

## TEMAS Y POLEMICAS

*Abre hoy esta nueva Sección la REVISTA DE ECONOMÍA POLÍTICA con idéntico fin instrumental que anima a las restantes que desgranar el contenido de cada número: el procurar los medios precisos para cimentar una sólida cultura económica en España.*

*Gran parte de los temas económicos —a la cabeza las cuestiones fundamentales de concepto y método— han pasado en época reciente por la fase crítica de la polémica y la controversia públicas. No siempre de éstas salió la luz, quizás porque los debates fueron más monólogo que diálogo. Pero si el lector, poseído de actitud científica, entra en el seno de la discusión no saldrá de ella sin fruto. Verá sentadas las posiciones, tensados los argumentos, esparcida la crítica sobre los puntos esenciales. Contemplar los temas económicos desde tal cota polémica sugestionará, sin duda, la inteligencia del lector, reafirmando el saber adquirido y colocándolo en el rumbo depurador de la crítica.*

*Procurar la contemplación —bajo esta especial perspectiva del debate— de los temas económicos es, pues, el objetivo de esta Sección. El afán de la REVISTA será llenarla de contenido eficaz: procurando atinar con la elección de las controversias que merezcan el tiempo que el lector gaste en su estudio.*

### UNA DISCUSION SOBRE EL METODO MATEMATICO EN ECONOMIA

Se inicia con la polémica de que ha dado cuenta la "Review of Economics and Statistics", en su número de noviembre de 1954.

La aplicación de las Matemáticas a las Ciencias Sociales ha ido adquiriendo tal intensidad, en el campo concreto de la Economía, que la convierten en el tema metodológico de más relieve en los

últimos años; la utilización de las matemáticas ha cambiado el *cariz de las revistas profesionales, de los ensayos sobre temas económicos concretos, del enfoque de las cuestiones de economía aplicada, de los "Manuales" introductorios, en fin.*

Esta acelerada penetración de las Matemáticas en Economía ha producido una escisión inevitable: la de aquellos economistas que, conocedores del instrumento matemático, lo aplican con utilidad en su propia investigación o para el entendimiento de las ajenas; de los economistas que, sin conocimientos de Matemáticas, no renuncian al ejercicio de su profesión operando con ayuda de la lógica ordinaria. Una barrera cada vez más elevada —constituída por la intensiva aplicación de las Matemáticas— separa a ambos grupos.

Y como, entre otras cosas —según advirtió Willard Gibbs—, "las Matemáticas son un lenguaje", una confusión babilónica amenaza a la construcción de la torre de la Economía moderna, en la que será imposible progresar en el futuro, si no se resuelve el problema básico del mutuo entendimiento de sus constructores.

Esta razón ha vuelto a plantear de nuevo, con intensidad y relieve incomparables a otras épocas, la cuestión —casi clásica— del empleo de las Matemáticas en la Economía.

La "Review of Economics and Statistics" invitó a discutir el tema a destacadas personalidades de nuestra Ciencia, dirigiendo el original debate, que a continuación se inserta, una de las mejores cabezas que actualmente cultivan la Economía: Paul Anthony Samuelson, Profesor de Economía del "Massachusetts Institute of Technology" y autor de dos libros básicos: "Economics: an Introductory Analysis" —quizás el mejor "Manual" de iniciación hoy— y "Foundations of Economic Analysis", premio (1941) D. A. Wells de Investigación Económica.

Abre la controversia el artículo de D. Novick, que constituye la base de la misma y que se mueve en un sentido de abierta censura contra la aplicación de la Matemática a la Ciencia Económica. Samuelson ordena y presenta las comunicaciones enviadas por destacados economistas: Klein, Duesenberry, Chipman, Tinbergen, Champernowne, Solow, Dorfman y Koopmans, que contemplan el

problema bajo sus múltiples perspectivas a raíz de la crítica inicial de Novick. El editor Harris cierra el debate con una sustanciosa reviviscencia de textos clásicos sobre el tema.

Aunque —con un sentido ampliamente deportivo— Samuelson da el “tanteo” del encuentro, el lector debe presenciar detenidamente el debate y obtener su particular conclusión. Para ello le invitamos a que siga leyendo (\*).

\* \* \*

## MATEMATICAS: LOGICA, CANTIDAD Y METODO

*David Novick*

Ha sido corriente durante mucho tiempo, en aquellos que poseen una suficiente preparación matemática, la expresión de sus ideas mediante símbolos algebraicos. Este método de expresión se ha utilizado a veces en Economía, pero durante los últimos quince años, y en especial desde 1945, las Matemáticas se han empleado cada día más, como medio de exposición en las ciencias sociales. El resultado ha sido muy desafortunado.

El científico social medio, sin preparación en Ciencias Matemáticas o Físicas, pero que en algún momento de su educación ha cursado Algebra o Geometría, asocia inmediatamente el uso corriente de notaciones, con símbolos en forma de una ecuación, a los postulados, teoremas, axiomas, que estudió en el Bachillerato. Por esta razón supone que la presentación de un concepto económico-social en términos como  $X_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} X_j = Y_i$  significa:

a) Que la ecuación es correcta matemáticamente, esto es, puede ser probada, de forma similar a las estudiadas por él, en Algebra y Geometría.

b) Que la ecuación es lógicamente consistente y, por consiguiente, representa algo que debería ser reconocido y aceptado.

---

(\*) La versión e interpretación del texto original ha sido realizada por AGUSTÍN COTORRUELO SENDAGORTA.

c) Que la expresión algebraica significa que los datos cuantitativos están disponibles en la realidad y pueden emplearse de acuerdo con el concepto matemático establecido.

Por desgracia, lo que el científico social o el economista medio atribuye a estas notaciones, se reduce en muchos casos a esperanzas de los expositores más que a realidades de la situación.

Las Matemáticas se utilizan principalmente en las ciencias sociales, como en la Química o Física teórica, y no como se aplican en la mecánica e ingeniería corrientes los resultados matemáticos de la teoría probados por la estadística en Física o Química. El uso normal del lenguaje matemático en las ciencias sociales es, en gran parte, una forma de taquigrafía intelectual, y no demuestra de ninguna manera que los métodos seguidos hasta hoy con tanto éxito, en las Ciencias Físicas, se hayan adaptado repentinamente a las sociales. Para el científico, físico o natural, o para el que esté bien entrenado en Matemáticas, este nuevo lenguaje no es impresionante ni aterrador porque considera lo escrito estrictamente como teoría. Gracias a su conocimiento, identifica el primer paso en el proceso investigador como la expresión de un teorema, que es seguido de la comprobación cuantitativa o estadística esencial para la aplicación de la teoría. Igualmente, el iniciado sabe que los datos cuantitativos del tipo necesario para que la prueba tenga éxito, o para la aplicación de la teoría, pueden no hallarse jamás disponibles en la realidad; o aunque se obtengan algunos datos, la forma de compilarlos requiere, quizás, la introducción de tantas consideraciones adicionales que hagan el cálculo prácticamente imposible, incluso con material electrónico u otros adelantos modernos. Es decir, que la teoría puede ser interesantísima, susceptible de pruebas de "juguete", pero inadaptable totalmente a los hechos del mundo real.

Desgraciadamente, los no iniciados en las Matemáticas saltan de la teoría a la prueba, y de ésta a la aplicación, sin percatarse de los pasos intermedios que generalmente deben seguirse. Es hora de discutir a fondo estas limitaciones de las expresiones matemáticas que se emplean cada vez con más frecuencia en las ciencias sociales. De ningún modo pretendo que se abandonasen los intentos de ordenar los fenómenos sociales de forma que sean susceptibles de cálculo matemático y, por consiguiente, de una aplicación más ge-

neral y uniforme. Sin embargo, sería prudente que aquellos que no incluyen entre sus métodos de lógica las Matemáticas, sepan que no existe ninguna diferencia fundamental entre el uso de letras griegas, ordenadas en forma algebraica, y el empleo de palabras combinadas en forma de frases y párrafos. Análogamente, en la mayor parte de los casos, las deducciones de los datos cuantitativos o estadísticos, resultarán tan lógicas utilizando la Aritmética como el cálculo y las Matemáticas superiores. Por cualquier método, las proposiciones de utilidad general deben seguir el camino normal de la investigación, es decir, la observación y el subsiguiente establecimiento de la teoría, con la esperanza de que en último término dicha teoría será corroborada con estadísticas, y quizás ulteriormente consiga una utilidad general, gracias a la introducción del método matemático. Teniendo esto presente, deberíamos considerar los esfuerzos actuales para aplicar las Matemáticas a la Economía y a las ciencias sociales, como una simple adición a la esotérica de las Ciencias.

La riqueza de las ciencias sociales se deriva hoy, principalmente, del estímulo que representa para el pensamiento, el hecho de que poco o nada, en los teoremas actuales, es susceptible de prueba absoluta; por consiguiente, no pueden aceptarse sin discusión. Existe una tendencia a suponer que, al expresar esas mismas teorías en forma matemática, se crea un conocimiento absoluto y se elimina la controversia. En realidad, aquellos que tenemos sólo un entrenamiento limitado y una experiencia aún más escasa en matemáticas, estamos con mucha frecuencia intimidados por los símbolos y temerosos de discutirlos para no pasar por el apuro de manifestar nuestra ignorancia. Esto es una lástima, puesto que el empleo de las Matemáticas como una forma de comunicación no da mayor entereza a las ideas que el procedimiento verbal, el más típico, hasta hoy, de las ciencias sociales.

El creciente número de científicos sociales, con preparación matemática aumenta la importancia de esta experiencia en los momentos actuales. En tanto que la exposición verbal de las ideas y su interpretación permitían su lectura y discusión, la tendencia presente de las Matemáticas como lenguaje ha separado a una gran parte de los economistas, debido a la diferente capacidad para leer o comprender gran parte del pensamiento nuevo. El aspecto

más desagradable de esto ha sido que aquéllos que cuentan con preparación matemática han establecido un refugio precario donde todos viven, alimentándose de sus mutuas ideas, y aquél que desde el exterior estuviere en condiciones de señalar las limitaciones intelectuales de este género de existencia, ha sido separado de ellos por la barrera del lenguaje.

Es hora, por consiguiente, de que nos percatemos de la diferencia entre las matemáticas como lenguaje y como un método cuantitativo tal como se emplea en las ciencias físicas y naturales aplicadas. No es imposible que algún día los métodos matemáticos puedan aplicarse a la actividad económica y social. Sin embargo, ese día parece lejano, y mientras tanto, los que sólo poseen una experiencia y unos conocimientos limitados de matemáticas o de ciencias físicas y naturales, deben tratar los modelos y otras formas de expresión matemática como lo que son, es decir, como nuevos esfuerzos interesantes y, fundamentalmente, nada más que eso. Será también muy provechoso que los que utilicen el lenguaje matemático empleen mayor tiempo y trabajo en reproducir, tanto la teoría como los datos, en forma literaria, con lo cual podrán estudiar, y se beneficiarán de ello, un grupo más numeroso de economistas.

## LAS MATEMATICAS EN LA ECONOMIA

Discusión del artículo de Mr. Novick (\*)

### INTRODUCCION

## LAS MATEMATICAS EN LA ECONOMIA ¿SI O NO?

*Paul A. Samuelson*

El editor Harris me ha proporcionado la diversión de actuar como Maestro de Ceremonias en la controversia suscitada por el ataque de David Novick contra la economía matemática. Siete eco-

---

(\*) El editor solicitó de varios economistas de primer orden que discutiesen el papel de las matemáticas en la economía, ofreciendo el artículo del Doctor Novick como base de la polémica. El Profesor Samuelson aceptó amablemente comentar la serie completa.

nomistas han replicado a Novick, y, de acuerdo con mi cómputo, el tanteo es el siguiente: A favor de Novick, siete  $\epsilon$ s; contra él, ocho menos siete  $\epsilon$ s. (Sólo Solow se niega a conceder ni siquiera un  $\epsilon$ .) Por supuesto, el tanteo se refiere a aquellos que cayeron en el señuelo de Seymour Harris. Uno de los dos que no han respondido a la invitación hubiera superado en vehemencia a los siete defensores de las matemáticas.

