Semântica de Grafos para CCω

Giovanni da Silva de Queiroz[1]
Maria Vilma Fernandes de Lucena[2]

Resumo

Neste trabalho exploramos a dualidade entre lógicas paraconsistentes e lógicas intuicionistas, enfocando um cálculo proposto por Richard Sylvan em 1990, o cálculo CCω. Nós mostramos como é possível construir uma nova semântica, correta e completa, para este cálculo, baseada em grafos não reflexivos. Tal semântica propicia, ainda, que se esclareçam relações entre paraconsistência e intuicionismo. A definição de negação, em ambos os sistemas, joga um papel fundamental.
Palavras-chave: intuicionismo, paraconsistência, dualidade.

Adualidade entre sistemas paraconsistentes e sistemas intuicionistas tem sido tema recorrente na literatura, seja devido aos aspectos sintáticos, seja por motivações semânticas (ver, a propósito, [LdC84], [LdC86], [PRN89], [Syl90], [AlQ91], [SeC95], [Urb96]). Neste trabalho, nós exploramos esta dualidade, tomando em consideração um cálculo paraconsistente, CCω, proposto por Richard Sylvan; em seguida, nós estabelecemos outra semântica para CCω, baseada em grafos não reflexivos; na verdade, nós tomamos o reticulado dos sub-grafos de um dado grafo G e definimos as operações de união, interseção e complementação e as relacionamos com fórmulas na linguagem de CCω; ao final, mostraremos como uma nova definição da operação de complementação no reticulado dos sub-grafos de um grafo dado, definição esta que se encontra em [ReZ96], pode servir

---

[1] Universidade Federal da Paraíba, Departamento de Filosofia.
[2] Universidade Federal da Paraíba, Departamento de Filosofia.

para lógicas intuicionistas, em particular a lógica proposta por Heyting, evidenciando, assim, a dualidade referida.

I. O cálculo CCω

Em [Syl90], Richard Sylvan propôs uma análise dos sistemas Cn, $1 \leq n \leq \omega$, de da Costa [dCo93], relacionando-os a lógicas intuicionistas; segundo o autor, existe uma dualidade sintática entre ambos os sistemas, da seguinte maneira: enquanto o intuicionismo rejeita a lei do terceiro excluído ($A \vee \neg A$) e afirma a não-contradição ($\neg (A \wedge \neg A)$), os sistemas Cn geralmente afirmam a lei do terceiro excluído e rejeitam a não-contradição e, ainda, enquanto o intuicionismo afirma $A \supset \neg \neg A$ e rejeita $\neg \neg A \supset A$, os sistemas de da Costa fazem justamente o contrário. Após mostrar como parece impossível prover todos os sistemas Cn de uma regra que garanta a substituição de equivalentes, Sylvan detém-se no cálculo Cω e obtém um outro cálculo, por ele chamado CCω e que ele considera um "melhoramento" de Cω. A novidade é que CCω continua um cálculo paraconsistente, no sentido de que não deriva todas as instâncias de Duns Scotus, isto é, não deriva esquemas da forma $A \wedge \neg A \supset B$, embora derive $\neg (\neg A \wedge A)$ que, na formulação de da Costa, não deveria ser derivada em geral. Os critérios para se definir um cálculo como paraconsistente foram formulados por Newton C.A. da Costa, que é o pioneiro na construção de tais sistemas; em seu trabalho "Sistemas Formais Inconsistentes", apresentado em 1963 (republicado em 1993, ver [dCo93]), ele propõe vários sistemas - em verdade, uma hierarquia deles - que podem servir de base a sistemas dedutivos inconsistentes satisfazendo as seguintes propriedades [Arr80]:

I. Nestes sistemas, em geral, não é válido o esquema $\neg (A \wedge \neg A)$;
II. De duas proposições contraditórias, não se pode deduzir, em geral, qualquer proposição; (estamos identificando com este critério o esquema clássico Duns Scotus e todas os seus correlatos);

III. Nestes cálculos, são válidos todos os esquemas e regras da lógica clássica que não interfiram com as primeiras condições.

