El enfoque multiobjetivo en los modelos matemáticos de planificación de cultivos

CARLOS ROMERO
Catedrático de Economía de la Empresa
de la Universidad de Córdoba

1. *Antecedentes históricos*

Una de las principales dificultades que presenta la aplicación de las técnicas de programación matemática a la planificación de actividades económicas, reside en la elección por parte del centro decisor del objetivo que el programa procederá a optimizar (maximizar o minimizar) de forma que la solución encontrada satisfaga una serie de condiciones. El problema no consiste en que resulte difícil al centro decisor encontrar un objetivo, sino que, por el contrario, la tarea de encontrar objetivos resulta demasiado fácil. Así, si preguntamos a un empresario qué es lo que desea que optimice un programa que se va a aplicar para la planificación de la producción de su empresa, probablemente nos conteste que desearía que el plan de producción elegido fuera aquel que: maximizara el beneficio empresarial, el volumen de ventas, el área de mercado; que minimizara los costes unitarios de fabricación en cada una de las plantas, etc. Si preguntamos a un político del Ministerio de Agricultura responsable de la planificación de los cultivos en un nuevo regadío qué es lo que desea que optimice un programa que se fuera a preparar para realizar la correspondiente planificación, probablemente nos conteste que desearía que el plan de cultivos elegido fuera aquel que: maximizara el valor añadido, la creación de puestos de trabajo, el margen bruto; que minimizara la estacionalidad de la mano de obra, etc.

La programación matemática clásica es incapaz de dar respuesta a este tipo de planteamientos, pues está concebida para optimizar una función con un único objetivo. En cada uno de los ejemplos que acabamos de exponer, la aplicación de la programación clásica obliga a que los respectivos centros decisores elijan un objetivo único que será el que se procederá a optimizar. Indudablemente, el trabajar con funciones de un solo objetivo constituye una importante rigidez a la hora de aplicar la programación a problemas concretos de la vida real, en los que la optimización se realiza o se desearía realizar entre varios objetivos, que muchas veces resultan contradictorios entre sí.

En 1961 Charnes y Cooper [6] publicaron un trabajo en el que se presenta por primera vez un modelo de programación matemática en el que figura de una manera explícita una función con más de un objetivo a optimizar. Básicamente, el modelo propuesto por Charnes y Cooper permite abordar el problema que plantea la programación lineal, cuando entran en conflicto una serie de objetivos incluidos como restricciones. Como en la mayor parte de los casos resulta imposible satisfacer exactamente todos los objetivos, la función objetivo del programa consiste en la minimización de la suma de los valores absolutos de las desviaciones (positivas o negativas) producidas para cada objetivo, con respecto a sus niveles de logro establecidos *a priori*. A esta nueva técnica se le dio el nombre de programación por objetivos.

Aunque para la mayor parte de los especialistas el concepto original de la programación por objetivos se debe a Charnes y Cooper, con anterioridad al trabajo de estos autores Klahr [21] publicó en 1958 un artículo donde expone el marco teórico de la programación matemática multiobjetivo, pero sin presentarlo dentro de una estructura operativa.

En 1965 la incipiente programación por objetivos experimenta un fuerte impulso con la publicación de un libro de Ijiri [20]. En este trabajo se presenta, de una manera perfeccionada, tanto el marco teórico como la estructura operativa propuesta por Charnes y Cooper. La principal novedad teórica del trabajo de Ijiri consiste en la introducción de las llamadas prioridades excluyentes. Ijiri agrupa los diferentes objetivos en diversos niveles de prioridades excluyentes, de tal manera que si una cierta prioridad P_i es preferida a otra prioridad P_j, lo seguirá siendo independientemente de que se asocie a la prioridad P_j cualquier multiplicador por grande que sea. Es decir, el logro de el (o los) objetivos de una cierta prioridad P_i es inconmensurablemente preferido al logro de cualquier conjunto de objetivos situados en una prioridad inferior P_{i+1}. Ijiri reconoce que la existencia de prioridades excluyentes, aun no siendo un supuesto que se satisfaga siempre, resulta aceptable para analizar un elevado número de casos de la vida real. Por otra parte, conviene indicar que para plantear los modelos multiobjetivo no resulta imprescindible emplear el esquema de prioridades excluyentes propuesto por Ijiri. Pese a ello, esta idea ha sido ampliamente aceptada por parte de los estudiosos del tema, por lo que en la mayor parte de los casos los modelos de programación por objetivos se presentan dentro de una estructura de prioridades excluyentes.

La aportación de Ijiri ha tenido una gran importancia tanto por las novedades teóricas que acabamos de comentar, como por la atención que dedicó a los problemas algorítmicos relacionados con la resolución de los programas multiobjetivo. Así, Ijiri sugiere algoritmos de resolución cuyo soporte operativo reside en la utilización de matrices inversas generalizadas. Este impulso en los métodos de resolución propició considerablemente la aparición de una serie de trabajos en los que se aplica la metodología de la programación por objetivos a la resolución de algunos problemas planteados en áreas muy diversas de la realidad.

Así, en 1968 Charnes, Cooper et al. [7, 8] publican dos trabajos en los que se presenta el problema de la programación de medios de publicidad, como un caso de programación por objetivos. En 1969 Mao [28, cap. 4] publica un libro sobre temas financieros, en el que se plantean algunos problemas relacionados con la planificación de la estructura financiera de la empresa dentro de un marco de programación con objetivos múltiples. Lee y Clayton [23], en 1972, y Schroeder [33], en 1974, aplican la programación por objetivos a la planificación de recursos humanos en centros universitarios, y Campbell e Ignizio [5], en 1972, a problemas relacionados con la planificación educativa (1). También debe citarse el tratamiento que en 1973 dieron Lee y Moore [25] al problema clásico del transporte desde una óptica de objetivos múlti-

(1) En realidad, la aportación más importante realizada por el trabajo de CAMPBELL e IGNIZIO consiste en presentar la programación por objetivos como un procedimiento alternativo, y en algunos casos más eficiente que la técnica clásica de los mínimos cuadrados ordinarios utilizada para efectuar ajustes estadísticos. El hecho de que el método propuesto en el artículo se aplique a un problema de predicción de los resultados en los exámenes a realizar por parte de un determinado colectivo de alumnos en un centro universitario, no es en absoluto esencial para valorar el artículo.

ples, el trabajo sobre planificación de salarios de funcionarios públicos realizados en 1979 por Fabozzi y Bachner [12] donde se comparan los resultados obtenidos vía programación lineal clásica frente a los obtenidos por medio de la programación por objetivos, así como el trabajo publicado por Ross y Soland en 1980 [31], donde se estudia el problema de la localización de servicios públicos con criterios multiobjetivos. Asimismo, por su interés en el campo de la economía, debemos comentar la traslación del problema del racionamiento del capital, propuesto inicialmente por Lorie y Savage en 1955 [26] y resuelto satisfactoriamente por Weingastner en 1963 [34] por medio de la programación lineal entera, al contexto más realista de la programación multiobjetivo. En esta línea de trabajo merecen citarse los artículos de Hawkins y Adams [15] y de Lee y Lerro [24], publicados ambos en 1974; el de Ignizio [17], publicado en 1976; así como el tratamiento que da Bussey [4, cap. 9] a estos problemas a nivel de libro de texto.