¿En qué orden colocaré las respuestas? Puesto que Lawrence Klein se enfrenta con la oculta premisa principal que yace bajo las afirmaciones de Novick (Axioma básico: la economía matemática es y ha sido estéril para la ciencia económica), le pondré el primero. Como James Duesenberry y John Chipman, revelan una gran simpatía por la opinión de que debería dedicarse mayor atención a la investigación empírica, aun a costa del esfuerzo teórico, situaré sus artículos a continuación (1).

Después, para contrapesar la docta digresión de Jan Tinbergen sobre cuestiones metodológicas sustantivas y los consejos de David Champernowne sobre presentación de originales, seguirán las reflexiones de Robert Solow acerca de las relaciones adecuadas entre los economistas matemáticos y los literarios. (Mi diccionario define "economista literario", como "eufemismo para designar al economista no matemático".)

Robert Dorfman y Tjalling Koopmans han restado tiempo de sus investigaciones en la frontera de la ciencia económica para salir al paso de algunos errores que creen ver en las afirmaciones de Novick. Sus aportaciones quizás demuestran que los eslabones de la controversia no siguen las leyes de los procesos lógicos: del error puede salir la verdad.

Un maestro de ceremonias debe permanecer fuera del acto. No he considerado correcto rectificar el desliz del lenguaje matemático en la única ecuación de Novick, como tampoco me parece adecuado corregir el desliz literario de su último párrafo. Con todo, he añadido, al final de esta serie de opiniones, algunos pensamientos personales míos.

---

(1) Observo, con interés y sorpresa, que por lo menos seis de los ocho defensores del empleo de las matemáticas en la teoría, son brillantes investigadores empíricos.

## I

LA CONTRIBUCION DE LAS MATEMATICAS  
A LA ECONOMIA*L. R. Klein*

Se ha criticado frecuentemente el uso de los métodos matemáticos en Economía. Mr. Novick plantea de nuevo esta cuestión, pero con carácter posiblemente diferente. Otros han pedido mejor comunicación, más realismo o más flexibilidad por parte de los economistas matemáticos. Hasta cierto punto, Novick describe al economista o al científico social matemático como un charlatán y "dilettante". Es verdad que algunos quizás utilicen las Matemáticas para confundir o impresionar a los demás, pero ello no resta méritos a los esfuerzos constructivos de aquellos que utilicen el método matemático. Trataré de demostrarlo indicando los resultados positivos alcanzados por los métodos matemáticos, y, ciertamente, creo en su futuro e ilimitado desarrollo.

Me ocuparé principalmente del empleo del método matemático en la Economía, porque conozco mucho mejor la situación en este terreno, pero seguramente se podrían aplicar argumentos similares a las otras ciencias sociales. A este respecto, sin embargo, es necesaria una observación. Mientras que, en Economía, la tradición de Cournot, Walras y Pareto han conducido a un cierto conocimiento del método matemático casi general, la situación es algo diferente en psicología y sociología. Fuera de la Economía se pueden observar huellas de ingenuidad entre los científicos sociales. Algunos de ellos esperan resultados poco razonables de la simple aplicación de este instrumento poderoso. El hecho de que se hayan impresionado sin suficiente justificación no es tampoco un argumento aceptable contra la metodología.

Gran parte de la economía matemática trata de la formulación y el redescubrimiento de soluciones a problemas que constituyen ya partes conocidas de la Economía "literaria". ¿Ello supone un esfuerzo inútil? Yo respondo que no, porque nuestra materia se enfrenta con problemas verdaderamente difíciles, que deberían considerarse desde muchos puntos de vista diferentes, a fin de lograr pe-



netraciones más profundas. Los trabajos de Pareto, Slutsky, Hicks y Allen aclararon tremendamente algunos puntos esenciales de la teoría de la utilidad y de la conducta del consumidor. Yo creo que este trabajo significó una aportación mucho mayor que la simple reformulación de los principios de la economía literaria. Quizás no se dispondría de la "ecuación fundamental de la teoría del valor" (la ecuación de Slutsky) sin la ayuda de las Matemáticas. El trabajo llevado a cabo hoy en el campo de la programación lineal, nos ha proporcionado análogamente nuevos conocimientos de la naturaleza del sistema de precios. Esto ha sido un subproducto valioso de la reformulación de la economía clásica en las condiciones de la programación lineal. Sería seguramente difícil, para una persona sin preparación matemática, apreciar el valor total de estos resultados, que son, no obstante, importantes, y dentro de las posibilidades de todos los estudiantes que dispongan de la oportunidad de estudiar tales innovaciones.

El concepto walrasiano del equilibrio general es considerado por muchos como una de las mayores ideas económicas de todos los tiempos. El concepto es esencialmente matemático, aunque se podría haber alcanzado partiendo de una base intuitiva no matemática. Sin embargo, la formulación intuitiva no nos habría servido bien para algunas aplicaciones estadísticas recientes sobre las cuales hablaré más adelante. Otra idea profunda del razonamiento económico es la descripción del ciclo económico como la solución de un sistema de ecuaciones matemáticas dinámicas. Es cierto que existen teorías cíclicas no matemáticas, ¿pero pueden compararse en belleza y elegancia con la clásica de Frisch, "problemas de propagación y problemas de impulso en la Economía dinámica? Hemos aprendido mucho acerca de la naturaleza de los ciclos económicos mediante el estudio de modelos matemáticos, y estas ideas no se habrían desarrollado salvo en los esquemas más simples, con métodos no matemáticos. Asimismo, como se discutirá más adelante, la teoría matemática ha preparado el camino para nuevos avances en la economía aplicada.

Muchas de las aportaciones no matemáticas al análisis económico tienden a ser con frecuencia groseras, chapuceras y vagas. Es de verdadero mérito condensar volúmenes o artículos farragosos en unas pocas páginas comprensibles. A mí me gustan los argumentos ele-

gantes y densos y me atrevo a suponer que a otros muchos les gustarían también si participasen en el desarrollo del tratamiento matemático de la Economía. Para mí la lectura de extensos tratados de Economía literaria es la labor que me parece más ingrata.

La claridad de pensamiento caracteriza a la Economía matemática. Después de haber estudiado cuidadosamente casi toda la literatura surgida alrededor de la "Teoría General" de Keynes, llegué a la conclusión de que las confusiones se debían, principalmente, a autores no matemáticos. Los estudiantes de la materia inclinados a las Matemáticas, acudían casi siempre directamente a los puntos principales, sin interpretarlos mal. Se podría discutir inteligentemente la "Teoría General" si la gente empezase por definir cuidadosamente las variables y escribiese las ecuaciones relevantes del sistema con sus propiedades. Una de las mejores formas de comparar sistemas distintos de pensamiento consiste en estudiar el esqueleto de los modelos matemáticos de cada sistema y contemplar las diferencias en la estructura de las ecuaciones relevantes.

Un intelectual distinguido y economista matemático observó en cierta ocasión que Tinbergen, después de su estudio para la Sociedad de las Naciones, podía ser considerado como el "ingeniero", en contraste con Frisch, Samuelson, Marshall y otros que serían los "físicos". Esta caracterización no encaja ciertamente con el comentario de Novick, que "las Matemáticas se utilizan principalmente en las Ciencias Sociales como en la Química o Física teóricas; y no es como se aplican en la Mecánica e Ingeniería corrientes los resultados matemáticos de la Teoría, probados por la estadística en Física o Química". Toda la tendencia de la Econometría moderna se dirige a comprobar la teoría y a estimar las estructuras teóricas de forma bastante parecida a los métodos empleados por la Ingeniería, en relación con la Física y Química teóricas.

No sólo la Econometría da contenido empírico a la teoría, sino que ello sería imposible sin ayuda de las Matemáticas. La teoría económica, a fin de ser convenientemente probada o estimada por métodos estadísticos, debe ser fundida en un molde matemático, a pesar del disgusto de Novick hacia estas cosas. Las hipótesis básicas deben ser lo bastante específicas para que sepamos en casos particulares si los hechos las refutan o, por el contrario, son con-

sistentes con ellas, o bien si las hipótesis están formuladas pobremente. La especificación matemática de las variables y sus relaciones previene contra la posibilidad de formulaciones incorrectas. Las Matemáticas no son sólo esenciales en el momento de la formulación del problema en teoría económica, sino también para el empleo de métodos estadísticos. Algunas ramas de la estadística descriptiva implican poca o ninguna matemática, pero la teoría de la inferencia estadística parte de la teoría matemática de la probabilidad, y no puede aplicarse a problemas de comprobación de hipótesis o estimación estructural en sistemas económicos sin una gran utilización de las Matemáticas.

El análisis "input-output", la construcción de modelos econométricos así como la predicción del futuro, el análisis estadístico de la demanda, la estimación de las funciones de producción y otros estudios econométricos similares, se tambalearían irremediablemente sin el uso de las Matemáticas. Es difícil imaginar a alguien siguiendo los efectos de una elevación de las exportaciones mediante un cuadro del "input-output" sin el uso de la teoría de matrices y de las ecuaciones lineales simultáneas.

Hace veinte o treinta años, la Economía matemática de aquel tiempo parecía muy abstracta y difícil de comprender. Desde entonces, hemos realizado enormes progresos. Las ideas de aquel período son muy conocidas y comprendidas por un conjunto de estudiantes cada vez más numeroso. Actualmente, los últimos adelantos en programación lineal, teoría de los juegos, economía del bienestar matemática o econometría teórica, pueden parecer igualmente abstractos y difíciles a la generación presente. Pero también serán asimilados. La tendencia actual hacia la comprobación estadística servirá para podar los excesos inútiles.

## II

### LA BASE METODOLOGICA DE LA TEORIA ECONOMICA

*James S. Duesenberry*

Mr. Novick critica la Economía matemática con el mismo espíritu con que mucha gente critica el arte moderno. Admite que no lo comprende, pero está seguro de que no le gusta.

Primero dice que no puede lograrse con matemáticas lo que no puede hacerse mediante la lógica verbal. Esta afirmación, literalmente, puede ser cierta. Pero Mr. Novick continúa, para concluir, que "teniendo esto presente deberíamos considerar los esfuerzos actuales para aplicar las Matemáticas a la Economía y a las Ciencias Sociales como una simple adición a la esotérica de las ciencias". Esta conclusión es inadecuada. Probablemente no se podrá realizar con grandes excavadoras lo que no se logre hacer con picos y palas. ¿Deberemos considerar, por tanto, las excavadoras mecánicas como parte de la esotérica de la industria de la construcción? La justificación del empleo de las Matemáticas en cualquier terreno es su eficacia como método de análisis. Me parece innegable que existen muchos casos en los que el análisis matemático es más eficaz que la lógica verbal. Hay también otros en los que sucede lo contrario.

En segundo lugar, Mr. Novick presenta un cuadro exagerado de charlatanes matemáticos vendiendo mercancías falsas a los economistas no matemáticos. No cabe duda que los economistas matemáticos han producido (y a veces vendido) algunas proposiciones falsas empíricamente o desprovistas de sentido. La historia de la Economía está llena de tales proposiciones. El fallo no está en el método del análisis, sino en la forma en que se aplica.

En tercer lugar, Mr. Novick distingue entre "las Matemáticas como una forma de lenguaje y como un método cuantitativo". Parece pensar que las Matemáticas como una forma de lenguaje pueden utilizarse en Economía (aunque sea un esfuerzo inútil), mas no como un método cuantitativo. Pero si decimos que las Matemáticas pueden emplearse como una forma de lenguaje en Economía afirmamos que es factible establecer una formulación de las relaciones entre cantidades. Y si podemos realizar esto, servirán las Matemáticas para deducir las consecuencias de grupos de tales relaciones, que es exactamente lo que se hace en las Ciencias Físicas.