Embora $CC\omega$ não satisfaça todos os critérios de da Costa, pode servir como lógica subjacente para teorias inconsistentes sem que se derive a trivialidade da teoria, o que nos parece motivação bastante para considerá-lo.

O cálculo $CC\omega$ tem os seguintes axiomas:

1) $A \supset (B \supset A)$
2) $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$
3) $(A \wedge B) \supset A$
4) $(A \wedge B) \supset B$
5) $A \supset (B \supset (A \wedge B))$
6) $A \supset (A \vee B)$
7) $B \supset (A \vee B)$
8) $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C))$
9) $A \vee \neg A$
10) $\neg\neg A \supset A$

juntamente com as seguintes regras de inferência:

Regra *Modus Ponens*: A , $A \supset B / B$

Regra RC: $A \supset B / \neg B \supset \neg A$

Algumas observações:

1. Se acrescentarmos a $CC\omega$ o esquema clássico $(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$ então $CC\omega + (A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A) =$ lógica clássica, CL.
2. $C\omega + (\neg A \supset \neg B) / B \supset A = CL$.
3. A única diferença entre $C\omega$ e $CC\omega$ é a regra RC que, em virtude das observações acima, deve ser aplicada somente a teoremas.

Sylvan estende sua análise da dualidade ao domínio semântico. Enquanto a negação no intuicionismo é avaliada em termos de impossibilidade, como $\neg\Diamond$, uma regra dual analisaria a mesma como não–necessidade, portanto como $\neg$, isto é, $\Diamond\neg$. A analogia modal sugere uma regra de avaliação para a negação paraconsistente $\neg$ da seguinte forma: $I(\neg A, a) = 1$ se e somente se para algum $b \in K$, Sab e $I(A, b) = 0$, e aqui S é uma relação diádica num conjunto de mundos K, satisfazendo determinadas condições. A semântica dada para CC baseia-se em *estruturas de mundo* da forma M = (G, K, R), na qual G $\in$ K e R é uma relação de ordem sobre K. É definida uma *CC estrutura-modelo M* como uma estrutura (T, K, $\leq$, S) na qual T $\in$ K; $\leq$ e S são relações diádicas sobre K, tal que a relação de ordem $\leq$ é reflexiva e transitiva (e opcionalmente anti-simétrica), e a relação S satisfaz, universalmente, a seguinte condição (si): se a $\leq$ c e Sab então Scb. Definidos os conceitos de valoração e interpretação na estrutura modelo M acima, são provados os teoremas de correção e completude.

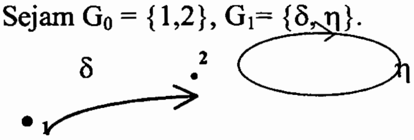
Nossa proposta é dar uma nova semântica para CCω, diferente da que foi apresentada por Sylvan. Consideramos que a condição (si), com o artifício da relação S, que não sabemos bem do que se trata, é pouco intuitiva e problemática. Pretendemos fornecer tal semântica, tomando como base não mais as estruturas de mundos possíveis, mas considerando grafos não reflexivos introduzidos em [Law91].

II. Uma nova semântica

Definição 1: Um *grafo G* é um objeto da forma G = (G_0, G_1, i, f) no qual G_0 e G_1 são conjuntos; i, f são funções tais que i, f: $G_1 \to G_0$.

Podemos interpretar G_0 como um conjunto de vértices; G_1 como um conjunto de flechas orientadas; i e f indicam, respectivamente, o vértice inicial e o vértice final, em G_0.

Exemplo 1: Sejam $G_0 = \{1,2\}$, $G_1 = \{\delta, \eta\}$.



Pela definição, G = ({1,2}, {δ, η}, i, f). Como i indica o vértice final e f indica o vértice final, então i(δ) = 1, f(η) = 2, i(δ) = f(η) = 2.

