao Axioma V. Em contraste, na nota de rodapé Frege parece arriscar a legitimidade de sua estipulação adicional. A seguir tratarei de esclarecer sua argumentação.

Na segunda nota de rodapé ao § 10, Frege considera a possibilidade de generalizar a sua estipulação com respeito aos dois valores de verdade, de tal forma que todos objetos, incluídos aqueles já dados como percursos de valores (isto é, denotatos por nomes de percursos de valores) sejam identificados com suas classes unitárias. Obviamente, a estipulação $\grave{\varepsilon}(\Delta = \varepsilon) = \Delta$, se fosse factível, poderia ser *iterada ad libitum* por meio do princípio de substitutividade de termos co-referenciais, isto é, $\grave{\varepsilon}(\Delta = \varepsilon)$ poderia ser identificado com $\grave{\varepsilon}(\varepsilon(\Delta = \varepsilon) = \varepsilon)$, $\grave{\varepsilon}(\grave{\varepsilon}(\Delta = \varepsilon) = \varepsilon)$ com $\grave{\varepsilon}(\grave{\varepsilon}(\grave{\varepsilon}(\Delta = \varepsilon) = \varepsilon) = \varepsilon)$, e assim por diante. Porém, Frege argumenta que a sugestão de estender a estipulação do § 10 a quaisquer objetos, incluídos aqueles designados por nomes de percursos de valores, está errada. Ele rejeita uma tal generalização baseado no fato de que esta poderia estar em contradição com o critério de identidade para percursos de valores fixado pelo Axioma V, caso o objeto a ser identificado com a sua classe unitária já seja designado através de um termo de percurso de valores.[2] Ao mesmo tempo Frege rejeita a proposta intuitivamente atraente de identificar todos e somente aqueles objetos que são dados independentemente dos percursos de valores com suas classes unitárias. Ele faz isto usando basicamente o mesmo argumento do § 67 das *Grundlagen* referente à introdução de termos para direções: o modo de apresentação ou designação de um objeto não deve ser concebido como uma propriedade imutável do mesmo, uma vez que o mesmo objeto pode ser dado de diferentes maneiras.[3]

Aqui há várias dificuldades entrelaçadas. Em primeiro lugar, Frege não fornece sua motivação para examinar a possibilidade de generalizar a estipulação do § 10. Ele simplesmente indica que a identificação de Δ com $\grave{\varepsilon}(\Delta = \varepsilon)$ seria uma proposta natural. Mas, em que sentido o seria? O que obteríamos com ela, se fosse formalmente correta? Pois bem,

---

2. Embora a questão seja óbvia, apresentá-la-ei na linguagem de Frege. Aplicando a estipulação $\grave{\varepsilon}(\Delta = \varepsilon) = \Delta$ a $\grave{\varepsilon}(\neg\varepsilon)$, obtemos a equação "$\grave{\varepsilon}(\grave{\varepsilon}(\neg\varepsilon) = \varepsilon) = \grave{\varepsilon}(\neg\varepsilon)$". De acordo com o Axioma V, esta equação tem o mesmo valor de verdade que a equação generalizada "$-\smile- (\grave{\varepsilon}(\neg\varepsilon) = \alpha) = \neg\alpha$". Porém, esta última é falsa, porque nem todo objeto que cai sob $\neg\xi$ também cai sob $\grave{\varepsilon}(\neg\varepsilon) = \zeta$. A partir deste resultado Frege não conclui explicitamente que a estipulação $\grave{\varepsilon}(\Delta = \varepsilon) = \Delta$ é ilícita para *todo* objeto Δ. Se o tivesse feito, teria que ter declarada nula e vazia a sua estipulação do § 10.

3. De fato, no cálculo lógico das *Grundgesetze*, a extensão do conceito $-\xi$, por exemplo, pode ser designada por meio de nomes de percursos de valores (por exemplo, por meio de "$\grave{\varepsilon}(\varepsilon = (\varepsilon = \varepsilon))$"), mas tambem através de nomes de valores* (por exemplo, através de "$\forall x(x = x)$", para usar aqui uma notação moderna), e através de descrições definidas (por exemplo, a través de "$\backslash\grave{\varepsilon}(-\varepsilon)$"). Fora do sistema, $\grave{\varepsilon}(-\varepsilon)$ poderia ser referido como "o objeto favorito de Frege", por exemplo. Além disto, certos percursos de valores (extensões de conceitos) podem ser denotados por numerais ou por termos numéricos da forma "$\mathbf{N}$`$\varepsilon\Phi(\varepsilon)$". Devo salientar que eu entendo nomes de valores de verdade* como sendo nomes de objetos que têm a forma sintática de uma sentença. Conforme as estipulações de Frege nos § § 10 e 11 das *Grundgesetze*, um nome da forma "$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$" ou da forma "$\backslash\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$" pode ser um nome próprio de um valor de verdade, mas não é um nome de valores de verdade* como eu uso este termo com um asterisco.