Quizás suceda que no sea posible establecer ecuaciones relacionando las cantidades manejadas por los economistas. En este caso no alcanzaremos conclusiones aceptables por el análisis matemático ni por ningún otro método. Si Mr. Novick lo cree así,

debería dirigir sus ataques no contra la economía matemática sino contra toda la economía analítica.

Sin embargo, existen algunos problemas reales en la forma como se ha desarrollado la teoría económica. No ha surgido porque a hora utilizamos símbolos en vez de palabras o gráficos, sino por razones mucho más fundamentales. Las discusiones metodológicas resultan muy pocas veces fructíferas, pero ya que el profesor Harris ha organizado una, debe ser a fin de replantear algunas viejas cuestiones acerca de la base metodológica de la teoría económica.

La ciencia económica ha sufrido, durante mucho tiempo, una desastrosa falta de comunicación entre los teóricos (es decir, aquellos implicados en el estudio de teorías) y los empíricos (aquellos dedicados al estudio de los datos de la realidad para contrastar las teorías). La función de los teóricos en casi todas las disciplinas es desarrollar esquemas conceptuales que unifican y organizan los datos empíricos. Una teoría acertada no solamente explica el sentido de observaciones previas, sino que predice otras y, por consiguiente, guía el trabajo empírico de comprobar dichas predicciones. Puesto que los resultados no son siempre totalmente satisfactorios, el trabajo empírico origina la revisión de la teoría, de forma que existe una continua interacción entre el trabajo empírico y la reformulación de la teoría.

En Economía se levanta un gran aparato teórico sobre una base muy estrecha de generalización empírica. Ciertamente, casi toda la teoría económica se basa en la proposición hartamente comprobada de que nadie arroja el dinero por la ventana; más seriamente, que la mayoría de las personas actúan de forma que, después de consideradas todas las cosas, obtengan el resultado más deseable. Por supuesto que los economistas disponen de otras muchas proposiciones empíricas, tales como que las curvas de demanda, normalmente, son descendentes, los costes marginales de las empresas, ascendentes, etc. Pero estas proposiciones se hallan siempre sujetas a cualificaciones que han servido, a su vez, para cubrir cualquier discrepancia entre las observaciones y las implicaciones de la teoría. Una gran parte del trabajo teórico reciente se ha dedicado a englobar las cualificaciones en un modelo de mayor

generalidad. El triunfo final de la generalización completa impondrá que ninguna observación será inconsistente con la teoría de la maximización. Esto parece un juego estéril desde el punto de vista de la ciencia positiva. Igualmente lo es el juego de establecer hipótesis condenadas a no ser tomadas en serio, y deducir de ellas sus consecuencias.

La base empírica de nuestra estructura teórica es muy escasa, pero ello no se debe a falta de material. Actualmente existen enormes cantidades de material empírico disponible que no se emplean en el trabajo teórico. Ello ocurre así por la forma peculiar en que se formulan los problemas teóricos. El teórico-económico no trata de explicar un grupo particular de observaciones. Por el contrario, intenta demostrar las consecuencias generales de un conjunto de premisas. Deja a otros la aplicación de la teoría, esto es, la estimación de los parámetros de sus funciones generales. Este sería un procedimiento satisfactorio con tal que a), las premisas generales cubran realmente todas las posibilidades, y b), que se formulen de tal forma que los parámetros de las funciones que las representen puedan medirse en la práctica. En el estado actual de la teoría de la empresa y de la unidad económica de consumo, sucede con frecuencia que las premisas son lo suficientemente amplias para reducir el contenido empírico de sus consecuencias a un mínimo que, además, es erróneo. Existen enormes diferencias en los salarios pagados a los trabajadores de la misma categoría y habilidad técnica en diferentes industrias (dejando aparte los Sindicatos). Esto no es necesariamente incompatible con una teoría que comprenda costes por desplazamientos geográficos, diferencias en el coste de vida, ventajas y desventajas no pecuniarias, etc. Pero si las implicaciones de la teoría de la empresa y de la unidad económica de consumo exigen una investigación empírica de estos factores, a fin de explicar los tipos de salarios, todo el esfuerzo sería inútil. Un breve examen de la evidencia empírica al comienzo nos conduciría a hipótesis mucho más fructíferas, por ejemplo, que las diferencias de salarios entre las industrias están relacionadas con las diferencias en los niveles de beneficios, o que los tipos de salario históricos influyen sobre los actuales.

Las formulaciones teóricas son enunciadas con frecuencia, de

forma que es difícil comprobarlas, aunque no sean demasiado amplias ni excesivamente reducidas. Por ejemplo, las teorías del equilibrio son difíciles de probar cuando los retrasos en el reajuste resultan largos en relación al ritmo del cambio de los parámetros en la teoría. Una teoría de la competencia es probablemente apropiada al mercado de la vivienda de alquiler. Pero es de poca ayuda si los alquileres precisan de varios años para desplazarse de un nivel de equilibrio a otro. La teoría sigue siendo válida, aunque los alquileres desciendan durante varios años, mientras la demanda de alojamientos aumenta.

Lo que se desprende de todo lo anterior es que la actual división entre el trabajo teórico y el "aplicado" es francamente desafortunada. El trabajo teórico no debería tender a formulaciones generales en las que se encajen los datos (si se hallan disponibles) sino a la explicación sistemática de conjuntos específicos de fenómenos, a la luz de las circunstancias, que rodean a los actores que producen los fenómenos en cuestión. Ello no significa que se confíe en el puro empirismo. Una regresión no es una explicación; es sólo la enunciación de la regularidad observada en la conducta de ciertas clases de actores. La tarea de la teoría es explicar aquellas regularidades en términos de regularidades técnicas, legales o sociológicas, que estamos dispuestos a aceptar como dadas. Una teoría debería demostrar que un conjunto particular de tales regularidades es consistente con un conjunto particular de observaciones. Es mucho más útil hacer esto que tratar de demostrar las observaciones que se producirían por cualquier conjunto imaginable de leyes de conducta. En primer lugar, nuestras imaginaciones no son lo suficientemente poderosas para hacerlo, y, si lo fueran, sería un ejercicio inútil, puesto que no conoceríamos nada de la situación real.

Las Matemáticas no juegan un papel especial en la creación de la situación desafortunada presente de la teoría, salvo que las formulaciones matemáticas de teoría esencialmente vacua aparentan decir más de lo que en realidad dicen. La crítica de los métodos matemáticos puede ser un poco infantil, pero, después de todo, fué un niño quien vió que el rey no iba vestido.

## III

## COMPROBACION EMPIRICA Y MODELOS MATEMATICOS

*John S. Chipman*

Aunque simpatizo con muchos de los sentimientos expresados por Mr. Novick acerca del papel de las Matemáticas en la Economía, no estoy de acuerdo con su afirmación de que el uso creciente de las Matemáticas haya tenido un resultado "sumamente desafortunado". Su principal crítica se refiere a la falta de contenido empírico de la economía matemática. Creo que esta crítica es válida; una ojeada general a las publicaciones económicas confirmará la impresión de que se elaboran más teorías de las que se comprueban. Sin embargo, esta cuestión debe plantearse con una perspectiva histórica más extensa.

La falta de contenido empírico en nuestra ciencia no es exclusivo de la economía matemática. Es característico a lo largo de toda la historia de la Economía. Cuando se pasa revista al desarrollo del pensamiento económico desde el tiempo de los fisiócratas, se tropieza, muy de tarde en tarde, con la comprobación de las teorías frente a los hechos. La Economía ha progresado mucho desde los días en que se pensaba que la determinación del precio en una economía industrial podía explicarse por el comercio de manzanas y peras entre Pedro y Pablo, y desde los años de la depresión, cuando se consideraba un gran logro el dibujar la curva marginal partiendo de la media. Y es difícil encontrar en la economía matemática discusiones más abstrusas de seguir que los grandes debates verbales entre las escuelas austriaca y americana sobre la teoría del capital.

Estoy muy lejos de sugerir que esas primeras etapas de la ciencia económica no tengan un lugar importante en la historia del pensamiento económico. Fueron pasos inevitables en el desarrollo de los conceptos. El principio de la aproximación sucesiva es tan antiguo como la ciencia misma. Existen poderosas razones por las que ha logrado más éxito en las Ciencias Físicas que en



las Económicas: en la mayor parte de las Ciencias Físicas la experimentación es posible en todos los pasos, mientras que en Economía, una teoría sólo puede aplicarse después de suavizada la rigidez de muchas hipótesis y de que el proceso de aproximación sucesiva ha ido muy lejos.

Mientras alguna escuela de economistas está preparada para verificar teorías basadas en hipótesis poco realistas, los economistas matemáticos han seguido la dirección de construir modelos con hipótesis más realistas. Al mismo tiempo, han tenido lugar tres fenómenos importantes: 1), ha aumentado muchísimo la cantidad y calidad de los datos disponibles; 2), se ha desarrollado extraordinariamente la ciencia de la estadística, y 3), más recientemente aún, ha progresado notablemente la ciencia de la computación, haciendo posible que problemas que hubiesen requerido miles de horas se resuelvan rápidamente mediante calculadores mecánicos y electrónicos. Sólo en los últimos tiempos se ha hecho posible la comprobación de modelos económico-matemáticos en gran escala. En estas circunstancias, no es sorprendente que los economistas matemáticos hiciesen públicas sus teorías antes de comprobarlas; frecuentemente, sólo después de que una teoría ha gozado de publicidad y ha sido objeto de críticas profesionales, es cuando las instituciones privadas y oficiales se deciden a recoger los datos necesarios y financiar los cálculos.

Algunos economistas sostienen que pueden comprender con su intuición cómo funciona la Economía, sin utilizar matemáticas. Siento verdadera admiración por tales economistas y espero que siempre los tendremos entre nosotros. Sin embargo, la intuición no se comunica con facilidad, y dudo del progreso de la Economía, a menos que la teoría tenga unos cimientos lógicos firmes.

Creo que el fenómeno importante que Novick subraya es psicológico. Ningún economista matemático admitiría realmente que "la expresión de estas mismas teorías en forma matemática produzca un conocimiento absoluto". No obstante, sospecho que la gran fuerza de las matemáticas ha conducido a alguno, más o menos conscientemente, a considerar el trabajo empírico como una forma inferior de actividad intelectual. Es cierto que el conocimiento matemático se usa a veces como una cubierta protectora o

una especie de juego de ilusionismo para ganar argumentos. Y siendo los economistas humanos, les será difícil resistir a la tentación de exhibir sus conocimientos matemáticos, aun cuando existan razonamientos más sencillos. Pero no creo que la mayor parte de los economistas matemáticos se entreguen deliberadamente a este tipo de actividad, aunque en ocasiones lo parezca. Los no iniciados se desaniman indebidamente en presencia de terminología extraña; expresiones como "principio minimax", "servomecanismo", "espacio de mercancías" y "hipersuperficie poliédrica convexa" suenan aparatosamente hasta que se descubre qué conceptos tan sencillos representan. Un esfuerzo expositivo algo mayor por parte de los autores ampliaría mucho su auditorio.

Yo encarezco a Mr. Novick que no se asuste, y aplaudo su petición de un mejor entendimiento mutuo y de más trabajo empírico. Los economistas matemáticos deberían tomar estas críticas muy en serio. Está llegando el momento en que la mayor parte de los grandes obstáculos para comprobar las teorías económicas matemáticas (datos y métodos estadísticos inadecuados, falta de facilidades de cálculo) están siendo rápidamente superados; confío que en el próximo decenio se avanzará mucho en la comprobación de las teorías. Pero es preciso tener en cuenta que los métodos matemáticos y la investigación empírica no son sustitutivos entre sí. Por el contrario, el trabajo empírico puede ser inútil, a no ser que vaya acompañado por buena teoría y buenos métodos estadísticos, y tanto éstos como aquéllos, son de carácter esencialmente matemático.