Definição 2: Um *sub-grafo X de G* é uma quádrupla X = (X_0, X_1, i, f) na qual $X_0 \subseteq G_0$; $X_1 \subseteq G_1$ e tal que toda flecha em X_1 tem vértice inicial e final em X_0. Se X é sub-grafo de G, nós escrevemos $X \subseteq G$.

Definição 3: Sejam α, β grafos. Então, a relação de ordem $\leq$ é definida da seguinte maneira: $\alpha \leq \beta$ se, e somente se, $\alpha \subseteq \beta$.

<u>Teorema 1</u>: A relação $\leq$, tal como definida acima, é uma relação de ordem parcial.
Prova: Devemos provar que $\leq$, definida como $\subseteq$, é uma relação de ordem parcial, isto é, uma relação reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

1) $\leq$ é reflexiva: suponhamos que $\neg$ ($\alpha \subseteq \alpha$). Então, $\neg$ ($\alpha \subset \alpha$ ou $\alpha = \alpha$), isto é, $\neg$ ($\alpha \subset \alpha$) e $\alpha \neq \alpha$. O que é impossível. Logo, $\alpha \subseteq \alpha$. Por definição, $\alpha \leq \alpha$. Logo, $\leq$, como definida, é uma relação reflexiva.

2) $\leq$ é anti-simétrica: devemos provar que se $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \alpha$ então $\alpha = \beta$; suponhamos (1) que $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \alpha$ e suponhamos (2), também, que $\alpha \neq \beta$. De (1), por definição, temos $\alpha \subseteq \beta$ e $\beta \subseteq \alpha$. De $\alpha \subseteq \beta$, obtemos que $\alpha \subset \beta$ ou $\alpha = \beta$. Pela hipótese (2), concluímos que $\alpha \subset \beta$. De $\beta \subseteq \alpha$, pelo mesmo raciocínio, obtemos que $\beta \subset \alpha$. Logo, de $\alpha \subset \beta$ e $\beta \subset \alpha$, temos que $\alpha = \beta$, contradizendo a hipótese (2). Logo, $\alpha = \beta$ e, portanto, a relação $\leq$, como definida, é anti-simétrica.

3) $\leq$ é transitiva: devemos provar que se $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \gamma$ então $\alpha \leq \gamma$; suponhamos que $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \gamma$. Por definição, $\alpha \subseteq \beta$ e $\beta \subseteq \gamma$. Suponhamos também que, $\neg$ ($\alpha \leq \gamma$), que por definição é, $\neg$ ($\alpha \subseteq \gamma$), isto é, $\neg$ ($\alpha \subset \gamma$ ou $\alpha = \gamma$), ou seja, $\neg$ ($\alpha \subset \gamma$) e $\alpha \neq \gamma$. Deste último, temos que $\exists x$ ($x \in \alpha$ e $x \notin \gamma$). Por $\exists$-eliminação, para um determinado elemento c, $c \in \alpha$ e $c \notin \gamma$. De $\alpha \subseteq \beta$, temos que $\alpha \subset \beta$ ou $\alpha = \beta$. Dois casos a considerar: (1) se $\alpha \subset \beta$, então como $c \in \alpha$, temos que $c \in \beta$. (2) se $\alpha = \beta$, como $c \in \alpha$, por

substituição, $c \in \beta$. Em qualquer caso $c \in \beta$. De $\beta \subseteq \gamma$, temos também dois casos: (1) se $\beta \subset \gamma$, como $c \notin \gamma$, temos que $c \notin \beta$. (2) se $\beta = \gamma$, por substituição, $c \notin \beta$. Em qualquer caso, $c \notin \beta$. Logo, $c \in \beta$ e $c \notin \beta$, o que é impossível. Logo, $\alpha \leq \gamma$. Provamos então que a relação $\leq$, definida como $\subseteq$, é transitiva.

Por (1), (2), (3), concluímos que a relação $\leq$, como definida, é uma relação de ordem parcial.

Teorema 2: O conjunto de todos os sub-grafos de um grafo G qualquer, P(G), forma um reticulado sob a relação $\leq$.