Dentro de este bosquejo histórico que sobre la programación por objetivos estamos exponiendo muy brevemente, cabe destacar que en 1972 Sang M. Lee [22] publica el primer libro de texto dedicado íntegramente al tema de la programación por objetivos. El tratamiento dado al problema es bastante completo, preocupándose tanto de los aspectos relacionados con la formulación del modelo, como de los aspectos puramente algorítmicos. Las principales novedades aportadas por el libro de Lee pueden resumirse de la siguiente manera: En primer lugar, Lee presenta el marco teórico de la programación por objetivos de una manera mucho más precisa de lo que se había hecho en trabajos anteriores, permitiendo mejoras los aspectos relativos a la formulación de los modelos. En el terreno operativo, en este libro se presenta por primera vez tanto el método gráfico de resolución de programas multiobjetivo, como un algoritmo *simplex* modificado y adaptado a estructuras multiobjetivo. Este algoritmo se acompaña del correspondiente programa de computador. Dentro de la línea algorítmica conviene indicar que Lee plantea también tanto el análisis de sensibilidad como la programación por objetivos paramétrica en estructuras lineales. La última parte del libro está dedicada a la presentación de numerosos casos prácticos tomados de áreas muy diversas (decisiones financieras y de marketing, planificación de los recursos en universidades, hospitales, etc.) en los que se aplica el enfoque multiobjetivo. La principal limitación del libro de Lee es la de estudiar el problema multiobjetivo, únicamente desde la óptica de la programación lineal continua, sin analizar los modelos con variables enteras o en contextos lineales.

En 1976, James P. Ignizio [16] publica otro libro dedicado también de una manera íntegra a la programación multiobjetivo, presentando claros avances con respecto al libro de Lee. Desde un punto de vista teórico, la principal novedad del libro de Ignizio consiste en demostrar rigurosamente que las técnicas clásicas de programación matemática (lineal, cuadrática, etc.) son casos particulares de la programación por objetivos, cuando hasta entonces en la mayor parte de la bibliografía se consideraba exactamente lo contrario; es decir, se presentaba a la programación multiobjetivo como una particularización de la programación lineal. Este punto, que tiene gran importancia, será desarrollado con detalle en apartados posteriores de este artículo. Del libro de Ignizio también merece citarse la serie de algoritmos y programas de computador presentados en el texto, que permiten abordar problemas de programación por objetivos en contextos tanto lineales como no lineales, así como trabajar con variables enteras, analizar los duales, efectuar análisis paramétricos, etc. En definitiva, el libro de Ignizio proporciona los instrumentos necesarios para poder operativizar al máximo las técnicas multiobjetivo.

Como se desprende del análisis que estamos efectuando en este apartado, la programación por objetivos constituye una metodología que, encontrándose en un estado de elaboración muy avanzado, ha sido objeto de aplicación a la resolución de algunos problemas planteados en disciplinas muy diversas. Sin embargo, al repasar la bibliografía existente sobre el tema, no se encuentran trabajos en los que se aplique el enfoque multiobjetivo a los problemas relacionados con la programación de actividades agrarias (2). La no aplicación de estas técnicas en el campo agrario resulta más evidente al repasar alguno de los estudios bibliográficos serios que recientemente se han publicado sobre aplicaciones de la programación matemática en el terreno de la planificación agraria, como son

(2) Véase a este respecto un artículo de revisión publicado en 1978 por IGNIZIO [18], en el que figuran referencias de aplicaciones de las técnicas de programación por objetivos a un elevadísimo número de disciplinas. Sin embargo, en dicha revisión no existe referencia expresa de aplicación de estas técnicas en áreas relacionadas con la programación de actividades agrarias.

los que realizaron Boussard [2], Day [9] y Day y Sparling [10], todos ellos publicados en 1977 (estos dos últimos trabajos forman parte de un *survey* sobre métodos cuantitativos en agricultura patrocinado por la American Agricultural Economics Association) (3).

El propósito de este artículo es el de explorar algunas de las posibilidades que ofrecen las técnicas de programación por objetivos como instrumentos válidos para abordar algunos de los problemas que se presentan en el campo de la planificación agraria. Para ello comenzaremos por exponer, de una manera sencilla, las características formales de los modelos multiobjetivo, comparándolos con los modelos de programación clásicos. Finalmente, una vez caracterizado el marco teórico, estudiaremos algunas de las posibilidades que presenta su aplicación en el campo de la planificación agraria.

2. *Estructura formal de un modelo multiobjetivo*

Un modelo de programación por objetivos consiste básicamente en un modelo de programación matemática con varias funciones objetivo que se han escalonado de acuerdo con un determinado esquema de prioridades. El primer paso para formular un modelo multiobjetivo consiste en establecer el conjunto G de objetivos que se desea que el modelo optimice. Dicho conjunto G para un caso de n objetivos será: $G = \{ g_1, g_2, \ldots, g_i, \ldots, g_n \}$. En general, los objetivos pueden ser de tres tipos distintos, como vamos a exponer seguidamente [16, págs. 12 y 13]. En primer lugar, tendremos en cuenta los objetivos que constituyen deseos o aspiraciones del centro decisor, como por ejemplo: la maximización del beneficio, la minimización del riesgo, la maximización del valor añadido, la minimización del coste, etc. En segundo lugar, los objetivos referentes a la existencia de recursos que se encuentran disponibles en cantidades limitadas, como por ejemplo: ciertas materias primas, determinados tipos de mano de obra, recursos financieros, etcétera. Finalmente, todos aquellos objetivos referentes a la satis-

(3) En un artículo publicado en 1979 sobre modelos de programación matemática en agricultura, SCHIEFER [32, pág. 331] apunta de una manera muy breve la posibilidad de emplear el enfoque multiobjetivo en la planificación de actividades agrarias.

facción de cualquier otro tipo de restricción que existan de una manera explícita o implícita, como por ejemplo: el volumen máximo de ventas de un determinado producto, restricciones técnicas en cuanto a la frecuencia de ciertos cultivos en un problema de planificación agraria, etc.

Los objetivos del primer subconjunto, para algunos autores, son los únicos que pasan a formar parte de la función objetivo considerando a los otros dos subconjuntos de objetivos como simples restricciones del modelo. No obstante, en este artículo se seguirá el enfoque más general propuesto por Ignizio que, como veremos más adelante, permite considerar a los tres subconjuntos de objetivos como tales, pasando todos ellos a formar parte de la función objetivo.