#### IV

### FUNCIONES QUE REALIZA EL TRATAMIENTO MATEMATICO

*J. Tinbergen*

1. Es indudable que la situación actual es desafortunada —en relación con el uso de las matemáticas en la ciencia económica— y que puede mejorarse con una comprensión más clara de las funciones que cumplen las matemáticas. Me complace el intento reali-

zado por el Dr. Novick, aunque me inclino a situar las cosas de forma algo diferente. No sé exactamente hasta qué punto existe entre nosotros sólo una diferencia en las palabras o también en el fondo. Por consiguiente, expondré mi opinión personal con mis propias palabras.

Las funciones del tratamiento matemático en la investigación económica se discutirán, quizás mejor, partiendo de una división en varios elementos de la *pieza completa de investigación económica*. No todas las piezas importantes de análisis económico son necesariamente completas; algunas veces se hallan ausentes ciertos elementos, como consecuencia de aspectos especiales del problema tratado. No diré, por tanto, que todas las aportaciones a la ciencia económica deberían mostrar la totalidad de los elementos que enumeraré a continuación, pero la función de las matemáticas se hace más clara si consideramos el siguiente grupo completo de elementos:

1.º Se dará una lista de los fenómenos que han de incluirse en el análisis, a fin de delimitar claramente la extensión del mismo y el grado de detalle admitido.

2.º Se darán símbolos, por razón de la claridad o de la brevedad, si el número de fenómenos excede de unos pocos. Esto es una cuestión de "administración".

3.º Se resumirán las hipótesis o teorías (parciales) que se supone determinan las relaciones causales y otras existentes entre los fenómenos introducidos. Este es el elemento de teoría económica.

4.º A estas hipótesis se dará la forma de ecuaciones, todavía de una forma más bien general, utilizando símbolos aún no especificados, para indicar relaciones que la teoría no es capaz de especificar "a priori". Nos hallamos ante la formulación matemática de las teorías.

5.º Se ofrecerá una especificación mediante la determinación numérica de ciertas funciones, basada en la observación de cifras, incluyendo una indicación de "intervalos de confianza" para ciertos números, bajo ciertas hipótesis. Este es el elemento de comprobación estadística.

6.º Se dará una combinación de las así especificadas teorías

parciales, a fin de solucionar el problema planteado. Lo que constituye la solución del problema o la aplicación de las teorías utilizadas.

2. Las funciones que cumplen las matemáticas en este proceso son especialmente las indicadas en los apartados 2.°, 4.°, 5.° y 6.° Las discutiré, más detalladamente, a continuación.

La función 2.°, es decir, la de la *notación*, es más importante de lo que a veces se cree. Como ya he observado, representa lo que una buena administración con respecto a una actividad práctica. Los problemas económicos son, generalmente, de muchas variables, en los cuales juegan su papel numerosos fenómenos, y *la mente humana tiene una capacidad limitada para retener de memoria*. Es ineficaz, si posible, el intento de memorizar sin una ayuda especial. Esta ayuda será tanto mayor cuanto mejor se haya concebido el sistema de símbolos. Ello explica por qué algunas personas muy capacitadas para la abstracción ansían, sin embargo, obtener grupos bien organizados de símbolos.

La función 4.°, la de la *traducción* (a forma matemática) de las hipótesis económicas, o de las teorías (parciales) económicas, aunque sólo preparatoria y auxiliar, es muy útil, puesto que frecuentemente nos obliga a exponer con más precisión nuestro pensamiento. Nos fuerza a distinguir entre demanda, oferta y relaciones técnicas, para citar sólo algunas; exige una clara indicación de los fenómenos que se supone afectan a la demanda, cuáles a la oferta, y a la demanda y oferta de exactamente qué. ¿Queremos explicar la demanda de los automóviles directamente en forma de la atracción de un coche, o, indirectamente, en términos de la atracción de sus servicios? ¿En qué forma precisa influyen los costes de la gasolina y los impuestos sobre esta atracción? ¿La cantidad ofrecida es una reacción ante los precios, o esos precios son una reacción de los oferentes a la cantidad demandada? Si tratamos de la influencia de los tipos de interés sobre la inversión en stocks, ¿queremos decir que el tipo de interés es un factor determinante de la cantidad total poseída de stocks o de la adición a los stocks ya existentes durante un cierto período de tiempo? Se podrían aducir numerosos ejemplos mucho más complicados y modernos.

La función 5.°, la de la *especificación sobre la base de la ob-*

*servación*, es realmente muy complicada; representa, en esta breve ojeada, la totalidad de la estadística matemática. La tarea central, en este elemento de la técnica matemática, es el cálculo de probabilidades sobre un número de hipótesis. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar cierto conjunto de observaciones (dadas las tolerancias) si suponemos que la teoría económica de los fenómenos medidos es tal y tal —con valores numéricos para toda clase de elasticidades, etc.— y los residuos no explicados tienen ciertas propiedades específicas? ¿Y para qué valores numéricos de las elasticidades, etc., será mayor esta probabilidad? En el caso más sencillo, cuando tenemos que explicar sólo un fenómeno, por ejemplo, los precios del azúcar, y lo intentamos suponiendo que sólo las cosechas de azúcar, más el transporte, son relevantes, ¿qué cifra tomaríamos para la elasticidad de la demanda, a fin de que nuestras observaciones fuesen más probables? ¿Es dicha elasticidad 0,3 ó 0,25? La solución de un problema tan sencillo no puede concebirse sin la ayuda de las matemáticas.

Finalmente, la función 6.ª, la de *combinar teorías parciales en una teoría completa*, necesaria para la solución del problema que se considere, adopta la forma matemática de la solución de un sistema de ecuaciones, o si tal solución es ya conocida para un caso más general, la aplicación de la última al caso especial considerado. Esta es la función más típica de la economía matemática. En investigaciones más abstractas puede adoptar la forma de la prueba de un teorema, tal como las leyes de Gossen o los teoremas de Wald, es decir, la prueba de que bajo ciertas hipótesis existe una situación de equilibrio, y solamente una, para un sistema de mercados coherentes.

3. Después de haber enumerado las funciones que cumplen, a mi entender, las matemáticas, desearía indicar *qué funciones no cumplen en la ciencia económica*, y por qué, a este respecto, los métodos matemáticos pueden ser a veces peligrosos. No participan en la función indicada en el apartado 1.º de la sección 1, es decir, la enumeración de los fenómenos que han de incluirse en el análisis. Esta es una parte de la investigación, esencialmente cualitativa, caracterizada por la distinción de diferentes categorías de conceptos económicos y, por su exacta definición, una tarea típica del economista "literario".

Tampoco cumplen las matemáticas ningún papel en el apartado 3.º de la sección 1, es decir, la función de formular las hipótesis o las teorías (parciales). Esta formulación consiste en la enumeración de tales principios básicos como el "principio económico" o, en hipótesis institucionales, como la libre concurrencia u otra estrategia del mercado seguida por los sujetos considerados, y otras hipótesis, como las funciones de la producción y del coste relevantes en la economía estudiada, los instrumentos de la política económica escogidos, etc.

Además de las dos funciones citadas, a las que las matemáticas, por principio, no pueden aportar nada, existen casos especiales en los que tampoco es necesario el empleo de las matemáticas para las restantes funciones. Volveré sobre ello en la próxima sección.

Pero antes debo señalar algunos peligros del tratamiento matemático, relacionados con las dos funciones de la investigación económica que acabo de enumerar. Si el análisis es efectuado por personas demasiado entusiastas de las matemáticas, pueden o bien descuidar dichas funciones o aceptar ciertas hipótesis básicas porque sean fácilmente tratables matemáticamente. Si haciendo esto escogen hipótesis irreales no rinden ningún servicio a la Economía. No es necesario consignar que los grandes economistas matemáticos no cometerán tales errores. Pero existen ejemplos de ingenieros y físicos, a la caza de "analogías" entre la Física y la Economía; perjuicio que evidentemente se manifiesta en sus teorías. Yo añadiría, sin embargo, una observación que puede interpretarse mal con facilidad: no es siempre una desventaja el investigar aquellos casos que, aun siendo poco representativos, son susceptibles de análisis matemático; se puede realizar descubrimientos de un carácter más general que, con el tiempo, demuestran su utilidad.

4. Ahora consideraré algunas funciones ya resumidas en la sección 2, que *las matemáticas realizan en competencia con otros métodos o lenguaje*. El que para las funciones 2.ª, 4.ª, 5.ª y 6.ª se preciso la ayuda matemática depende evidentemente de cada problema económico concreto. En problemas sencillos no será necesario el empleo de la "artillería pesada" matemática. No siempre compensa el rodeo que la introducción de símbolos supone. Incluso en los casos en que la utilización de las matemáticas constituye una ventaja es muy defendible el empleo del tipo más sencillo

posible, aunque sólo sea para que el número de lectores capaz de comprenderlo llegue al máximo. Siendo yo mismo un matemático con conocimientos modestos, experimento frecuentemente considerables dificultades al leer literatura de la comisión Cowles. Yo me atrevo a aconsejar que un nuevo método o idea debería siempre ilustrarse primeramente con el caso más sencillo concebible, para, sólo después, tratarse de una forma general. Este tratamiento general se necesita, por supuesto, para averiguar cuán lejos nos conduce dicho método o idea; pero, si se comienza por el caso más sencillo, será mucho más fácil comprenderlo. Donde las matemáticas se hallen realmente en competencia con otros métodos deben conducirse como competidoras, mostrándose tan atractivas y eficaces como sea posible.

En casos menos sencillos, la balanza se inclina, en mi opinión, a favor de las matemáticas. El disponer de una lista restringida de variables, y de un número de ecuaciones que representen el mecanismo discutido, supone siempre mucha más claridad, agudeza y brevedad, incluso para los que lo niegan. Desde luego, todos desean que la exposición se adapte a su nivel de conocimientos y familiaridad con las matemáticas. Hablaré de nuevo sobre ello en la sección 7.

En contra de lo que sostiene el Dr. Novick, opino que el uso de los signos matemáticos resulta también muy útil cuando se aplica a conceptos que no han sido todavía medidos exactamente; es perfectamente posible el indicar, al mismo tiempo, los márgenes de error, como sucede en las ecuaciones estocásticas. Una ventaja especial es la que yo llamo la posibilidad de localizar ciertas influencias. Si se mantiene, por ejemplo, "que el tipo de descuento influye sobre el ciclo", deberíamos estar exactamente informados acerca del lugar en el que, es decir, la ecuación o ecuaciones en las que tal influencia se manifiesta. El tratamiento matemático nos fuerza a especificar, mientras que con el no matemático hay el peligro de ser menos claro.

5. Existen, con todo, situaciones en las que las matemáticas constituyen el único camino para resolver un problema. Ello sucede claramente con las funciones (5.<sup>a</sup>) y (6.<sup>a</sup>), en los problemas más complicados. La especificación de los valores numéricos de los parámetros es en sí misma un proceso matemático, aunque en los

casos más simples sea tan sencillo que resulta accesible incluso a los legos. En los casos complicados de estadística matemática no hay otro camino, y no creo que se haya propuesto nunca la estimación de los parámetros, por métodos literarios. El economista literario considerará, probablemente, que esto se halla fuera del campo de la Economía, y no existirá una gran diferencia de opinión respecto a la necesidad de las matemáticas en esta ocasión.