ainda que Frege considerasse o domínio das variáveis de primeira ordem como limitado a tais objetos cuja existência é requerida pelos axiomas de seu sistema formal, portanto, somente aos dois valores de verdade e percursos de valores, ele parece ter visualizado extensões do sistema para incluir, digamos, a geometria ou a física. Tendo sido feita uma extensão semelhante, imediatamente surgiriam versões do problema de Júlio César.

Igualmente, parece que Frege esteve consciente do que pode ser descrito do seguinte modo. Suponha que a sua fundamentação da teoria dos números cardinais e da teoria de números reais necessitasse da introdução de um novo, terceiro tipo de objetos e, correspondentemente, de uma nova categoria de nomes próprios para se referir a estes objetos. Neste caso, a indeterminação referencial de termos de percursos de valores surgiria novamente. Poder-se-ia efetuar da seguinte maneira uma extensão do domínio de primeira ordem. Além do conceito de generalidade de segundo nível $\forall x\varphi(x)$ e da função de percurso de valores $\grave{\varepsilon}\varphi(\varepsilon)$, uma terceira função de segundo nível, digamos $\hat{\alpha}\varphi(\alpha)$, é introduzida através da seguinte estipulação: seu valor para cada função monádica de primeiro nível como argumento será um objeto do terceiro tipo. Estou consciente de que Frege poderia estar relutante em endossar este modo de introduzir uma função $\hat{\alpha}\varphi(\alpha)$, pela razão que este modo pressupõe ilegitimamente um conhecimento dos valores da função $\hat{\alpha}\varphi(\alpha)$ enquanto objetos de um terceiro tipo. Lembre-se minha afirmação de que ele resiste à tentação de introduzir percursos de valores por meio de uma elucidação de $\grave{\varepsilon}\varphi(\varepsilon)$ Contudo, suponhamos, somente para fins de argumento, que Frege aceitasse a proposta introdução de objetos de um hipotético terceiro tipo. Os nomes de objetos da nova categoria seriam formados colocando nomes de funções monádicas de primeiro nível no lugar do argumento de "$\hat{\alpha}\varphi(\alpha)$".

Seguir-se-ia, do que acabo de especular, ser uma extensão do domínio da teoria formal de Frege que a intencionada determinação completa das referências dos nomes de percursos de valores, pelo acréscimo ao Axioma V da estipulação adicional referente aos valores de verdade, não pode ser assegurada. Porque, do ponto de vista de Frege, não poderíamos descartar a possibilidade de que um objeto do terceiro tipo, que $\hat{\alpha}\varphi(\alpha)$ atribui a um argumento admissível, de fato coincida com um percurso de valores. Para resolver esta indeterminação reiterada, Frege seria compelido a fazer mais uma estipulação, que garantisse que o valor de verdade de toda equação, na qual o símbolo de identidade conecta um nome de percurso de valores com um nome da nova categoria, esteja determinado. E, naturalmente, toda extensão adicional do domínio requereria mais estipulações.

Por um lado, se focássemos o modo como Frege de fato procede no § 10, e sobretudo no § 31 das *Grundgesetze*, deveríamos supor que ele considera o domínio de quantificação de primeira ordem como restrito a valores de verdade e percursos de valores. Examinando criticamente a possibilidade de generalizar a estipulação do § 10, ela poderia então ser construida como uma tentativa de oferecer uma solução geral para versões do problema de Julio César que surgiriam inevitavelmente para toda extensão possível do domínio. Por outro lado, há observações nas *Grundgesetze* sugerindo que Frege esteja operando com um domínio de objetos que abrange tudo. Mas se o domínio compreende todos os objetos que existem, então a segunda nota de rodapé do § 10 poderia antes ser vista como refletindo a resídua incomodidade de Frege com relação à restrição que impõe sobre o domínio dos argumentos quando vai determinar os valores de $\xi = \zeta$. Assim, enfrentamos o que parece um conflito frontal. Voltarei em breve a este aspecto. Mas primeiro quero chamar a atenção para duas outras dificuldades provocadas pela linha de argumentação de Frege na nota de rodapé.