Una vez establecido el conjunto de objetivos G el paso siguiente consiste en determinar para cada objetivo un nivel deseado de realización, indicando si se desea que dicho nivel se satisfaga exactamente o bien que se satisfaga por exceso o por defecto. Representaremos por $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_i, \ldots, b_n\}$ dichos niveles de realización.

Seguidamente, se introducen en el modelo las variables de desviación. Estas variables pueden ser negativas (las representamos por n_i) o positivas (las representamos por p_i). Las variables de desviación negativas n_i representan la cuantificación de la falta de logro en el objetivo i-ésimo; es decir, el número de unidades en que no se ha satisfecho el objetivo i-ésimo con respecto al nivel de logro deseado. Las variables de desviación positivas p_i representan exactamente lo contrario; es decir, en cuántas unidades se ha superado el logro del objetivo i-ésimo con respecto al nivel marcado. Por otra parte, conviene observar que para cada objetivo al menos una de las dos variables ha de ser nula. En efecto, puede ocurrir que el objetivo se cumpla exactamente con respecto al nivel de logro, en cuyo caso tanto la variable de desviación positiva como la negativa serán nulas ($n_i=0$, $p_i=0$); o bien, puede ocurrir que el objetivo se satisfaga por exceso, en cuyo caso la variable de desviación negativa será nula ($n_i=0$), o por defecto, en cuyo caso la variable de desviación positiva será nula ($p_i=0$).

En general, el objetivo i-ésimo expresado de forma algebraica será:

$$g_i : f_i(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_m) + n_i - p_i = b_i \qquad [1]$$

siendo:

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_j,\ \ldots,\ x_m$$

las variables de decisión. Si se desea que el objetivo i-ésimo iguale o supere al nivel de logro marcado

$$[f_i(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_j,\ \ldots,\ x_m) \geqslant b_i]$$

la variable negativa n_i deberá tomar el valor más pequeño posible, pues sólo en el caso de que tome el valor cero la realización del objetivo i-ésimo superará al nivel de logro marcado (por tanto, en este caso deberemos proceder a minimizar la variable n_i). Si por el contrario, se desea que el objetivo i-ésimo sea inferior o igual al nivel de logro marcado

$$[f_i(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_j,\ \ldots,\ x_m) \leqslant b_i]$$

la variable positiva p_i deberá tomar el valor más pequeño posible, pues sólo en el caso de que p_i tome el valor cero la realización del objetivo i-ésimo será inferior al nivel de logro marcado (por tanto, en estos casos deberemos proceder a minimizar la variable p_i). Finalmente, si lo que se desea es que el objetivo i-ésimo se satisfaga exactamente con respecto al nivel de logro marcado

$$[f_i(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_j,\ \ldots,\ x_m) = b_i]$$

tanto la variable negativa n_i, como la positiva p_i deberán tomar los valores más pequeños posibles, pues sólo en el caso de que ambas variables tomen valores nulos la realización del objetivo i-ésimo será exactamente igual al nivel de logro marcado (por tanto, en estos casos deberemos proceder a minimizar la suma de las variables $n_i + p_i$).

Conocidos los objetivos, los niveles deseados de realización para cada uno de ellos, así como las variables de desviación que hay que proceder a minimizar el paso siguiente en la formulación del modelo multiobjetivo consiste en la determinación de las prioridades. Esta tarea consiste en asociar a cada objetivo o grupo de objetivos un determinado nivel de prioridad P_k. El primer nivel de prioridad P_1 incluye aquellos objetivos que si no quedan satisfechos producen una solución no realizable. Este tipo de objetivos, que son los que forman la prioridad P_1, se denominan absolutos. Así, por ejemplo, en un problema de planificación la no superación de la capacidad de las instalaciones por parte del plan óptimo podría interesar considerarlo como objetivo absoluto, y, por tanto, incluirlo en la prioridad P_1.

Una vez establecidos los objetivos absolutos que forman la prioridad P_1, se procede a clasificar los demás objetivos por orden de importancia (4). A partir de la relación ordenada de objetivos se realiza una agrupación de los mismos en un número no demasiado elevado de prioridades (algunos autores recomiendan un máximo de cinco prioridades). Conviene observar que excepto en el caso de los objetivos absolutos que forman la prioridad P_1, los demás objetivos que se encuentran situados dentro de un determinado nivel de prioridad deben ser conmensurables. Por otra parte, recordemos que nos estamos refiriendo a una estructura de prioridades tipo Ijiri. Es decir, los objetivos de una cierta prioridad P_k son inconmensurablemente preferidos al logro de cualquier conjunto de objetivos situados en una prioridad inferior P_{k+1}.

Para finalizar la formalización del modelo multiobjetivo deberemos proceder a construir la llamada función de logro, que viene a sustituir el concepto de función objetivo de los modelos clásicos de programación matemática. La función de logro consiste en un vector ordenado cuya dimensión coincide con el número k de niveles de prioridad establecidos por el modelo. Cada componente de dicho vector representa a las variables de desviación (positivas o negativas), que hay que proceder a minimizar para conseguir que los objetivos clasificados dentro de esa prioridad se aproximen lo más posible a los niveles de realización marcados. En lo sucesivo representaremos a la función de logro como:

$$\min \bar{a} = [a_1, a_2, \ldots, a_k] \qquad [2]$$

(4) Una forma de realizar esta clasificación puede ser la de comparar los objetivos de dos en dos. De esta forma se genera una ordenación de los objetivos que será fuerte o débil en el caso de que dos o más de los objetivos resulten indiferentes al centro decisor en cuanto a su importancia. Cada nivel de la ordenación constituye un nivel de prioridad. Un inconveniente de este procedimiento reside en el elevado número de comparaciones a efectuar. Así, si tenemos que agrupar por prioridades m objetivos no absolutos tendríamos que proceder a realizar $m!/2(m-2)!$ comparaciones.

Así, por ejemplo, analicemos el caso de un modelo multiobjetivo en el que existen tres prioridades: P_1, P_2 y P_3. En la primera prioridad, P_1, hay un único objetivo cuya realización debe ser igual o superior al nivel de logro marcado (por la que habría que minimizar la variable de desviación negativa n_1). En la segunda prioridad, P_2, hay dos objetivos, g_2 y g_3, tales que la realización del objetivo g_2 debe ser igual o inferior al nivel de logro marcado (minimizar p_2) y la realización del objetivo g_3 debe ser superior o igual al nivel de logro marcado (minimizar n_3). Finalmente, en la tercera prioridad hay un único objetivo, g_4, cuya realización debe ser exactamente igual a la del nivel de logro marcado (minimizar n_4+p_4). En este ejemplo, de acuerdo con lo indicado anteriormente, la función de logro del modelo sería igual a:

$$\min \bar{a}=[(n_1),\ (p_2+n_3),\ (n_4+p_4)] \qquad [3]$$

Las componentes del vector de logro que tomen el valor cero indicarán las prioridades cuyos objetivos se han satisfecho y las componentes que tomen valores positivos las prioridades cuyos objetivos no se han satisfecho. El valor de las componentes positivas indicarán la cuantificación del grado de no satisfacción de los objetivos correspondientes.