Pero se dan casos de un segundo tipo, es decir, aquellos dentro de la función 6.<sup>a</sup>, para los cuales, algunas veces, las matemáticas son indispensables. Hallar el resultado conjunto de un número de teorías parciales o ecuaciones no es siempre posible mediante razonamientos. No es correcto, incluso en mi opinión, sostener que todos los resultados del tratamiento matemático pueden ser expresados en forma verbal. Depende de lo que signifique exactamente esta frase. Intenté aclarar estas cuestiones en un trabajo leído ante la Real Academia Holandesa de Ciencias (2), cuyo contenido resumiré aquí brevemente. Por "razonamiento" entendemos en la conversación ordinaria una especie de lógica de una dimensión (o de una sola dirección), consistente en una sucesión de afirmaciones, cada una de las cuales puede probarse con la ayuda de la precedente. No es siempre posible resolver un sistema de ecuaciones simultáneas mediante tal razonamiento, es decir, hallar cada incógnita en forma sucesiva. Esto es, en general, imposible, y sólo será posible si el sistema de ecuaciones pertenece al tipo que Wold llama recursivo. En este caso habría una ecuación conteniendo sólo una incógnita, y tal incógnita podría así hallarse. Habrá una segunda ecuación conteniendo la primera y otra incógnita; la última se hallará en un segundo paso. Y así podrán despejarse todas, sucesivamente. Esto no sucede en un sistema de ecuaciones simultáneas, generalmente, y no existe un equivalente al "razonamiento" en tal caso. Por consiguiente, no será posible ofrecer una deducción verbal de la solución que sólo puede ser comprobada después. En este sentido, no es correcto mantener que las matemáticas no añaden nada nuevo, o que el proceso matemático puede siempre traducirse al lenguaje ordina-

---

(2) J. TINBERGEN, "In hoeverre kunnen economische stellingen sonder wiskunde worden bewezen?", Meded. Kon. Ned. Aka. v. Wet. afd. Lett, 13 (1950), No. 10.



rio. Los resultados pueden traducirse, pero el proceso económico no puede traducirse a "razonamiento". Otra cosa es, por supuesto, que a toda ecuación económica quepa darle interpretación verbal, lo que no sería demasiado útil para comprender el proceso.

6. Existen también algunas *ideas equivocadas acerca de las matemáticas*. Se cree, a veces, que sólo algunas relaciones muy sencillas y, por tanto, rígidas, son representables por las matemáticas, y que la realidad es más flexible. Esto es infraestimar el poder de las matemáticas: el análisis superior es capaz de explicar relaciones mucho más complicadas y flexibles, y manipularlas hasta cierto punto. Por otra parte, se olvida con frecuencia que los argumentos contra los tipos más generales de las matemáticas son, en realidad, argumentos contra la ciencia en general, es decir, contra la suposición de que podemos comprender las conexiones entre los fenómenos —en este caso los fenómenos económicos— en alguna forma general. Si no se acepta la determinación, no habrá economía: ni economía matemática ni economía literaria. Quizá quedasen novelas económicas; personalmente, preferiría las otras.

7. Terminaré con algunas recomendaciones. Como dije, es una desgracia que diferentes grupos de economistas no se entiendan los unos a los otros. La razón es, en parte, porque algunos se expresan tan matemáticamente que no pueden ser comprendidos. A ellos les aconsejo que utilicen las matemáticas más sencillas, compatibles con el problema que traten, y que siempre que puedan comiencen con un ejemplo simple. Otra recomendación es que se dediquen a estudios empíricos, ya que hay cierta superproducción de trabajo teórico al que falta base real (3).

Hay, sin embargo, otra razón de la falta de comprensión entre los dos grupos: el conocimiento insuficiente de matemáticas por parte de bastantes economistas. Está hoy perfectamente claro (para algunos lo estaba ya hace medio siglo) que las matemáticas son un instrumento indispensable en el análisis económico moderno. Las consecuencias deben afrontarse; por fortuna, lo han sido ya en la mayor parte de las Universidades. Y es alentador ver cuán fácilmente las generaciones más jóvenes de estudiantes manejan las

---

(3) Cf. J. TINBERGEN: "Eficacia y futuro de la investigación económica", *Kyklos*, vol. V (1953), pág. 309.

cuestiones matemáticas. El temor de que la introducción de las matemáticas como curso obligatorio reduciría mucho el número de estudiantes de economía no se ha visto confirmado por la realidad.

Queda una división natural del trabajo: entre aquellos más interesados en la investigación cualitativa y descriptiva y los que prefieren el trabajo cuantitativo y analítico. Ambos tienen su puesto en la ciencia económica, y el segundo grupo precisará más del instrumento matemático que el primero.

## V

### SOBRE EL USO Y ABUSO DE LAS MATEMATICAS UTILIZADAS EN TEORIA ECONOMICA

*D. G. Champernowne*

Los artículos sobre Teoría Económica tratan de explicar generalmente al lector los resultados que pueden esperarse de la consecución de *diversas políticas u otras alteraciones en circunstancias dadas*. Esta tarea es difícil, teniendo en cuenta la distinta capacidad y exigencias de los lectores. Si la Teoría ha de ser realista, esas circunstancias dadas deberán reflejar muchísimas complicaciones del mundo real. Una exposición exhaustiva de las mismas, aunque necesaria para lograr una solidez lógica, sería de una extensión intolerable para el lector que está bien informado acerca de la situación a la cual se ha de aplicar la Teoría. Conoce ya muchas de las hipótesis implícitas acerca de las instituciones y la psicología que justifican los razonamientos de los buenos artículos no matemáticos sobre Teoría Económica. Pero a algunos lectores les faltará experiencia o flexibilidad, y tratarán bien de aplicar la Teoría a circunstancias impropias, o atacarán al escritor por no ofrecer una relación exhaustiva de sus hipótesis.

*El teórico económico cauto, cuya mayor ambición es no equivocarse nunca, tiene pocas perspectivas fuera de la discusión de los modelos económicos. Estos son sombras de las situaciones reales, simplificadas tan drásticamente, que pueden ser completamente descritas y su funcionamiento exactamente reflejado dentro de la extensión de un solo artículo. El proceso lógico que conduce*

desde las hipótesis del modelo hasta las conclusiones acerca de su conducta, es ahora riguroso e independiente del conocimiento del lector sobre el mundo real. Gracias a tales modelos, se consigue alcanzar un completo acuerdo dentro de un tiempo razonable. Muchas veces el estudio de los mismos revelará que discrepancias anteriores se han debido a diferencias sobre las hipótesis intuitivas acerca del mundo real. Desgraciadamente para el teórico cauto, sus modelos económicos serán juzgados según su grado de relevancia en relación con el mundo real, de forma que al evitar toda apariencia de error puede caer en la necedad de publicar un largo artículo cuya importancia para cualquier cuestión práctica sea escasa. Este peligro de fabricar meros "juguetes" es considerable, puesto que las hipótesis más convenientes para construir modelos rara vez son las más acordes con el mundo real. Muchos considerarán como los mejores artículos sobre Teoría Económica aquellos que revelen más aguda observación y buen juicio en la elección de las hipótesis que encajen bien con los hechos y que permitan demostrar convincentemente poderosas conclusiones de naturaleza sencilla.

La capacidad para juzgar la relevancia de una Teoría económica, y de sus conclusiones respecto al mundo real, está pocas veces asociada con la capacidad para comprender matemáticas superiores. Un artículo importante sobre Teoría Económica se desperdiciará probablemente a menos que sea expuesto en prosa apoyada en las más elementales matemáticas. "Es obvio que no hay lugar en Economía para largos procesos de razonamiento deductivo" (4), por lo que aquellos modelos económicos que sean realistas y lo suficientemente simples para poder extraer de ellos conclusiones útiles, pueden normalmente ser expresados en prosa. Su simplicidad permite la obtención directa y obvia de las conclusiones en diagramas o matemáticas elementales cuya traducción a la prosa descriptiva es inmediata.

Aunque la argumentación no sea tan simple, es ventajosa la traducción del proceso matemático a prosa. Ello puede atraer la atención hacia algún paso que sea incongruente en relación con

---

(4) MARSHALL, "Principios de Economía", 8.<sup>a</sup> edición, Apéndice D, página 781.

el mundo real, pero cuya implicación se habría perdido tanto en cuanto la argumentación quedara como una secuencia de las manipulaciones algebraicas.

Estas y otras consideraciones pueden invocarse para demostrar que "sería muy útil que aquéllos que empleen las matemáticas como lenguaje dedicasen el tiempo y esfuerzo adecuados para traducir, así la teoría como los datos, a forma literaria, con lo cual un grupo mayor podría estudiar y beneficiarse del trabajo que realizan" (5). Pero los editores y lectores que acepten esta opinión deberán tener presente los siguientes puntos.

Existe el peligro de que la traducción en prosa de una argumentación matemática la conviertan en inexacta e incompleta. La presentación matemática de los axiomas, razonamientos y deducciones, es una disciplina que, seguida estrictamente, depurará las hipótesis, expondrá los puntos débiles a la crítica de los especialistas y reducirá las conclusiones a sus justos límites. Cuando el razonamiento haya resistido el juicio de economistas matemáticos idóneos, el lector no matemático puede sentirse seguro de que la parte en cuestión del artículo es correcta. Al mismo tiempo, la presentación matemática logrará un ahorro de espacio en un grado del que pocos no matemáticos se percatan.

El modelo económico tiene otra ventaja que compensa su abandono de tantas circunstancias particulares del mundo real: ella es su generalidad, en el sentido de que puede abarcar simultáneamente una familia completa de situaciones concebibles, como resultado directo del empleo de notación algebraica. Corresponde, "grosso modo", al hecho de que una igualdad tal como

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

es válida simultáneamente para

$$\begin{aligned} (3^2 - 2^2) &= (3 - 2)(3 + 2) \\ (101^2 - 99^2) &= (101 - 99)(101 + 99) \end{aligned}$$

y para una serie infinita de otras igualdades del mismo tipo.

(5) Novick, pág. 358.

Las ventajas de esta generalidad en Teoría Económica no deben, sin embargo, valorarse demasiado. Pocas veces se obtienen conocimientos por ella si no se seleccionan e interpretan convenientemente aquellos casos particulares más relevantes respecto a situaciones reales.

A pesar del comentario desolador de Marshall sobre los largos procesos de razonamiento deductivo, algunos desarrollos teóricos en Economía lo precisan: son modelos cuya conducta es lo bastante complicada para exigir la ayuda de la alta matemática. Expresar la argumentación brevemente, y revelar su estructura, puede obligar al empleo de una notación condensada y de teoremas generales de nivel superior. Traducir los axiomas, la prueba y los resultados, a prosa aumentaría la longitud del artículo diez veces, a la par que disminuiría la precisión considerablemente. Además de ahorrar espacio, el uso elegante de las matemáticas simplifica la comprensión de una prueba empleando métodos que son familiares para los matemáticos.

Aunque estas razones animen al lector matemático, no sirven de consuelo para el no matemático. El autor se encuentra ante la disyuntiva de parecer completamente ininteligible al no matemático o de que su artículo resulte muy largo, impreciso e innecesariamente oscuro para los que tienen conocimientos matemáticos. Con el fin de orientarle en esta elección, los editores del *Economic Journal* lo han ofrecido recientemente consejos útiles (6). Dichos preceptos los consideraremos como un ideal al que han de aproximarse los autores y deben estimular los editores.

He aquí tres partes esenciales de un artículo sobre un modelo económico:

1. Exponer los axiomas que determinan el funcionamiento del modelo y el grupo de condiciones iniciales o alteraciones cuyos efectos han de ser investigados.
2. Manifiestar los resultados que se desprenden de los axiomas.
3. Dar una completa y rigurosa prueba de los resultados, teniendo en cuenta los axiomas.