Prova: Seja P(G) o conjunto de todos os sub-grafos de G. Sejam $\bigcap$ e $\bigcup$ as operações usuais de teorias de conjuntos; se X e Y são sub-grafos de G, $X \cap Y = (\{X_0 \bigcap Y_0\}, \{X_1 \bigcap Y_1\}, i, f)$ e $X \bigcup Y = (\{X_0 \cup Y_0\}, \{X_1 \cup Y_1\}, i, f)$. Definidas tais operações, $< P(G), \leq >$ (ou, alternativamente, $< P(G), \bigcap, \bigcup >$) forma um reticulado.

Definição 4 : Considere, agora, a estrutura $KG = < P(G), \leq, v >$, na qual P(G) é um reticulado (o conjunto de todos os sub-grafos de G), $\leq$ é a relação já definida e v é uma função tal que v: FOR $\Rightarrow$ P(G), com FOR o conjunto das fórmulas de $CC\omega$. Para elementos g(A), g(B), g(C) de PG, isto é, sub-grafos de G, a estrutura KG satisfaz, ainda, as seguintes condições:

1. $v(A) = g(A)$, se A é uma fórmula atômica.

2. $v(A \wedge B) = g(A) \bigcap g(B)$.

3. $v(A \vee B) = g(A) \bigcup g(B)$.

4. $v(A \supset B) = \sup \{g(C)$ tal que $g(C) \wedge g(A) \leq g(B)\}$.

5. $v(\neg A)$ = menor sub-grafo g(B), de G, tal que $g(B) \bigcup g(A) = G$, ou seja, $\inf \{g(B)$, tal que $g(B) \bigcup g(A) = G\}$.

Observação: Nós exigimos, conforme definição 2, num sub-grafo, que toda flecha tenha vértices, inicial e final, bem definidos. Note ainda que se $g(A) \leq g(B)$, então $v(A \supset B) = G$.

Definição 5: Uma fórmula bem formada (fbf) A de $CC\omega$ é *verdadeira numa estrutura* KG se, e somente se, $v(A) = G$.

Definição 6: Uma fbf A de $CC\omega$ é *válida* se, e somente se, para qualquer estrutura KG, $v(A) = G$.

Teorema 3 (Correção): Todo teorema de $CC\omega$ é uma fórmula válida.

Prova: Devemos provar que, dada qualquer fbf A de $CC\omega$, se A for um teorema de $CC\omega$, então A é uma fbf válida. A prova é feita por indução em teoremas, isto é, vamos provar: 1) Todos os postulados de $CC\omega$ são fbfs válidas de $CC\omega$; 2) As regras *Modus Ponens* e RC preservam validade.
Provando, agora, o item (1), para alguns postulados:

(P1) $A \supset (B \supset A)$

Prova: Suponhamos que exista uma estrutura KG na qual $v(A \supset (B \supset A)) \neq G$. Então não ocorre que $g(A) \leq g(B \supset A)$. Isto é, não ocorre que $g(A) \leq (g(B) \leq g(A))$. Mas, isto é impossível. Logo, $v(A \supset (B \supset A)) = G$ para toda estrutura KG e, portanto, $A \supset (B \supset A)$ é uma fbf válida de $CC\omega$.

(P3) $(A \wedge B) \supset A$

Prova: Suponhamos que exista uma estrutura KG na qual $v((A \wedge B) \supset A) \neq G$. Então, não ocorre que $g(A \wedge B) \leq g(A)$, isto é, não ocorre que $(g(A) \cap g(B)) \leq g(A)$, o que é impossível. Logo, $v((A \wedge B) \supset A) = G$ para toda estrutura KG e, portanto, $(A \wedge B) \supset A$ é uma fbf válida de $CC\omega$.

(P9) $A \vee \neg A$

Prova: Imediata, a partir da definição de $v(\neg A)$.

(P10) $\neg\neg A \supset A$

Prova: Suponhamos que exista uma estrutura KG, na qual $v(\neg\neg A \supset A) \neq G$. Então, não ocorre que $g(\neg\neg A) \leq g(A)$. Mas, $g(\neg\neg A)$ = menor sub-grafo $g(B)$ tal que $g(B) \cup g(\neg A) = G$; pela prova de (P9), acima, $g(B) = g(A)$. Logo, $v(\neg\neg A \supset A) = G$, para toda KG e, assim, $\neg\neg A \supset A$ é uma fbf válida de $C C\omega$.