La solución óptima del modelo vendrá dada por el conjunto de valores de las variables de decisión (x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*) que optimicen la función de logro. Diremos que la función o vector de logro $\bar{a}^*$ es óptima cuando no es posible encontrar otro conjunto de valores de las variables de decisión que generen un vector $\bar{a}$ tal que la primera componente del vector $(\bar{a}^*-\bar{a})$ distinta de cero sea positiva. En efecto, si la primera componente del vector $(\bar{a}^*-\bar{a})$ fuera positiva, implicaría que los objetivos de la prioridad correspondiente a dicha componente, posee un grado mayor de realización en la función $\bar{a}$ que en la $\bar{a}^*$, por lo que el vector $\bar{a}$ sería preferido al $\bar{a}^*$.

Conviene indicar que en la construcción de la función de logro, si al centro decisor le parece oportuno, puede asignar factores de ponderación a los objetivos no absolutos situados en una determinada prioridad. Así, por ejemplo, si en la función de logro dada por la expresión [3] el centro decisor considera que dentro de la prioridad P_2 el objetivo g_3 es doblemente importante que el objetivo g_2, la segunda componente del vector $\bar{a}$ pasaría a ser:

$$(p_2+2n_3)$$

Sintetizando al máximo las ideas expuestas en este apartado la estructura formal de un modelo de programación con n objetivos agrupados en k prioridades consiste en encontrar el vector

$$(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_i,\ \ldots,\ x_m)$$

de variables de decisión tal que minimizando la función de logro

$$\bar{a}=(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k)$$

satisface a:

$$f_i(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_i,\ \ldots,\ x_m)+n_i-p_i=b_i \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n \qquad [4]$$

con:

$$x_i,\ n_i,\ p_i\geqslant 0 \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m$$

3. *Programación por objetivos «versus» programación matemática clásica*

Los autores que formularon los primeros modelos de programación por objetivos, tales como Charnes y Cooper [6], Ijiri [20] e incluso Lee [22], consideraron al menos de una manera implícita que estos modelos multiobjetivos consistían simplemente en prolongaciones y extensiones de los modelos de programación lineal. Trabajos posteriores de otros autores, especialmente de Ignizio [16], han venido a demostrar exactamente lo contrario. Es decir, que los modelos de programación matemática, especialmente los lineales, constituyen simples casos particulares de los modelos multiobjetivo (5). En este apartado vamos a tratar de analizar con cierto

(5) Las discusiones establecidas entre reconocidos especialistas sobre este tema no pueden considerarse que estén cerradas. A este respecto, puede consultarse la carta que IGNIZIO [19] en 1980 escribió al aditor del *European Journal of Operational Research*, criticando un trabajo publicado en 1979 por FABOZZI y BACHNER [12] en dicha revista, en el que se considera a la programación por objetivos como una modificación y extensión de la programación lineal.

detalle las conexiones existentes entre los modelos de programación por objetivos y los clásicos de la programación matemática.

En primer lugar, conviene observar que la programación por objetivos de tipo lineal constituye una particularización de los modelos multiobjetivo, tal como fueron planteados en el apartado anterior. El carácter lineal o no lineal de este tipo de modelos viene dado por la forma de las funciones que caracterizan a los objetivos. Así, si todos los objetivos tienen forma lineal, su representación, según la estructura dada por el modelo de la expresión [4], sería:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + n_i - p_i = b_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad [5]$$

donde a_{ij} representa los coeficientes técnicos asociados a las variables de decisión x_j. La estructura dada por [5] corresponde a la de un programa multiobjetivo lineal.

Por tanto, a diferencia de lo que ocurre con la programación matemática clásica en la que el carácter lineal o no lineal de la función objetivo resulta esencial para caracterizar el correspondiente modelo, en la programación multiobjetivo la estructura lineal o no lineal del modelo resulta independiente de las características que posea la función de logro. Esto es así pues la función de logro, tal como la habíamos definido en el apartado anterior, consiste simplemente en un vector ordenado de acuerdo con el sistema de prioridades establecidas.

A continuación, vamos a pasar a analizar cómo un programa lineal clásico consiste en realidad en un modelo de programación multiobjetivo en el que todos los objetivos menos uno se encuentran incluidos en la prioridad P_1, es decir, todos los objetivos del programa menos uno de ellos tienen el carácter objetivos absolutos. El otro objetivo se incluye en la prioridad P_2. Los objetivos que constituyen la prioridad P_1 son las restricciones del modelo lineal y el objetivo que constituye la prioridad P_2 es la función objetivo propiamente dicha del modelo. En efecto, sea el modelo lineal clásico con m variables a optimizar y n restricciones lineales:

Función objetivo:

$$\text{Max} \sum_{j=1}^{m} c_j x_j \qquad [6]$$

Restricciones:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_j \leqslant b_i \qquad i=1, 2, \ldots, n \qquad [7]$$

Dentro del marco teórico expuesto en el apartado anterior, podemos considerar que el conjunto de restricciones [7] son los objetivos absolutos del modelo (nivel de prioridad P_1), por lo que el conjunto homólogo de [7] en un modelo de programación por objetivos del tipo lineal sería:

$$(P_1)\ \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j + n_i - p_i = b_i \qquad i=1, 2, \ldots, n \qquad [8]$$

Por otra parte, la función objetivo del modelo lineal dada por [6] puede expresarse en términos de programación multiobjetivo, como un objetivo no absoluto que forma la prioridad P_2. El elemento homólogo de [6] en un contexto multiobjetivo será, por tanto:

$$(P_2)\ \sum_{i=1}^{m} c_j x_j + n_{n+1} - p_{n+1} = k \qquad [9]$$

siendo k una cota máxima que se establece para el valor óptimo de la función dada por [9]. Así, por ejemplo, si la función objetivo del modelo lineal consiste en la maximización del beneficio de una cierta empresa, el valor de k representaría una cota de beneficio que con toda seguridad no puede ser alcanzada por ningún plan de producción que tenga que satisfacer a las restricciones impuestas por el modelo.

Finalmente, como la realización de los objetivos del nivel P_1 ha de ser menor o igual que el nivel marcado (es decir, habrá que minimizar las variables de desviación positivas) y el objetivo que forma el nivel P_2 ha de realizarse a un nivel mayor o igual que el marcado (es decir, habrá que minimizar la variable de desviación negativa), la función de logro del modelo multiobjetivo será igual al vector ordenado:

$$\min \bar{a} = \left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \right), \quad (n_{n+1}) \right\} \qquad [10]$$

Por tanto, resumiendo las ideas que acabamos de exponer, un modelo de programación lineal general como el dado por las expresiones [6] y [7], es homólogo a la estructura multiobjetivo dada por la expresión [10] como función de logro y por las expresiones [8] y [9] como condiciones a satisfacer.