Muchos lectores no matemáticos pueden hallarse especialmente preparados para juzgar la relevancia del modelo respecto del mun-

---

(6) *Economic Journal*, LXIII (marzo de 1954). Nota de los editores, pág. 1.

do real. Por lo que es importante que, además de la presentación matemática de los axiomas, se intente una traducción suficientemente exacta, a prosa. Análogamente, al no matemático puede interesarle estudiar las posibles consecuencias que, de los resultados obtenidos por el modelo, se deriven en el mundo real; de ahí que estos resultados deberían traducirse, si es posible, en una serie de conclusiones expresadas en prosa. Por otra parte, no es de primordial importancia hacer las pruebas comprensibles para los no matemáticos; lo fundamental es que dichas pruebas se expongan de forma que sean fácilmente captadas y criticadas por los que posean conocimientos matemáticos. Esto, sin embargo, no excluye el empleo de diagramas para ilustrar el razonamiento, ni el uso de procesos algebraicos y notaciones elementales cuando no se mejora la argumentación con otros superiores, y sin prolongar la extensión de la prueba más de dos o tres veces. Por ejemplo, hay motivos muy suficientes para escribir las ecuaciones de matrices (7) tales como

$$Y = A X + B \quad \therefore \quad \Delta Y = A \Delta X$$

en la forma más extensa

$$Y_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} X_j + B_i \quad \therefore \quad \Delta Y_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} \Delta X_j \\ i = 1, 2, \dots, m \qquad \qquad \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

o, como en ciertas revistas,

$$Y_1 = A_{11} X_1 + A_{12} X_2 + \dots + A_{1n} X_n + B_1 \\ Y_2 = A_{21} X_1 + A_{22} X_2 + \dots + A_{2n} X_n + B_2 \\ \vdots \\ Y_m = A_{m1} X_1 + A_{m2} X_2 + \dots + A_{mn} X_n + B_m$$

por lo que si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  se convierten en  $X_1', X_2', \dots, X_n'$  entonces  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  se convierten en  $Y_1', Y_2', \dots, Y_m'$  en

$$Y_i' = Y_i + A_{i1} (X_1' - X_1) + A_{i2} \\ (X_2' - X_2) + \dots + A_{in} (X_n' - X_n)$$

---

(7) En estas ecuaciones y las siguientes el símbolo  $\Delta$  denota "cambio en".

$$\begin{aligned}
 Y_1' &= Y_1 + A_{11}(X_1' - X_1) + A_{12} \\
 &\quad (X_2' - X_2) + \dots + A_{1n}(X_n' - X_n) \\
 &\vdots \\
 Y_m' &= Y_m + A_{m1}(X_1' - X_1) + A_{m2} \\
 &\quad (X_2' - X_2) + \dots + A_{mn}(X_n' - X_n)
 \end{aligned}$$

pero carece de sentido efectuar tales concesiones en algún momento de la prueba, a menos que toda la demostración pueda reducirse a términos igualmente sencillos. Es contraproducente para el lector semimatemático atraerle por esos medios a la lectura de las primeras páginas y abandonarle, entonces, en las tinieblas de una notación desconocida para él.

En el siguiente ejemplo se pone de manifiesto que el uso de notaciones elementales no constituye siempre una ventaja: supongamos que  $y$  (renta) deba satisfacer la relación  $sy = b + i$  (inversión), en donde  $s$  y  $b$  son constantes. Con la ayuda de un diagrama no sería difícil explicar el razonamiento del multiplicador.

$$sy = b + i \quad \therefore \quad \Delta y = \frac{1}{s} \Delta i \quad (\text{con tal que } s \neq 0)$$

en el que se establece la relación entre un incremento autónomo  $\Delta i$  en la inversión, y el correspondiente incremento  $\Delta y$  en la renta.

Lo que puede generalizarse algebraicamente siendo  $Y$  un vector de  $n$  variables económicas diferentes que deben satisfacer  $n$  relaciones dadas por

$$SY = B + I$$

donde  $B$  es un vector de constantes e  $Y$  es un vector de parámetros, que refleja las condiciones económicas autónomas, y  $S$  es una matriz  $n \times n$ . Las modificaciones de  $\Delta Y$  pueden obtenerse entonces en términos de cambios autónomos de  $\Delta I$ , mediante el razonamiento:

$$SY = B + I \quad \therefore \quad Y = S^{-1} \{ \Delta I \} \quad (\text{con tal que } |S| \neq 0)$$

Esta demostración quedaría confusa ampliando la notación a otra que comprenda términos separados y fracciones incluyendo

determinantes. Los diagramas no suponen aquí ninguna ayuda, y la traducción a prosa habría de contener una explicación sobre la inversión de matrices y el significado de las determinantes.

Este razonamiento de que  $\Delta Y = S^{-1} (\Delta I)$ , o algo más complicado aún, se necesitará siempre que se desee encontrar el efecto de una alteración dada sobre una posición de equilibrio con muchas condiciones simultáneas. El mismo Marshall insistió en que las variables económicas están interrelacionadas y determinadas de esta manera (8). La dificultad en hacer  $\Delta Y = S^{-1} (\Delta I)$  inteligible a personas que no han tenido tiempo de aprender matrices es un obstáculo fundamental para que comprendan las derivaciones de cualquier cambio en el que estén implicadas tres o más variables interdependientes. Un grupo de ejemplos numéricos podría ser un sustitutivo, aunque precario.

En tanto que los axiomas y resultados deberían traducirse totalmente a prosa, sólo habrían de hacerse concesiones secundarias al semimatemático en la exposición de la prueba. Pero queda otra cuestión de mucho interés para el lector no matemático. Son los posibles efectos de abandonar algunas de las hipótesis simplificadoras. Normalmente, el escritor puede adivinar tales efectos sólo empleando su criterio matemático. Por lo que únicamente los lectores matemáticos podrán pronunciar su veredicto sobre la valía de tales presunciones. Pero el lector no matemático estará muy interesado precisamente en estos efectos, y es, por consiguiente, esencial, que las consecuencias previstas de ellos se traduzcan exactamente al idioma que comprendan los matemáticos y los que no lo son.

Los editores pueden solicitar de los autores que tengan presentes estos preceptos al preparar artículos sobre Teoría Económica. Si bien no han de constituir más que una orientación; y el editor que insista en que se obedezcan literalmente, se expondrá a no publicar mucho en esta materia.

---

(8) Ver su analogía con el equilibrio de cierto número de bolas apoyándose la una en la otra, en un recipiente. "Principios de Economía". Libro V, Capítulo 1 y 16 y Apéndice 1, 3 pf. 4 y 5.



## VI

## LA SUPERVIVENCIA DE LA ECONOMIA MATEMATICA

*Robert Solow*

Me ha costado mucho trabajo juzgar lo que debe decir un participante en esta discusión. Indudablemente, la investigación (de cualquier clase) es una actividad más útil que los altercados. Empleando palabras de Edgeworth, "el margen de utilidad en el mundo, tanto intelectual como externo, diferirá con la personalidad de los individuos. No existe ninguna regla general, salvo que, como los atenienses cultos, deberíamos huir del menosprecio envidioso de los estudios ajenos".

Por alguna razón, Novick basa sus quejas en la afirmación de que los economistas literarios tienen una mentalidad demasiado unilateral para las palabras (o más bien para los símbolos). Al parecer, el economista literario, en su medio ambiente, se encuentra alerta y lleno de penetración; puede hablar acerca de la maximización de los beneficios, de manera perfectamente racional. Pero en cuanto aparece un  $\frac{dC}{dq}$  y  $\frac{dR}{dq}$  el desastre se cierne sobre él. Sufre errores. Detrás de cada ecuación ve dificultades sin cuento.

Sería pesado y reiterativo repasar aquí lo que son y para qué sirven las Matemáticas. Mi opinión es que son sencillamente un vocabulario inmensamente poderoso y eficaz para pensar sobre ciertos tipos de problemas. Pero creo que casi todos los economistas académicos saben esto, y me hallo perplejo ante la creencia contraria de Novick. Puesto que opino que su premisa básica sobre la cuestión de hecho es equivocada, no concedo mucha importancia al resto de sus quejas. Pero no puedo menos de admirar su decidido consejo a los ya asustados y temblorosos economistas literarios: abandonar la economía matemática como esotérica (traducción inglesa: lo que no entiendo). Cuanto trata de las Matemáticas, Novick está de acuerdo con Lady Bracknell en "La

importancia de ser Ernesto (formal)" (9); no aprueba nada que se oponga a la ignorancia natural.

Estoy completamente conforme en que se trata de un problema de entendimiento mutuo. Novick sugiere que los no matemáticos ignorasen la economía matemática, y que los economistas matemáticos se esforzasen en que les comprendan. Traducir a idioma corriente demostraciones matemáticas complicadas es un trabajo duro e ingrato. La mayor parte de la gente tiene otras cosas más interesantes en que ocuparse, otras investigaciones, lectura de libros, educación de niños. De todas formas, es de esperar que aumente esta clase de traducción y de exposición. Y es también posible que el principio de la igualdad de los rendimientos marginales estimule el esfuerzo de los no matemáticos (10). La comunicación debe efectuarse en ambos sentidos.

En la realidad hay una mano invisible que tiende a resolver por sí mismos tales problemas. Durante los últimos años, ha tenido lugar una lenta pero sensible transformación en la Teoría Económica. Es fácil recordar los artículos publicados en las revistas científicas hace diez o quince años (por ejemplo, el de Samuelson, sobre la interacción de los principios del multiplicador y de aceleración, o el de Metzler, sobre ciclos) que en aquel tiempo parecían matemáticas de una elevación sin precedentes. Mr. Novick las habría clasificado como "esotérica".

Hoy forman parte del vocabulario de todos los economistas. Podrían citarse, a este respecto, numerosos ejemplos. Abundan los economistas que, aunque no sean, ni mucho menos, matemáticos, no se asustan ante el pensamiento de diferenciar un sistema de ecuaciones para descubrir el efecto de un cambio en un parámetro sobre los valores de equilibrio.

¿Por qué la Teoría Económica se hace cada vez más matemática? ¿Por qué tantos estudiantes superiores desean incluir algo

---

(9) LADY BRACKNELL continúa: "La ignorancia es como una fruta delicada y exótica; se la toca y su lozania desaparece... Afortunadamente, en Inglaterra, la educación no produce ningún efecto."

(10) En contra de lo que afirma Novick, el "refugio" de los economistas matemáticos es todo menos precario. La mayor parte de los mismos conocen tanto sus propios escritos como los económico-literarios, aumentando constantemente el número de los que habitan ese precario "refugio".

de Matemáticas en su educación? ¿Por qué los editores de las revistas reciben cada día mayor número de artículos escritos, al menos parcialmente, en términos simbólicos? ¿Por qué la frontera entre los economistas matemáticos y los teóricos económicos generales se delimita cada vez más vaga e imprecisa? Como buen seguidor de Darwin, creo que todo esto no es casual. Sospecho que sucede así porque una parte importante, y que aumenta sin cesar, de lo interesante y valioso en Teoría Económica, durante los últimos veinte años (y más lejos aún si nos remontamos a Jevons, Marshall, Wicksteed, Wicksell, etc.), ha sido escrita por teóricos que han empleado las matemáticas. Si las técnicas matemáticas siguen contribuyendo en el futuro a producir buena economía, la mayoría de la gente interesada en Teoría Económica aprenderá, en lo sucesivo, algunas matemáticas (11). (Dicho sea de paso, ¿es la Teoría lo que realmente Novick deplora?)

¿Y qué opinar de la acusación de que gran parte de la Economía matemática es meramente trivial? Ello es cierto. Todos los economistas que aprenden cálculo comprueban que este poderoso instrumento ofrece soluciones notoriamente sencillas cuando se aplica a problemas fáciles. Pero la trivialidad es un fallo universal; se puede ser trivial en cualquier idioma, como lo demuestra una simple ojeada a las revistas científicas. El remedio contra ello es la fortaleza de carácter; no el atraso tecnológico. Los problemas deben dictar los métodos; no viceversa. Aparte de que cuando el conocimiento de las Matemáticas elementales se extienda desaparecerá la mayor dificultad.