Suponha-se que Frege considera que o domínio de primeira ordem de sua teoria formal contém somente valores de verdade e percursos de valores. Suponha-se também que ele considera os termos de percursos de valores como indeterminados do ponto de vista referencial, mesmo após ter identificado o Verdadeiro e o Falso com as suas próprias classes unitárias.Uma razão óbvia para tomar suas referências como indeterminadas seria a de que num estágio posterior o domínio foi realmente estendido. Considere-se agora à luz destas suposições a tentativa de estipulação $\grave{\varepsilon}(\Delta = \varepsilon) = \Delta$ e recorde-se que supostamente ela abrange não só objetos dados independentemente de percursos de valores, mas também objetos denotados por termos de percursos de valores. Porém, por que é que objetos já dados como percursos de valores deveriam ser levados em consideração? [4] Se tenho razão, a questão se a estipulação $\grave{\varepsilon}(\Delta = \varepsilon) = \Delta$ pode ou não ser estendida consistentemente a objetos já denotados por termos de percursos de valores, é irrelevante para qualquer solução do problema de indeterminação relativo a termos de

4. Lembre-se que Frege rejeita a proposta de identificar todos e somente aqueles objetos que não são designados por nomes de percursos de valores com suas classes unitárias. Seu argumento é que o modo de designação de um objeto não deve ser concebido como uma propriedade invariante do mesmo. Mas qual é a força deste argumento? Como explica ou justifica que seria insustentável restringir a estipulação $\grave{\varepsilon}(\Delta = \varepsilon) = \Delta$ a objetos não dados como percursos de valores? Pensa Frege que, se permitíssemos a restrição, tomaríamos ilegitimamente o modo como um objeto nos é dado como uma característica essencial dele e, conseqüentemente, basear-nos-íamos na suposição questionável que todo objeto Δ não dado como um percurso de valores não é, com efeito, um percurso de valores?

percursos de valores. Pois evidentemente, a questão se, por exemplo, $\grave{\varepsilon}(\grave{\varepsilon}(\varepsilon = (\varepsilon = \varepsilon)) = \varepsilon)$ coincide com Júlio César apresenta o mesmo problema que a questão se $\grave{\varepsilon}(\varepsilon = (\varepsilon = \varepsilon))$ é idêntico ao general romano que cruzou o Rubicão.

Pode-se descrever uma segunda dificuldade como segue. No começo da nota de rodapé, Frege sustenta que a estipulação $\grave{\varepsilon}(\Delta = \varepsilon) = \Delta$ é possível para todo objeto dado independentemente de percursos de valores nas mesmas condições que ele considerou com respeito aos valores de verdade. Porém, os seus comentários subseqüentes colocam esta afirmação em dúvida. Pois o argumento parece dizer que podemos ter que reconhecer qualquer objeto Δ, não dado como um percurso de valores, como sendo um percurso de valores. No entanto, se Δ é um percurso de valores não podemos identificar Δ com sua própria classe unitária sem infringir o criterio de identidade para percursos de valores incorporado no Axioma V, a menos que Δ seja a extensão de um conceito sob o qual apenas ele cai.

Como se dá a estipulação no § 10 à luz do que parece ser o argumento de Frege na nota de rodapé? Deveríamos negar que este último tenha qualquer repercussão sobre a primeira? Ou deveríamos sustentar o outro extremo e dizer que a identificação do Verdadeiro e do Falso com suas próprias classes unitárias é um passo em falso? Ao que tudo indica, parece consistente para Frege (1) deixar de lado por indefensável a proposta geral de identificar todos e somente aqueles objetos que não nos são dados como percursos de valores com suas classes unitárias; (2) admitir certas identificações particulares que a proposta geral, se aceita, também permitiria. Refletindo mais de perto, porém, isto é menos claro. Como foi dito antes, a estipulação no § 10 é efetivamente consistente com o Axioma V; porém, seguindo a linha de pensamento de Frege na nota de rodapé, parece que antes de fazermos a estipulação somos obrigados a excluir que o Verdadeiro e o Falso sejam percursos de valores "contendo mais do que um objeto". Pois de acordo com o argumento dado na nota, o fato de que um objeto Δ não nos seja dado como um percurso de valores não implica que Δ não seja um percurso de valores distinto de sua classe unitária. Mas por que este argumento não deveria aplicar-se ao objeto denotado por " $\forall x(x = x)$", por exemplo? E se ele se aplica, então como podemos identificar legitimamente o Verdadeiro com $\grave{\varepsilon}(—\varepsilon)$, isto é, com sua própria classe unitária?