Si el problema analizado consistiera en encontrar un mínimo en vez de un máximo, la estructura del modelo multiobjetivo sería la misma que acabamos de exponer, introduciendo dos modificaciones. Así, la segunda componente de la función de logro vendría dada por p_{n+1} en vez de n_{n+1} y en la prioridad P_2 en vez de establecer una cota máxima k se establecería una cota mínima k'. Por otra parte, si las restricciones del modelo lineal clásico en vez de ser del tipo menor o igual fueran del tipo mayor o igual, la estructura del modelo multiobjetivo sería la inicialmente planteada, sin más que poner como primera componente de la función de logro $\sum_{i=1}^{n} n_i$ en vez de $\sum_{i=1}^{n} p_i$.

La homología que hemos establecido entre programas lineales clásicos y programas multiobjetivos de tipo lineal, puede establecerse de igual manera y con toda sencillez entre otros tipos de modelos de programación matemática (programación cuadrática, no lineal, etc.) y sus correspondientes homólogos en un contexto multiobjetivo. Por tanto, podemos concluir este apartado afirmando que, en rigor, los modelos de programación matemática clásica constituyen casos particulares de una estructura más amplia que los abarca, y que es precisamente la que forman los modelos de programación multiobjetivo.

4. *Algunos comentarios a los algoritmos de resolución*

Los modelos de programación por objetivos, aunque sean de tipo lineal, si se formulan de acuerdo con una estructura de prioridades excluyentes, no se pueden resolver por aplicación directa del algoritmo clásico del simplex de la programación lineal. Obviamente, al consistir la función de logro únicamente en un vector ordenado de acuerdo con el sistema de prioridades establecido, resulta totalmente imposible aplicar de una manera inmediata la mecánica del simplex, que está concebida para funciones objetivo, que sean a su vez funciones lineales de las variables de decisión.

El primer algoritmo que se utilizó para resolver programas multiobjetivos lineales, consistía básicamente en resolver una secuencia iterativa de problemas de programación lineal clásica. El primer programa lineal de la secuencia tiene por función objetivo la minimización de la primera componente del vector de logro, sujeta a las restricciones (igualdades) correspondientes a la prioridad P_1 de objetivos absolutos. Resuelto el programa, se obtiene un primer conjunto de valores para las variables de decisión, así como los valores de las variables de desviación correspondientes a la prioridad P_1. El segundo programa lineal de la secuencia tiene por función objetivo la minimización de la segunda componente del vector de logro, sujeta a las restricciones correspondientes a las prioridades P_1 y P_2, así como a los valores de las variables de desviación de la prioridad P_1 obtenidos en la anterior programación. El procedimiento iterativo se continúa, hasta formular el último programa lineal, cuya función objetivo consiste en minimizar la última componente del vector de logro, sujeta a las restricciones correspondientes a todas las prioridades, así como a los valores de las variables de desviación de las $k-1$ prioridades primeras, obtenidas a través del proceso iterativo. La resolución del último programa nos proporciona la solución óptima del programa multiobjetivo inicialmente planteado (6).

El procedimiento que acabamos de exponer ha sido aplicado profusamente hasta hace relativamente pocos años, proporcionando resultados bastante aceptables. No obstante, este algoritmo iterativo es bastante burdo, exigiendo su aplicación la realización de una elevada cantidad de cálculos. En efecto, para aplicar este método es necesario resolver tantos programas lineales como niveles de prioridad tenga el modelo multiobjetivo. El número de variables de los diferentes programas varía, desde un número igual al de objetivos de la prioridad P_1 en la primera programación, hasta un número de variables igual al total de objetivos del modelo más el número de componentes de la función de logro. Así, por ejemplo, para un modelo multiobjetivo con doce objetivos agrupados en cuatro prioridades, la aplicación de este algoritmo iterativo obligaría a resolver cuatro programas lineales, teniendo el último de ellos dieciséis

(6) Un tratamiento más refinado desde el punto de vista teórico de este procedimiento iterativo puede verse en el trabajo de DAUER y KRUEGER [11].

restricciones (los doce objetivos más las cuatro componentes de la función de logro).

Los inconvenientes operativos que presenta la aplicación del método iterativo llevó a algunos autores, Lee [22] e Ignizio [16], principalmente, a construir variantes del algoritmo del simplex que permitan abordar la resolución de programas multiobjetivos lineales. Estos algoritmos permiten resolver los programas multiobjetivos lineales de una sola vez, lo que supone un gran ahorro de cálculos. Este tipo de algoritmos pueden programarse en computador con relativa facilidad. El trabajo pionero en este campo es el programa escrito en FORTRAN por Lee [22, págs. 140-157]. Dentro de esta línea cabe citar el programa escrito en FORTRAN por Bershader [1] y recogido por Ignizio [16, págs. 234-242].

En el terreno de la programación multiobjetivo no lineal, hasta mediados de los años setenta no se publicó ningún algoritmo que permitiera abordar la resolución de este tipo de problemas de una manera satisfactoria. Así, Ignizio, en 1976 [16, capítulo 6], presenta el primer tratamiento serio, desde un punto de vista algorítmico, de la programación por objetivos en contextos no lineales. En este trabajo [16, apéndice] se presenta también un programa de computador escrito en FORTRAN por Gochnour y Philips [14], que permite resolver programas multiobjetivos no lineales que tengan un máximo de veinticinco variables de decisión y veinticinco objetivos. No obstante, tanto el número de variables de decisión como de objetivos pueden aumentarse considerablemente por medio de redimensionamientos del programa. En resumen, puede indicarse que en la actualidad, aun no estando resuelto de una manera totalmente satisfactoria el problema de la resolución de los programas multiobjetivos no lineales, existen algoritmos y programas de computador que permiten abordar el problema siempre que la dimensión de los programas no resulte excesiva.

En lo referente a los programas multiobjetivos lineales con variables enteras, los primeros intentos de construcción de algoritmos de resolución se realizaron, adaptando los algoritmos empleados en la programación lineal clásica con variables enteras al caso de los programas con varios objetivos. Estos procedimientos homólogos que son fundamentalmente la introducción como objetivos de planos de corte (método tipo Gomory) y variantes de las técnicas *branch and bound*, no han dado buenos resultados en un contexto multiobjetivo, especialmente cuando la dimensión del programa es muy grande. Por el contrario, está resultando de mucha eficacia la aplicación en este contexto de algoritmos de tipo heurístico, que aunque no garantizan un óptimo, la solución encontrada por el algoritmo en la mayor parte de los casos se encuentra muy próxima al óptimo buscado (7).