En ocasiones se abusa del empleo de las matemáticas intentando dar un contenido económico impropio o inexistente a demostraciones puramente matemáticas. Más frecuentemente, el proceso es el siguiente: la intuición económica me dice que algo es verdad; ¿cómo puedo descubrir su certidumbre y probarla? En todo caso, es fácil para un lector experto distinguir una clase de Economía matemática de la otra.

---

(11) He considerado y rechazado otra respuesta a estas cuestiones, es decir, que existe una ley de Gresham según la cual la economía mala (matemática) expulsa a la buena (literaria). La ley de Gresham depende del hecho que la gente atesora la moneda infravalorada. No está probado que fascinantes ideas económico-literarias inéditas se almacenen en las arcas de la profesión.

Finalmente, se oye muchas veces esta pregunta: ¿Han llegado demasiado lejos los economistas en el empleo de las Matemáticas? Como si las Matemáticas fuesen la ginebra en el Martini de la Economía. La única prueba es el sabor y fuerza del resultado, su contenido económico; no la proporción de los ingredientes. Sobre esto la profesión (o selección natural de la oferta y la demanda) será la que juzgue.

## VII

### LAS MATEMATICAS EN LAS CIENCIAS SOCIALES (UN CATECISMO)

*Robert Dorfman*

La mejor manera de comentar el artículo de Novick es someterme yo mismo a un breve catecismo y comparar mis respuestas con las que se hallan, explícitas o implícitas, en la argumentación de Novick.

¿Qué son las Matemáticas? Es una presunción en un economista el intentar responder a esta pregunta; pero, para seguir la controversia, sostengo que las Matemáticas son la técnica de expresar relaciones normalmente mediante símbolos, de manera que se manifieste su estructura formal, y entonces, aprovechándose del conocimiento previo de las propiedades de tales estructuras formales, revelar relaciones ulteriores que no son evidentes inmediatamente. La ventaja de este procedimiento es su enorme economía. Consideremos, por ejemplo, la distinción entre productividad marginal y productividad marginal neta, que preocupa a J. B. Clark y a J. Robinson, entre otros. Es posible probar "ab initio" que estos dos conceptos son idénticos (J. Robinson lo hizo así); se ahorra un gran esfuerzo sabiendo que el problema se refiere a las relaciones entre ciertas derivadas totales y parciales, que se pusieron de manifiesto hace varias generaciones.

La mejor clave para la respuesta de Novick está contenida en la frase "es tiempo de que apreciemos la diferencia entre las Matemáticas como lenguaje y las Matemáticas como un método cuan-

titativo...". Novick parece opinar que existen dos clases de Matemáticas: una, puramente lingüística, y la otra que quizás corresponde al concepto que he propuesto. El viejo aforismo de que "las Matemáticas son un lenguaje" yace bajo su argumentación. Esta máxima es, en el mejor de los casos, sólo una verdad a medias; la parte verdadera es que las Matemáticas tienen un lenguaje, y que el primer paso al "elaborar Matemáticas" es traducir conceptos no matemáticos a ese lenguaje. También, como idioma, cumplen las Matemáticas un servicio. Todos los que conocen varios idiomas saben que, por ejemplo, hay expresiones que tienen sentido en francés, pero no en inglés, y viceversa. Igualmente existen cosas que se pueden decir en Economía literaria, pero que escapan a la formulación matemática. Sin embargo, muchos economistas olvidan la inversa: que hay cosas que se pueden expresar en Matemáticas, pero que no se pueden parafrasear, con una exactitud aceptable, en lenguaje ordinario. Recordemos, por ejemplo, esta vieja cuestión: ¿es el coste marginal el coste de la última unidad producida, o de la primera no producida?

Las Matemáticas no son ni un lenguaje ni un método cuantitativo, sino una rama de la lógica. No sé exactamente cómo distinguirla del resto de la lógica, y mi definición, aparte de la observación sobre los símbolos, serviría tanto para la lógica como para las Matemáticas. La nota distintiva de las Matemáticas se encuentra, probablemente, en la cantidad de conocimiento que se ha acumulado sobre ciertos tipos de relaciones formales.

*¿Las teorías científicas se prueban o no mediante las Matemáticas o la Estadística?*

La primera pregunta se hallaba en el campo matemático; ahora entramos en el dominio de la filosofía. Continuaremos con precauciones. La situación parece ser que las teorías científicas no se prueban nunca, pero que, lo mismo las Matemáticas como la Estadística, ofrecen criterios para la aceptación provisional de las teorías, con las finalidades y en el momento que son aceptadas. El criterio matemático consiste en que si dos teorías son lógicamente contradictorias no pueden ser aceptadas ambas, o lo que es lo mismo, si se acepta una teoría, deben serlo todas sus implicaciones lógicas. Según el criterio estadístico, al elegir entre varias teorías

internamente consistentes, se aceptará la que prediga con más éxito los fenómenos observados.

Dos de los párrafos de Novick se refieren a esta cuestión. La riqueza de las Ciencias Sociales se deriva, principalmente, del estímulo al pensamiento originado por el hecho de que pocos o ninguno de los teoremas utilizados son susceptibles de prueba absoluta y, por consiguiente, no pueden ser aceptados sin discusión. Esta fuente de riqueza, ¡ay!, está abierta a todas las ciencias; ninguna se halla paralizada por la desventura de la prueba absoluta.

El segundo párrafo importante es: "Las Matemáticas se utilizan principalmente en las ciencias sociales, como en la Química o Física teórica, y no como se aplican en la mecánica e ingeniería corrientes los resultados matemáticos de la teoría, probados por la Estadística en Física y Química." Así, pues, Novick sostiene que las teorías pueden probarse; y es más, mediante la Estadística. Aludiré brevemente a las razones por las que rechazo estos puntos de vista. En primer lugar, el acuerdo entre la observación y la teoría nunca es perfecto. Queda siempre la posibilidad de que se descubra una nueva teoría que implique menos discrepancias que cualquier otra ya aceptada. En segundo lugar, el criterio estadístico no es el único que debe satisfacer una teoría, puesto que la consistencia interna y con otras teorías aceptadas, no puede comprobarse mediante la Estadística. Una teoría puede ser suplantada por otra cuyo poder de predicción no es mayor, pero que sus implicaciones lógicas comprendan un sector más amplio del fenómeno. En tercer lugar, las observaciones no determinan únicamente una teoría. Por ejemplo, tanto las teorías cíclicas del subconsumo como del exceso de consumo, son consistentes, con los mismos datos. Al evaluar una teoría, la Estadística y las Matemáticas se complementan mutuamente; la primera, comprobando su relevancia empírica, y la segunda, su aceptabilidad lógica y su generalidad. No podemos esperar a la prueba.

*¿Es el papel de las Matemáticas diferente en las ciencias sociales, en las ciencias físicas y en la ingeniería?*

No lo es. En todos los casos las Matemáticas se usan para sacar a la luz las relaciones implícitas en los postulados que han servido como punto de partida. A juzgar por el último párrafo que he ci-

tado, Novick sostiene que el papel de las Matemáticas en la ingeniería es diferente al que desempeña en las ciencias físicas; que su papel en la Economía es análogo al que juega en las ciencias físicas, pero que debería ser similar al que desempeña en la ingeniería. Soy incapaz de apreciar esta distinción, ya que los ingenieros usan exactamente las mismas fórmulas que los físicos y los químicos.

*¿Son las Matemáticas necesarias en las ciencias sociales?*

Supongo que no. Es perfectamente concebible que todos los problemas se pudiesen resolver verbalmente, como es muy posible hallar que la raíz cuadrada de 196 es 14. Pero tales métodos serían no sólo penosos, sino ineficaces. Supondrían, en efecto, redescubrir o probar repetidamente teoremas matemáticos cada vez que surgieran en un tema nuevo. Eliminarían de la investigación a muchos hombres que son competentes para aprender y utilizar algunas matemáticas, pero no para reinventarlas donde y cuando fuera necesario. Yo sostengo, en efecto, que las Matemáticas son una necesidad práctica para la solución de muchos problemas económicos. Recordemos, por ejemplo, el complicado aparato que se precisó para resolver el "problema de identificación", planteado por E. J. Working en la década 1920-1930. Otro ejemplo es la teoría del equilibrio general. Nadie ha explorado con éxito las implicaciones del "bienestar", derivadas del equilibrio general, sin una amplia aplicación de las Matemáticas. Los tratamientos superficiales de este problema han conducido a falacias que deberían ser extirpadas, aun a costa del esfuerzo de tener que aprender Matemáticas.

Los físicos se han visto obligados a estudiar complicados análisis, y los mismos estadísticos se hallan implicados en las altas cimas de las teorías de la medida. Esto ha resultado ingrato para aquellos físicos o estadísticos que carecían de los instrumentos exigidos por el progreso de sus ciencias, pero nadie sostiene, por ello, que esos instrumentos sean inadecuados. Los economistas nos encontramos en la misma situación. Si las Matemáticas resuelven problemas intratables por otros procedimientos, no hay razón para atacar estas soluciones porque la mayoría de los profesionales no puedan entenderlas.

Las Matemáticas son una ayuda para razonar. Si pudiésemos prescindir de ellas, todos se alegrarían mucho a la vez que extenderían su auditorio. Pero algunos problemas importantes son demasiado difíciles para resolverlos de otra manera. Por ello, los economistas debemos aprender Matemáticas.

Novick podría negar esto a duras penas, y, sin embargo, escribió: "no es imposible que algún día los métodos económicos se apliquen a las ciencias económicas y sociales. Aunque ese día parece remoto..." Estoy de acuerdo en que ese día está lejano, y aventuraría, sólo como una predicción, la fecha de 1838 (Cournot).

*¿Son los resultados matemáticos frecuentemente incomprensibles y sujetos a interpretaciones erróneas?*

Desgraciadamente lo son. Esta es, desde luego, la principal acusación de Novick contra la economía matemática, y es realmente peregrina. Yo he tenido que discutir muchas veces sobre el hecho de que no puede atacarse a la Iglesia por los pecados de los clérigos, pero ésta es una de las pocas que he visto a la Iglesia condenada por los defectos de los laicos.

La falsa interpretación que preocupa a Novick se relaciona principalmente con la significación de los resultados matemáticos. Novick cree que algunos economistas considerarían un teorema matemático como algo que se ha establecido de modo absoluto, independiente de las hipótesis. Tales economistas, si existen, deben precaverse contra ese error. Lo que las Matemáticas permiten es apreciar, más clara y profundamente, las consecuencias de afirmaciones que pueden ser o no ciertas.

*¿Deberían los economistas matemáticos reproducir sus teorías en forma literaria?*

Novick les encarece para que lo hagan, y Marshall les da el mismo consejo. Yo disiento. Los profesionales de la economía matemática se hallan ya muy ocupados enfrentándose con los más duros problemas que presenta la ciencia, y es injusto imponerles la obligación de la claridad literaria. El talento literario y matemático no siempre coincide en la misma persona. Es difícil mejorar el entendimiento mutuo mediante traductores o divulgadores que adoptan la tarea ingrata de asimilar el contenido de las matemáticas para reproducirlo con tolerable exactitud en el idioma



corriente. La solución definitiva se encuentra en el lector profesional, que debe equiparse para leer lo que desea comprender.

Mi opinión es que cualquier discusión como la presente, sobre la legitimidad de los métodos económicos en la Economía, está condenada a ser estéril. La profesión no renunciará a poderosos instrumentos de razonamiento. El único problema real de este asunto es una cuestión de hecho: saber si los métodos matemáticos tienen alguna fuerza. Que la poseen ha sido demostrado repetidamente por los problemas que han resuelto y por los obstáculos que el razonamiento literario no ha sido capaz de superar.