É geralmente aceito que para o projeto fundacional de Frege, repousando sobre uma lógica clássica com uma semantica clássica, é essencial assegurar uma referência para toda expressão bem formada, especialmente para toda fórmula bem formada de sua *Begriffsschrift* (*Conceitografia*). Estabelecer além de toda e qualquer dúvida que toda expressão bem formada é referencial, é precisamente o que se supõe que sua prova no § 31 das *Grundgesetze* deve realizar. Efetivamente, Frege limita-se a demonstrar que todo nome funcional primitivo no seu sistema tem uma referência, aparentemente confiado na suposição de que se os nomes funcionais primitivos têm uma referência, suas regras de formação irão transmitir a propriedade de ser referencial a todo nome formado de acordo com elas. Ora bem, podemos certamente admitir que ao tentar assegurar uma referência para toda expressão bem formada da *Begriffsschrift* Frege está autorizado a fazer certas estipulações adicionais. Todavia, toda vez que ele achar conveniente fazer uma estipulação desse tipo ele deverá tomar cuidado para que ela esteja conforme com qualquer tese que proponha ou defenda no contexto relevante.

Para concluir minha avaliação do § 10 e de sua correspondente nota de rodapé, quero voltar àquilo que denominei um conflito frontal. À primeira vista, o comentário de Frege no § 9 das *Grundgesetze*, segundo o qual com a introdução de sua notação para percursos de valores também estendemos o domínio daquilo que pode ocorrer como argumento de uma função (de primeiro nível), poderia ser considerado como sugerindo que é a força expressiva ou o repertório referencial de sua *Begriffsschrift* o que determina o domínio do que pode aparecer como o argumento de uma função de primeiro nível. Visto sob esta perspectiva, Frege talvez pense que é suficiente determinar os valores da relação de identidade somente para percursos de valores e valores de verdade como argumentos, porque sua teoria formal não contém e não precisa conter meios para denotar outros objetos. De fato, foi dito acima que os axiomas da teoria de Frege não requerem a existência de quaisquer objetos que não sejam valores de verdade e persursos de valores. Porém, limitar a determinação dos valores de $\xi = \zeta$ apenas àqueles objetos que podemos denotar por meio de nomes de valores de funções bem formados de sua *Begriffsschrift* parece ser incompatível com várias observações de Frege que apresentarei agora.

No § 2 das *Grundgesetze*, Frege enfatiza que o domínio daquilo que é admitido como argumento deve ser estendido a objetos em geral.[5] Denomino esta exigência de "doutrina fregeana de não exclusividade". Correspondentemente, ele explica as funções primitivas de primeiro nível para qualquer argumento admissível, isto é, para um domínio de objetos que abrange tudo, e define determinadas funções logicamente complexas, de acordo com seu princípio de completude, "para todos os

5. Objetos são argumentos do tipo 1.

objetos possíveis como argumentos" (GGA I, 52s.). Finalmente, as variáveis livres de objetos *a, b,* ..., que Frege usa no sistema das *Grundgesetze*, têm a tarefa de indicar objetos em geral, não somente aqueles cujo domínio têm limites fixos (GGA II, 78). Se consideramos estas observações tal como se apresentam - eu penso que deveríamos - então podemos supor com plausibilidade que nas *Grundgesetze* Frege considera que as variáveis individuais incluem todos os objetos que existem. Responder a isso dizendo que a linguagem formal das *Grundgesetze* (presumivelmente) não contém nomes para Júlio César ou a lua, ou que semelhantes objetos espácio-temporais não precisam pertencer ao domínio de um modelo de axiomas do sistema careceria de qualquer força. Pois se o domínio de quantificação de primeira ordem abrange todos os objetos, então Frege enfrenta a questão (e, de fato, deve respondê-la) se um percurso de valores incluído no domínio coincide, digamos, com Júlio César ou com a lua. A razão reside em que formulas da forma "$\forall x(x = \grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon) \rightarrow p)$" não terão sido dotadas de uma referência determinada, a menos que "$x = \grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$" tenha sido dada uma referência para Júlio César (ou a lua) tomado como valor de "x". Por conseguinte, se o domínio abrange todos os objetos, então o Axioma V, junto com a estipulação do § 10, não consegue fixar completamente as referências dos nomes de percursos de valores. Além do mais, como no sistema das *Grundgesetze* tanto números cardinais como números reais definem-se como percursos de valores especiais, a indeterminação referencial dos nomes de percursos de valores transfere-se tanto a termos que supostamente designam números cardinais como a termos que supostamente designam números reais.