Finalmente, indicaremos que se han desarrollado técnicas de análisis de sensibilidad y algoritmos de programación multiobjetivo paramétrica en contextos lineales que resultan homólogos a los que existen en el campo de la programación lineal clásica. De esta manera, se puede analizar la influencia que tiene en el valor de las variables de decisión cambios producidos en los niveles de logro de los objetivos, o en la estructura de las prioridades, o en los niveles de recursos disponibles, etc. Indudablemente, la realización de este tipo de análisis proporciona una información que resulta de gran utilidad al centro decisor.

5. *La planificación de cultivos como un problema de programación multiobjetivo*

Las aplicaciones de la programación lineal al campo de la economía agraria comenzaron a desarrollarse en la década de los años cincuenta, siguiendo fundamentalmente dos líneas de acción. La primera línea consistía en la formulación de raciones para el ganado a coste mínimo, y la segunda línea, en la determinación del plan de cultivos óptimo en una empresa agraria. Este segundo problema posteriormente se generalizó al campo de la planificación de actividades agrarias a niveles superiores al de la empresa, como, por ejemplo, al nivel de comarca o región.

La planificación de actividades agrarias en una empresa, por medio de modelos de programación lineal puede resumirse en sus rasgos más básicos de la siguiente manera: El empresario establece

(7) A este respecto puede consultarse un algoritmo heurístico propuesto por IGNIZIO [18] en un contexto de programación de inversiones con objetivos múltiples, en el que las variables de decisión han de ser bivalentes (es decir, han de tomar el valor cero o el valor uno). La solución proporcionada por el algoritmo, según experiencias realizadas por su autor, en el 93 por 100 de las ocasiones coincide con la solución óptima; en las restantes ocasiones la desviación existente entre la solución encontrada y la óptima no supera al 1 por 100.

el conjunto de cultivos posibles, apoyándose para ello en una serie de variables exógenas a su explotación (suelo, clima, etc.). A cada cultivo posible se le asocia una cifra representativa de la utilidad que el cultivo representa para el empresario, usualmente se utiliza como indicador de la utilidad el margen bruto de cada cultivo (producto bruto menos gastos variables). Seguidamente se establecen las variables de decisión x_i que representan las superficies dedicadas a cada cultivo en el correspondiente plan. La función objetivo del programa pretende encontrar el conjunto de valores de las variables de decisión (es decir, el plan de cultivos) que maximiza el margen bruto de la explotación, satisfaciéndose una serie de condiciones. Entre estas restricciones, suelen resultar comunes en la mayor parte de los modelos lineales de planificación de cultivos las siguientes: ocupación de la tierra, frecuencia y sucesión de cultivos, disponibilidades de mano de obra por períodos, disponibilidades de capital circulante, disponibilidades de agua de riego, etc.

El modelo lineal de planificación de cultivos que acabamos de esbozar someramente está formulado en un contexto de certidumbre pura; es decir, de conocimiento perfecto por parte del empresario de los valores que van a tomar en el futuro las variables económicas que van a influir en la programación de los cultivos. Este modelo ha sido desarrollado posteriormente tanto en el sentido de la incertidumbre como en el del riesgo. En contextos de incertidumbre o de desconocimiento pleno del valor futuro de las variables económicas, el problema de la planificación de cultivos se ha abordado por medio de la teoría de juegos de estrategia (concretamente juegos contra la naturaleza), así como por medio de la técnica del *maximin programming* elaborada por McInerney [27] en 1967, y que en esencia consiste en una especie de fusión de la programación lineal y de la teoría de juegos. Por otra parte, la planificación de cultivos en contextos de riesgo o de conocimiento del valor futuro de las variables económicas en términos de probabilidad comenzó a desarrollarse apoyándose en las técnicas del *portfolio selection* de Markowitz [29, 30]. Del enfoque de Markowitz surgen una serie de métodos que permiten dar un tratamiento bastante correcto al riesgo, como son las técnicas propuestas por Freund [13], Boussard y Petit [3], etc.

Los modelos de planificación de cultivos formulados en base a la metodología propia de la programación matemática han resultado ser muy eficaces en muchas de las aplicaciones prácticas que se han hecho de los mismos. No obstante, desde mediados de los años 60 se han publicado bastantes trabajos en los que se señalan debilidades que presentan estos modelos que, en ocasiones, limitan considerablemente su validez pragmática (8).

Una de las principales debilidades de este tipo de modelos reside en la formulación de funciones objetivos. Esta función, tanto en los problemas de programación a nivel de empresa como de entes mayores (comarcas, regiones, etc.) se construye en base a un único objetivo que posteriormente se optimiza. Esta forma de proceder aleja considerablemente a estos modelos de las áreas de la realidad que pretenden describir o reflejar. En efecto, tal como habíamos comentado en el § 1 de este trabajo los centros de decisión no buscan, en la mayor parte de los casos, la optimización de un único objetivo, como pretenden los modelos que estamos comentando, sino la optimización o satisfacción, en la medida de lo posible, de un conjunto de ellos. Por esta razón pensamos que los modelos de planificación de cultivos podrían superar algunas de sus debilidades, ganando considerablemente en realismo, si se trasladaran al marco multiobjetivo que hemos venido exponiendo a lo largo de este artículo.

Seguidamente pasamos a presentar, a título de ejemplo, un posible esquema de modelo de planificación de cultivos dentro de un enfoque multiobjetivo, en el que el centro decisor no es un empresario privado, sino un órgano público de planificación. Con arreglo a la estructura expuesta en el § 2 de este artículo comenzaremos por definir los objetivos que se desea que el modelo optimice. Los objetivos, que suponemos que en este ejemplo el centro decisor desea alcanzar son los que a continuación se indican, sin que el orden de exposición suponga ningún tipo de preferencia. Así, tenemos:

Objetivo g_1. Conseguir que el margen bruto global del plan de cultivos alcance como mínimo una cota de M unidades monetarias. Si designamos por m_j el margen bruto del j-ésimo cultivo, la representación del objetivo g_1 en el caso de que existan m cultivos vendrá dado por:

(8) El trabajo de revisión publicado por BOUSSARD en 1977 [2] proporciona una idea bastante clara de las limitaciones que en la actualidad presentan estos modelos.

$$\sum_{j=1}^{m} m_j x_j + n_1 - p_1 = M \qquad [11]$$

Objetivo g_2. Conseguir que el valor añadido generado por el plan de cultivos alcance como *mínimo* una cota de V unidades monetarias. Si designamos por v_j el margen bruto del j-ésimo cultivo, la representación del objetivo g_2 vendrá dada por:

$$\sum_{j=1}^{m} v_j x_j + n_2 - p_2 = V \qquad [12]$$

Objetivo g_3. Conseguir que el número de jornales generado por el plan de cultivos alcance como mínimo una cota de W unidades. Si designamos por w_j el número de jornales generados por el cultivo j-ésimo, la representación del objetivo g_3 vendrá dada por:

$$\sum_{j=1}^{m} w_j x_j + n_3 - p_3 = W \qquad [13]$$

Objetivo g_4. Minimizar el riesgo del plan de cultivos. Si designamos por σ_{jj} la varianza de los rendimientos del cultivo j-ésimo, la representación del objetivo g_4 vendrá dada por:

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \sigma_{jk} x_j x_k + n_4 - p_4 = 0 \qquad [14]$$

La estructura de la expresión [14] merece algún comentario adicional. Al venir medido en riesgo por la varianza de los rendimientos, el valor mínimo del riesgo del plan de cultivos será cero, pues, como es sabido, la varianza ha de ser siempre mayor o igual que cero. Por esta razón, la expresión [14] indica el deseo por parte del centro decisor de minimizar el riesgo del plan de cultivos. Dicho valor mínimo se alcanzaría en el hipotético caso de que [14] se hiciera cero, es decir, en el caso de que la variable de desviación positiva P_4 se anulara. Por otra parte, conviene tener en cuenta que el objetivo dado por [14] es de tipo cuadrático, por lo que su inclusión conducirá a un modelo multiobjetivo no lineal.