(2) Para as regras, consideremos o seguinte:

Regra *Modus Ponens*. Suponhamos que MP não preserve validade. Então, A e $A \supset B$ são fbfs válidas de $C C\omega$, mas B não é válida. Deste último fato, temos que existe uma estrutura KG na qual B não é verdadeira. Então $v(B) \neq G$. Mas A e $A \supset B$ são verdadeiras em qualquer estrutura KG . Logo, $v(A) = G$ e $v(A \supset B) = G$. Deste último fato, $g(A) \leq g(B)$. Logo $v(B) = G$, o que é uma contradição com a hipótese.

Regra *RC*: Suponhamos (1) que $A \supset B$ seja uma fbf válida de $C C\omega$. Então $v(A \supset B) = G$ para toda estrutura KG. Suponhamos, também (2), que $\neg B$ seja uma fbf válida, logo $v(\neg B) = G$ para toda estrutura KG, e que $v(\neg A) \neq G$. Mas, dado que $g(A) \leq g(B)$, segue-se que $\neg g(B) \leq \neg g(A)$; assim, $g(\neg B) \leq g(\neg A)$ e, portanto, $G \leq g(\neg A)$, o que contraria a hipótese (2); logo $g(\neg B \supset \neg A) = G$.

Fica então provado o Teorema da Correção.

Algumas observações:

1. Na prova de que a regra RC preserva validade, utilizamos o fato de que $g(\neg A) = \neg g(A)$, cuja prova é imediata do item 5 da definição 4.

2. Existem estruturas KG tais que não são válidos os seguintes esquemas: $A \wedge \neg A \supset B$ e $A \supset \neg\neg A$:

a) Seja o exemplo 1 dado anteriormente e tomemos P(G), o conjunto de todos os subconjuntos do grafo G. Consideremos o sub-grafo X_1 dado por ({1,2}, {δ}, i, f); o menor sub-grafo g, de G, tal que $X_1 \cup g = G$ é o sub-grafo X_2 dado por ({2}, {η}, i, f); assim, $X_2 = c(X_1)$; mas, observe-se que $X_1 \cap X_2$ é o sub-grafo dado por ({2}, ∅, i, f) ≠ ∅; note que esta possibilidade não está excluída de nossa definição 1, pois ali se exigiu que toda flecha em G_0 tivesse vértice inicial e vértice final em G_1. Pontos isolados são também sub-grafos. Portanto, existem estruturas KG tais que, dado um sub-grafo g, $g \cap \neg g \neq \emptyset$; assim, Duns Scotus, e seus correlatos, não são válidos.

b) Tomemos, agora, os pontos isolados 1 e 2, ou seja, o sub-grafo p = ({1,2}, ∅, i, f); seu complementar é o próprio sub-grafo G e o complementar de G, em P(G), é o sub-grafo vazio; assim, não ocorre que $p \leq \neg\neg p$.

Definição 7 : Uma *álgebra brouweriana* é uma estrutura $< A, \cap, \cup, —, T >$ tal que:

1) $< A, \cap, \cup >$ é um reticulado com elemento unitário T;
2) A é fechado sob — ;
3) Para todo a, b, c ∈ A, $a — b \leq c$ se, e somente se, $a \leq b \cup c$.

<u>**Teorema 4**</u>: O reticulado dos sub-grafos de um grafo dado forma uma álgebra brouweriana.

Prova: Ver [ReZ96: 29].