O conflito em discussão agrava-se mais ainda quando observamos a tentativa fracassada de Frege de provar que todo nome bem formado de sua linguagem formal tem uma referência. A prova, na qual ele invoca tanto o Axioma V como a estipulação do § 10, quando tenta mostrar que o nome funcional primitivo "$\grave{\varepsilon}\varphi(\varepsilon)$" tem uma referência, baseia-se crucialmente na suposição de que no domínio há somente valores de verdade e percursos de valores. Pois se não fazemos essa suposição, então sentenças da forma "$x = \grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$" não terão sido dotadas de uma referência para toda atribuição de membros do domínio a "x", e a prova sequer tería dado início. Da minha parte, não consigo ver como ambas as posições a respeito do domínio de primeira ordem, que Frege parece endossar nas *Grundgesetze*, poderiam ser reconciliadas. Pretender que ele não poderia ter deixado de vislumbrar o aspecto acima mencionado em sua tentativa da prova da referencialidade, e por conseguinte, que ele não considerou que o domínio de seu sistema incluísse todos os objetos que existem, dificilmente resolve a discrepância.

Se tentarmos resolver a indeterminação referencial dos nomes de percursos de valores, encontraremos, em primeiro lugar, duas possibilidades. Primeiro: poderíamos estipular que todo objeto que nos é dado independentemente dos percursos de valores será considerado distinto de todo percurso de valores. Segundo: poderíamos declarar que todo objeto não dado como percurso de valores será identificado com a extensão de um conceito sob o qual somente ele cai. Para Frege ambas as soluções são inaceitáveis. Elas entram em conflito com sua convicção de que o modo como um objeto é dado não pode ser interpretado como uma propriedade característica ou invariante dele.

Poderíamos inventar uma terceira possibilidade para a eliminação da indeterminação em questão. Se fosse possível uma correta elucidação do operador de percurso de valores, isto é, uma elucidação que não dependesse de um conhecimento pressuposto dos percursos de valores, então a indeterminação não apareceria em absoluto. Neste caso, Frege inclusive poderia ter definido o predicado "a é um percurso de valores" ("PV(a)") inspirado na sua definição de "n é um número" das *Grundlagen*:

$$PV(a) := \exists \varphi(\grave{\varepsilon}\varphi(\varepsilon) = a)$$

Equipados com esta definição, que supostamente satisfaz o princípio de completude de Frege[6], estaríamos em posição de decidir, em princípio, se um objeto dado qualquer é ou não um percurso de valores. Se a é um percurso de valores e é dado como tal, o Axioma V nos diria se a coincide ou não com um percurso de valores. Desafortunadamente, as perspectivas de elaboração de uma elucidação impecável de "$(\grave{\varepsilon}\varphi\,\varepsilon)$" não são encorajadoras. A conclusão é que não está visível uma solução satisfatória do problema de indeterminação de Frege que concorde com os princípios subjacentes de sua lógica e filosofia.

6. Um conceito de primeiro nível $\Phi(\xi)$ satisfaz este princípio se para todo objeto *a* está determinado se *a* cai ou não sob $\Phi(\xi)$.

Abstract

In this paper, I want to analyse Frege's introduction of courses-of-values (*Wertverläufe*) in his opus magnum *Grundgesetze der Arithmetik* (vol. I, 1893, vol. II, 1902). More specifically, I want to assess critically, with respect to course-of-values terms, what I call 'Frege's indeterminacy problem'. In the first section, I deal with his "permutation argument" and examine his solution of the problem of determining completely the references (*Bedeutungen*) of course-of-values terms in § 10 of *Grundgesetze*. In the second section, I canvass Frege's identification of the two truth values, the True and the False, with their own unit classes and argue that he does not succeed in fixing completely the references of course-of-values terms and, thus, in justifying the use of these terms in his formal language. In doing so, I shall prescind from the inconsistency of his logical theory.

Referências Bibliografica

DUMMETT, M.: *The Interpretation of Frege's Philosophy*, Duckworth, London, 1981.

FREGE, G.: *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl* [GLA], W. Koebner, Breslau, 1884, reimpressão Darmstadt e Hildesheim, 1961.

FREGE, G.: *Grundgesetze der Arithmetik, Begriffsschriftlich abgeleitet* [GGA], Vol. I, H. Pohle, Jena, 1893, Vol. II, H. Pohle, Jena, 1903, reimpressão Darmstadt e Hildesheim, 1961.