Por otra parte, y con objeto de simplificar la exposición, englobaremos todas las restricciones propias de un modelo de planificación de cultivos (ocupación de la tierra, disponibilidades de mano de obra, etc.) en un objetivo que representaremos por g_5 y que, en realidad, está formado por tantos objetivos como restricciones técnicas tenga el modelo. Si representamos por a_{ij} los coeficientes técnicos asociados a las variables de decisión x_j, y suponemos que dentro del objetivo g_5 existen $n-4$ restricciones, la representación de dicho objetivo vendrá dada por:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i + n_i - p_i = b_i \qquad j=5, \ldots, n \qquad [15]$$

Una vez enunciados y representados los objetivos, pasamos a establecer la estructura de prioridades del modelo. Como primer paso, y con objeto de simplificar la exposición, vamos a suponer que todos los objetivos (restricciones) del grupo g_5 son absolutos, por lo que pasan a formar parte de la prioridad P_1. La siguiente prioridad en orden de importancia, es decir, la P_2, suponemos que está formada por el objetivo g_3 referente al empleo. La prioridad P_3 la constituyen los objetivos g_1 y g_2, referentes al margen bruto y al valor añadido, considerando el centro decisor que dentro de esa prioridad del objetivo g_2 tiene el doble de importancia que el g_1. Finalmente, la última prioridad, es decir, la P_4, está formada por el objetivo g_4 referente a la minimización del riesgo del plan de cultivos.

Al existir cuatro niveles de prioridad, la función de logro tendrá cuatro componentes. Dichas componentes, en el supuesto de que las restricciones que conforman el objetivo g_5 y, por tanto, la prioridad P_1 sean todas del tipo menor o igual, serán:

$$\min \bar{a} = \left\{ \left(\sum_{i=5}^{n} P_i \right), (n_3), (n_1+2n_2), (p_4) \right\} \qquad [16]$$

El plan de cultivos óptimo se obtendrá por minimización de [16] de forma que se satisfagan en la medida de lo posible los objetivos anteriormente expuestos. En el cuadro I figura resumida la estructura del modelo multiobjetivo del ejemplo que acabamos de exponer.

Aplicando el algoritmo de cálculo y la rutina de computador apropiada al programa multiobjetivo anterior se obtendría el plan de cultivos óptimo

$$(x_1{}^*, x_2{}^*, \ldots, x_j{}^*, \ldots, x_m{}^*)$$

que optimiza la función de logro. Supongamos que para la solución óptima la función de logro fuera igual a:

$$\bar{a}^* = (0, W_1, 0, R) \qquad [17]$$

La interpretación del vector dado por [17] sería la siguiente: Los objetivos de la primera prioridad P_1 (es decir, las restricciones típicas de los modelos lineales clásicos) se han satisfecho plenamente. En cuanto al objetivo de la prioridad P_2, consistente en conseguir que el plan de cultivos generara W jornales, no se ha podido cubririr en su totalidad. En efecto, al tomar la desviación negativa n_3 (número de jornales que no se han creado con respecto al objetivo propuesto) un valor de W_1 unidades, nos indica que el plan de cultivos óptimo sólo ha creado W-W_1 jornales. Los objetivos de la prioridad P_3, referentes a conseguir un plan de cultivos que tuviera un margen global mínimo de M unidades monetarias y un valor añadido global mínimo de V unidades monetarias se ha satisfecho plenamente. Si se han superado o no los niveles marcados nos los indicarán el valor de las variables de desviación positivas P_1 y P_2. Si alguna de estas variables toma en el óptimo un valor mayor que cero, este valor nos indicará en cuánto se ha sobrealcanzado el objetivo correspondiente con respecto al nivel mínimo. Finalmente, en lo referente a la prioridad P_4 que incluye el objetivo de riesgo mínimo, podemos indicar que la varianza de los rendimientos del plan de cultivos óptimo es de R unidades.

CUADRO I

Función de logro:

$$\min \bar{a} = \left\{ \left(\sum_{i=5}^{n} P_i \right), (n_3), (n_1 + 2n_2), (p_4) \right\}$$

Objetivos:

$$\sum_{j=1}^{m} m_j x_j + n_1 - p_1 = M$$

$$\sum_{j=1}^{m} v_j x_j + n_2 - p_2 = V$$

$$\sum_{j=1}^{m} w_j x_j + n_3 - p_3 = W$$

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \sigma_{jk} x_j x_k + n_4 - p_4 = 0$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j + n_i - p_i = b_i \qquad i = 5, \ldots, n$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad n_i \geqslant 0, \qquad p_i \geqslant 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, m \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

El modelo que acabamos de plantear ganaría considerablemente en utilidad y capacidad explicativa si se efectuara un análisis de sensibilidad del mismo o se procediera a plantear el modelo en un contexto de programación paramétrica. De esta forma, se podría dar respuestas a preguntas del centro decisor tales como:

¿Qué efecto produciría en el plan de cultivos cambios en los niveles de logro de los objetivos?

¿Qué nivel de sensibilidad tiene el plan de cultivos óptimo a cambios en la estructura de prioridades?

¿Qué efectos producirían cambios en los niveles de recursos disponibles?

Finalizamos este trabajo indicando que del análisis efectuado puede desprenderse que el enfoque proporcionado por la programación multiobjetivo constituye, en comparación con el enfoque de la programación matemática clásica, un marco teórico que permita analizar con más precisión y realismo el problema de la planificación de cultivos. Además, con este nuevo enfoque se consiguen superar algunas de las debilidades que presentan los modelos clásicos basados en funciones uniobjetivo.

BIBLIOGRAFIA

[1] BERSHADER, P. S. (1975): *Linear Goal Programming Package*, en IGNIZIO, J. P.: *Goal Programming and Extension* (1976). Apéndice, Lexington Books.

[2] BOUSSARD, J. M. (1977): «Estudios de Programación Lineal Aplicada al Sector Agrario en Países no Socialistas»: una Revisión. *Agricultura y Sociedad*, núm. 5, págs. 9-49.