<u>Observação</u>: Álgebras brouwerianas foram introduzidas por McKinsey e Tarski [McT46] e se revelam adequadas para o estudo de lógicas paraconsistentes [SAQ97]. Em Reyes e Zolfaghari [ReZ96] estão definidas álgebras *co-Heyting* como álgebras duais das álgebras de Heyting; álgebras co-Heyting permitem que seja definida uma operação dual da operação "→" das álgebras de Heyting; esta operação, que os autores

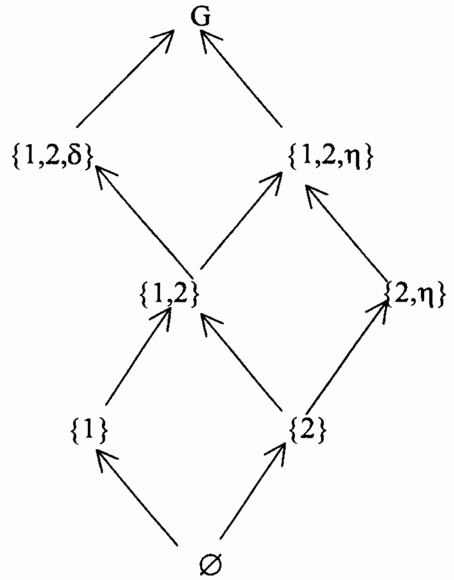
chamam de "subtração", é estabelecida para reticulados distributivos limitados L, da seguinte maneira: $\setminus : L \times L \longrightarrow L$ e deve satisfazer a condição de que $x \setminus y \leq z$ se e somente se $x \leq y \vee z$. Esta última é a definição da operação "pseudo-diferença": —, introduzida por Tarski no trabalho referido.

Teorema 5 (Completude): Toda fórmula válida A é um teorema de CCω.

Prova: Se A não é teorema de CCω, então existe uma estrutura KG tal que $v(A) \neq G$ nesta estrutura e, portanto, A não é válida.

III. Sobre as relações entre paraconsistência e intuicionismo

Poderíamos definir, tal como em [ReZ96], um grafo como um conjunto com dois tipos de elementos estruturados, flechas e vértices, obtidos pelas relações internas dadas pelas funções i e f. Tal procedimento simplificaria a notação e as relações entre o grafo G e seus sub-grafos. O exemplo 1 seria, então, escrito como o conjunto $G = \{1, 2, \delta, \eta\}$. Teríamos, então, o seguinte reticulado P(G).



Os sub-grafos das observações (a) e (b) do item 2, após o teorema 3, seriam, simplesmente, os conjuntos $X_1 = \{1, 2, \delta\}$, $X_2 = \{2, \eta\}$, $X_3 = \{1, 2\}$ e os conjuntos G e o vazio. O problema de se tomar sub-grafos como conjuntos desse tipo está em que, ao se estabelecer a operação de complementação, da teoria dos conjuntos, é necessário fazer uma determinada escolha, pois o complemento de X, c(X), em geral, não é um grafo. Por exemplo, o complemento de X_1, nesta notação, é o conjunto $\{\eta\}$, que não é um grafo, pois foi exigido que toda flecha tivesse vértice inicial e vértice final no conjunto dos vértices. Por isso, tomamos como complemento de X_1, em nossa discussão após o teorema 3, a quádrupla $(\{2\}, \{\eta\}, i, f)$ que é equivalente, nesta nova notação, ao conjunto $\{2, \eta\}$ - este, é um grafo, conforme exige a definição. Mas era possível outro caminho para se pensar a operação de complementação. O caminho que tomamos foi o de "completar" o complemento para satisfazer a definição; se, ao invés disso, tivéssemos "descartado" o complementar "problemático" (esta noção se encontra em [ReZ96], página 30), obteríamos outra negação que, entretanto, não mais se prestava para lógicas paraconsistentes. Apenas como exemplo, esta nova possibilidade nos obrigava a tomar como o conjunto complementar de X_1 o conjunto vazio. Isso pode ser feito formalmente, como a seguir.

A condição 5 da definição 4, na qual foi dada a condição da avaliação da negação, poderia ser modificada para a seguinte:

5I. $v(\neg A)$=maior sub-grafo g(B), de G, tal que $g(B) \cap g(A) = \emptyset$, ou seja, sup $\{g(B)$, tal que $g(B) \cap g(A) = \emptyset\}$.

Neste caso, então, não mais se teria uma semântica para $C\omega$, mas uma semântica para o cálculo intuicionista de Heyting. Com efeito, note-se que, agora, valem os seguintes esquemas: $A \wedge \neg A \supset B$; pois, X_1 $(= \{1, 2, \delta\}) \cap c(X_1) = \emptyset$ e, portanto, valem Duns Scotus e seus correlatos; por sua vez

$X_1 \cup c(X_1) \neq G$, o que mostra que não vale a lei do terceiro excluído.

O exemplo acima, desta vez tendo por base grafos não reflexivos, leva-nos a reafirmar que lógicas paraconsistentes e lógicas intuicionistas estão intimamente conectadas, tendo suas diferenças explicitadas na definição de negação; observe, a propósito, que as duas avaliações estabelecidas para negações – 5 e 5 I – gozam das seguintes diferenças: aquilo que, na avaliação da negação paraconsistente, é definido mediante a operação inf, a operação união, e o elemento G do reticulado P(G), na avaliação da negação intuicionista, é definido mediante o sup, a operação interseção e o elemento $\varnothing$ do reticulado P(G). As condições 5 e 5I são, nesse sentido, duais.

Abstract

In this paper we explore the duality between paraconsistent and intuitionistic logics, by taking in account a calculus proposed by Richard Sylvan in 1990, the logical system CCω. We show how it is possible to build a new semantics, which is sound and complete, for that calculus. This semantics is based in non-reflexive graphs. Such semantics still shows some relationships between paraconsistency and intuitionism. The definition of negation, in both systems, plays a fundamental role.
Key words: intuitionism, paraconsistency, duality.

Bibliografia

[AlQ91] Alves, E.H. e G.S.Queiroz . "The construction of the calculi *Cn* of da Costa", ***The Journal of Non-Classical Logic***, *8 (1991)*, p.67-78.

[Arr80] Arruda, A.I. "A survey of paraconsistent logic" *in* A. I. Arruda, N. C. A. da Costa, R. Chuaqui (eds.). **Mathematical Logic in Latin America**. Amsterdam: North-Holland, 1980, p.1-41.

[dCo93] Costa, N.C.A da . **Sistemas Formais Inconsistentes**. Curitiba: Ed. da UFPR, 1993.

[Law91] Lawvere, F.W. "Intrinsic co-Heyting boundaries and the Leibniz rule in certain toposes", ***Lecture Notes in Mathematics,*** *1488 (1991)*, p. 279-281.

[LdC84] Loparic, A. e N.C.A.da Costa. "Paraconsistency, paracompleteness and valuations", ***Logique et Analyse***, *106 (1984)*, p.119-131.

[LdC86] Loparic, A. e N.C.A.da Costa. "Paraconsistency, paracompleteness and induction", ***Logique et Analyse***, *113 (1986)*, p.73-80.

[McT46] McKinsey, J.C.C. e A. Tarski. "On closed elements in closure algebras", ***Annals of Mathematics,*** *47 (1946)*, p.122-162.

[ReZ96] Reyes, G. e H. Zolfaghari. "Bi-Heyting algebras, toposes and modalities", ***Journal of Philosophical Logic,*** *25 (1996)*, p.25-43.

[SeC85] Sette, A. M. e W. A. Carnielli. "Maximal weakly-intuitionistic logics", ***Studia Logica,*** *55(1995)*, p.181-203.

[SAQ97] Queiroz, G.S., Sette, A.M. e Alves, E.H. "Brouwerian Algebras and Paraconsistent Logic", ***Logic Journal of the IGPL***, *vol.5, nº 3 (1997)*, p.467.

[Syl90] Sylvan, R. "Variations on da Costa C systems and dual-intuitionistic logic.I. Analyses of C and CC ", ***Studia Logica,*** *49(1990)*. p.47-65.

[Urb96] Urbas, I. "Dual-intuitionistic logics", ***Notre Dame Journal of Formal Logic,*** *vol.37 (1996)*, p.440-451.