[3] BOUSSARD, J. M.; PETIT, M. (1967): «Representation of Farmer's Behaviour under Uncertainty With a Focus Loss Constraint», *Journal of Farm Economics*, vol. 49, págs. 869-880.

[4] BUSSEY, L. E. (1978): *The Economic Analysis of Industrial Projects*, Prentice-Hall.

[5] CAMPELL, H.; IGNIZIO, J. P. (1972): «Using Linear Programming for Predicting Student Perfomance», *Journal of Educational and Psychological Measuremtnt*, vol. 32, págs. 397-401.

[6] CHARNES, A.; COOPER, W. W. (1961): *Management Models and Industrial Apications of Linear Programming*, vols. I y II, John Wiley and Sons.

[7] CHARNES, A.; COOPER, W. W.; DEVOE, J. K.; LEARNER, D. B.; REINECKE, W. (1968): «A Goal Programming Model for Media Planning», *Managemement Science*, vol. 14, págs. 423-430.

[8] CHARNES, A.; COOPER, W. W.; LEARNER, D. B.; SNOW, E. F. (1968): «Note on an Application of Goal Programming Model for Media Planning», *Management Science*, vol. 14, págs. 431-436.

[9] DAY, R. H. (1977): *On Economic Optimization: A Nontechnical Survey*, en MARTIN, L. R. (director de la edición), *A Survey of Agricultural Economics Literature*, tomo II, págs. 57-92, University of Minnesota Press.

[10] DAY, R. H.; SPARLING, E. (1977): *Optimization Models in Agricultural and Resource Economics*, en MARTIN, L. R. (director de la edición), *A Survey of Agricultural Economics Literature*, tomo II, págs. 93-129, University of Minnesota Press.

[11] DAUER, J. P.; KRUEGER, R. J. (1977): «An Iterative Approach to Goal Programming», *Operational Research Quaterly*, vol. 28, págs. 671-681.

[12] FABOZZI, F. J.; BACHNER, A. W. (1979): «Mathematical Programming Models to Determine Civil Service Salaries», *European Journal of Operational Research*, vol. 3, págs. 190-198.

[13] FREUND, R. J. (1956): «The Introduction of Risk into a Programming Model», *Econometrica*, vol. 21, págs. 253-263.

[14] GOCHNOUR, J. R.; PHILLIPS, O. O. (1975): *Modified Pattern Search for Nonlinear Goal Programming. Computer Code*, en IGNIZIO, J. P.: *Goal Programming and Extensions* (1976). Apéndice. Lexington Books.

[15] HAWKINS, C. A.; ADAMS, R. A. (1974): «A Goal Programming Model for Capital Budgeting», *Financial Management*, vol. 3, págs. 52-57.
[16] IGNIZIO, J. P. (1976): *Goal Programming and Extensions*, Lexington Books.
[17] IGNIZIO, J. P. (1976): «An Approach to the Capital Budgeting Problem with Multiple Objectives», *The Engineering Economist*, vol. 21, páginas 259-272.
[18] IGNIZIO, J. P. (1978): «A Review of Goal Programming: A Tool for Multiobjetive Analysis», *Journal of the Operational Research Society*, volumen 27, págs. 1109-1119.
[19] IGNIZIO, J. P. (1980): «Letter to the Editor», *European Journal of Operational Research*, vol. 4, pág. 64.
[20] IJIRI, Y. (1965): *Management Goals and Accounting for Control*, Rand-McNally. Existe traducción española con el título *Análisis de Objetivos y Control de Gestión*, en Ediciones ICE (1976).
[21] KLAHR, C. N. (1958): «Multiple Objetives in Mathematical Programming», *Operations Research*, vol. 6, págs. 849-855.
[22] LEE, S. M. (1972): *Goal Programming for Decision Analysis*, Auerbach Publishers.
[23] LEE, S. M.; CLAYTON, E. R. (1972): «A Goal Programming Models in Educational Planning», *Management Science*, vol. 18, págs. 395-408.
[24] LEE, S. M.; LERRO, A. J. (1974): «Capital Budgeting for Multiple Objetives», *Financial Managements*, vol. 3, págs. 58-66.
[25] LEE, S. M.; MOORE, L. J. (1973): «Optimizing Transportation Problems with Multiple Objetives», *AIEE Transactions*, vol. 5, págs. 333-338.
[26] LORIE, J. H.; SAVAGE, L. J. (1955): «Three Problems in Rationing Capital», *Journal of Bussines*, vol. 28, págs. 229-239.
[27] MCINERNEY, J. P. (1967): «Maximin Programming. An Approach to Farm Planning», *Journal of Agricultural Economics*, vol. 18, págs. 269-278.
[28] MAO, J. C. T. (1969): *Quantitative Analysis of Financial Decisions*. The Macmillan Company. Existe traducción española con el título *Análisis Financiero*, en Editorial «El Ateneo» (1975).
[29] MARKOWITZ, H. (1952): «Portfolio Selection», *Journal of Finance*, vol. 7, págs. 82-92.
[30] MARKOWITZ, H. (1959): *Portfolio Selection*, John Wiley and Sons.
[31] ROSS, G. T.; SOLAND, R. M. (1980): «A Multicriteria Approach to the Location of Public Facilities», *European Journal of Operational Research*, vol. 4, págs. 307321.
[32] SCHIEFER, G. (1979): «Mathematical Programming Models as Tools for Centralized Planning in Decentralized Decisions Situations: A Critical Examination of the Reliability of Agricultural Sector Models as a Basis for Policy Decisions», *European Review of Agricultural Economics*, vol. 6, págs. 319-336.
[33] SCHROEDER, R. G. (1974): «Resource Planning in University Management by Goal Programming», *Operations Research*, vol. 22, págs. 700-710.
[34] WEINGARTNER, H. M. (1963): *Mathematical Programming and the Analysis of Capital Budgeting Uroblems*, Prentice-Hall.

RESUMEN

El presente trabajo pretende explorar las posibilidades que ofrecen las técnicas de programación por objetivos como instrumentos válidos para abordar algunos de los problemas que se presentan en el campo de la planificación agraria. En primer lugar, se esboza

un breve bosquejo histórico de las técnicas de programación multiobjetivo, comentando sus orígenes, así como los trabajos más representativos en este campo, tanto desde un punto de vista teórico como aplicado. Seguidamente, se expone la estructura formal de un modelo multiobjetivo, comparándola con la estructura clásica de los modelos de un solo objetivo basados en las técnicas convencionales de la programación matemática. Una vez realizados unos breves comentarios sobre aspectos puramente algorítmicos, se pasa a presentar, apoyándose para ello en un ejemplo, la estructura de un modelo de planificación de cultivos dentro de un enfoque multiobjetivo, realizando las oportunos comparaciones con los modelos clásicos de un solo objetivo.