### VIII

#### SOBRE EL EMPLEO DE LAS MATEMATICAS EN LA ECONOMIA

*Tjalling C. Koopmans \**

El Dr. Novick se ha unido al coro de exasperadas voces protestando de mil maneras, sin razón (12) o con ella (13) por el uso creciente del lenguaje matemático formal en el análisis estadístico y económico, y por la especialización consiguiente. Es posible que la protesta no vaya dirigida contra el empleo de instrumentos matemáticos utilizados desde largo tiempo en la Economía, como la representación en diagramas o el cálculo sencillo. La mayor parte de nosotros no hemos sido testigos de las batallas libradas sobre la utilidad de estos instrumentos, y decididas en épocas pasadas. Ahora se discuten otros conceptos que se han introducido más recientemente en la Economía, tales como matrices, teoría de con-

---

\* Debo agradecer a varios colegas de la "Cowles Commission" y, en particular, al profesor K. Arrow, de la Universidad de Stanford, sus valiosos comentarios al original de este escrito. La responsabilidad de los errores recae exclusivamente sobre mí.

(12) Véase, por ejemplo, F. WAUCH, "Aplicación de recientes adelantos en Metodología a la Economía Agrícola", *Journal of Farm Economics*, 35 (diciembre de 1953).

(13) Véase J. M. CLARK, "Economistas Matemáticos y los otros: En favor del entendimiento mutuo". *Econométrica*, 15 (abril, 1947).

juntos, ecuaciones de diferencias, procesos estocásticos, inferencia estadística y el método axiomático.

Existe una similitud notable entre la situación actual de la Economía y la que surgió en la Física después de 1930. El uso intensivo de la teoría de matrices y de la teoría de conjuntos, por los que elaboraban la mecánica del "quantum", dió lugar a fuertes protestas por parte de los físicos experimentales generales, y hasta por algunos teóricos. Se alarmaron ante las tendencias crecientes hacia un formalismo cuya función no estaba clara totalmente, ni siquiera para los creadores de las nuevas teorías. Sin embargo, ese clamor de entonces ha desaparecido, y la mecánica del "quantum" se ha convertido en una parte fructífera de la teoría física. El adelanto de la Física sobre las ciencias y las artes políticas y sociales es hoy la mayor amenaza a la civilización contemporánea.

Nada hay en las dificultades actuales de entendimiento entre los economistas matemáticos y no matemáticos —manifestadas tanto por el contenido como por el tono emocional de los comentarios del Dr. Novick— que no curará el tiempo y el esfuerzo. Casi todo lo que conviene decir sobre estas cuestiones fué ya expuesto elocuente y agudamente por los profesores Samuelson (14) y Stigler (15). Otra discusión igualmente interesante, por el profesor Allais (16), apareció quizá demasiado tarde para ser tenida en cuenta por el Dr. Novick. Es una pena que el Dr. Novick no haya aclarado su actitud ante los argumentos de Samuelson, en aquellos puntos de notoria discrepancia. Sin esta aclaración, "las Matemáticas como un método cuantitativo, tal como se emplea en las ciencias físicas, naturales y aplicadas", me parece todavía un caso —de verdadero éxito, por cierto— de "las Matemáticas como un lenguaje".

---

(14) PAUL A. SAMUELSON, "Teoría Económica y Matemáticas.—Una valoración." *Papers and Proceedings, American Economic Review*, 42 (Mayo, 1952), páginas 56-66.

(15) GEORGE J. STIGLER, "El Método Matemático en Economía", cuarta de las *Five Lectures on Economic Problems*, pronunciadas en la *London School of Economics* (New York, 1950).

(16) M. ALLAIS, "La utilización del instrumento matemático en la Economía". *Econometría*, 22 (enero, 1954), págs. 58-71.

En algunas de sus afirmaciones, el Dr. Novick atribuye al razonamiento matemático (cuando aplicado al mundo físico) un poder de establecer la validez de las proposiciones, sin referirlas a un grupo de premisas. Y teme que el lector carente de estudios de Economía matemática atribuya tales poderes a las demostraciones matemáticas en Economía. Pero, incluso en Álgebra, Geometría o Física, el razonamiento matemático es sólo una técnica para averiguar las implicaciones de premisas dadas. No hay "prueba" matemática, ni de otra clase, de ninguna afirmación, excepto a partir de las premisas. La "prueba" sólo establece una dependencia entre la validez de la conclusión y la validez de las premisas.

No puedo suponer que el economista medio o el científico social, a quien se refiere el Dr. Novick, sea tan ingenuo. Ni he encontrado a ningún expositor de teorías económicas matemáticas que haya pretendido impresionar a los crédulos empleando el instrumento al que se imputan poderes sobrenaturales. Es verdad que nuestra cultura pasada y presente ofrece ejemplos numerosos del uso de símbolos esotéricos que sirven para impresionar más que para comunicarse con los demás. (Desde las fórmulas del médico hasta el empleo del latín en las ceremonias religiosas.) Si se sospecha de los economistas matemáticos que incurren en tales prácticas, son víctimas de circunstancias anormales.

Las diferencias relevantes entre las diversas ciencias mencionadas, residen en la naturaleza de las premisas y en la confianza que inspiren. En las Matemáticas puras —reino de las ideas por excelencia— vale cualquier grupo de premisas o axiomas no contradictorio, aunque se suele añadir la exigencia estética de la independencia lógica de los axiomas. Además de esto, el factor psicológico del interés de la investigación influye en la elección de las teorías matemáticas que se elaboran. Quizás un criterio más objetivo, adoptado últimamente por algunos, aunque no todos los matemáticos, es su posible importancia para aplicaciones fuera de las Matemáticas.

En Ingeniería, Química y Física (excepto en "las fronteras del conocimiento"), se han encontrado premisas cuyas numerosas implicaciones han resistido con tanto éxito las pruebas de la observación y la experimentación que tales premisas son frecuentemente calificadas como leyes de la naturaleza. En Economía descriptiva

(dejando aparte el aspecto normativo de la Economía), las oportunidades para la experimentación son escasas (o inexplotadas); y, por ello, somos mucho menos afortunados en establecer las premisas con firmeza. Frecuentemente, premisas como la maximización de la utilidad o de los beneficios han sido adoptadas como hipótesis de trabajo sobre la base provisional de observaciones más bien generales o introspectivas, en gran parte a causa de la importancia de sus implicaciones *si son ciertas*, aunque las oportunidades para comprobar dichas implicaciones *sean pocas*.

Lo adecuado del razonamiento matemático en Economía no depende de cuan firme o vacilantemente se establezcan las premisas. Supongamos, dentro de nuestra línea argumental, que el intento de establecer premisas o, por lo menos, de explorar sus implicaciones, merece la pena, es decir, que la Economía, en sí misma, tiene interés. En este caso, la justificación de la Economía matemática depende simplemente de si los eslabones lógicos entre las premisas básicas planteadas por los economistas, y muchas de sus implicaciones observables o por otro motivo interesantes, se han establecido más eficazmente mediante el razonamiento matemático que por el verbal. No es necesario insistir en el éxito del razonamiento matemático en muchas clases de problemas importantes. Sin embargo, añadiré que muy recientemente se ha demostrado totalmente el carácter no contradictorio de las premisas de la teoría del equilibrio económico en régimen de competencia, y que ello se consiguió en una serie de estudios (17) empleando el instrumento de la topología que hasta aquí no se había utilizado en Economía. ¿Hay alguna cuestión más básica en la Teoría Económica contemporánea? ¿Hay algún instrumento menos conocido

---

(17) A. WALD, "Sobre algunos sistemas de ecuaciones de la Economía matemática". *Econometrika*, 19 (octubre, 1951), págs. 368-403, traducido del original alemán in *Zeitschrift für Nationalökonomie*, 7 (1936), págs. 637-70. En algunas notas y al final del artículo se cita literatura anterior, en alemán, por Wald y otros.

J. VON NEUMANN, "Un modelo de equilibrio económico general". *Review of Economic Studies*, 13 (1945-46), págs. 1-9, traducido del original alemán en *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums*, vol. 81 (1937), págs. 73-83.

KENNETH J. ARROW y GERARD DEBREN, "La existencia de equilibrio para una economía en régimen de competencia". *Econometrika*, 21 (julio, 1954).

tanto para los economistas literarios como para los matemáticos?

Este ejemplo, así como los ofrecidos por Samuelson y Stigler, se refieren a cuestiones de "teoría". La necesidad de las Matemáticas es asimismo muy considerable en el trabajo empírico. La dificultad de estudiar interrelaciones complejas, que existe ya en la "teoría", se agrava aquí por la de tener que extraer consecuencias sobre las relaciones de un número limitado de observaciones no experimentales, que son difíciles de crear. Sin el apoyo de la Teoría Económica y de la Estadística, gran parte de la información contenida en esas observaciones no puede aplicarse a preguntas relacionadas con los efectos de políticas económicas, para las que hacen falta respuestas.

A los pocos economistas que han invertido el tiempo y el esfuerzo necesarios en comprender y utilizar estos instrumentos matemáticos y estadísticos, no les resulta práctico aceptar la petición del Dr. Novick de reproducir verbalmente los eslabones de su razonamiento. Habremos de confiar en que los economistas matemáticos descubran y corrijan sus propios errores, como se realiza en otras especialidades. No obstante, el economista general precisa de una exposición verbal, completa y clara, de las premisas y las conclusiones, a las que acompañarán explicaciones de los motivos de los problemas particulares considerados y de las construcciones teóricas empleadas.

En algunos casos, los creadores de las teorías económicas matemáticas ofrecen esas explicaciones. Otras veces prefieren no añadir nada a la escueta lógica de un problema (curiosa tendencia que los matemáticos puros manifiestan más acusadamente) porque consideran cualquier discusión de los motivos, importancia u objetivos subsiguientes, como una mezcla indescable de elementos subjetivos. Bien sea que esta actitud refleje verdadera sabiduría o falsa modestia, resultará, de todos modos, más eficaz, en algunos casos, que otras mentes actúen como intermediarias y proporcionen la traducción y evaluación necesaria de los estudios técnicos. Y, desde luego, se necesita urgentemente el entendimiento mutuo para evitar la más seria consecuencia de la actual "dificultad de lenguaje": los economistas tienden, más que a impresionarse, a pasar por alto la significación de las aportaciones realizadas por el análisis matemático a la Economía, porque no disponen de una

verdadera oportunidad para asimilar y valorar su contenido. Cualquiera camino que se siga para comunicarse, exigirá mucho tiempo. Como cada día aumenta el número de instrumentos matemáticos, el economista matemático precisa dedicar mucho tiempo a explorar y aprender teorías matemáticas que no se han empleado anteriormente en Economía. Para que progrese en sus tareas necesita comunicarse más con los matemáticos que con los economistas (18). Esto influye, inevitablemente, sobre el estilo de sus trabajos.

Probablemente, la irritación causada por estas cuestiones es pasajera; como es inevitable el proceso de integración gradual de los recientes acontecimientos en Economía matemática, dentro del cauce principal de discusión económica. Este proceso puede acelerarse si las voces de protesta concretan más. Ni el profesor J. M. Clark ni el Dr. Novick han ordenado sus objeciones ni han planteado cuestiones sobre los artículos particulares que han provocado su decepción (19). Los problemas sobre la relevancia y motivación de cualquier pieza de análisis económico conciernen e incumben a todos los economistas. Por tanto, las controversias específicas de esta clase (20) serán convenientes para los economistas matemáticos.

---

(18) Por este tipo de razones, discrepo, quizás con Samuelson, en un punto. En su párrafo final, tal vez para calmar susceptibilidades y aprensiones, afirma "que la especie del economista matemático puro parece destinada a extinguirse". Si fuera cierto lo consideraría como una pérdida. Pero no lo creo así. Desde luego, no es verdad por lo que se refiere a la oferta. Mi confianza en la tolerancia y visión de los economistas me hace esperar que tampoco sea cierto en lo relativo a la demanda.

Por razones similares anotaré otro desacuerdo con Stigler. Atribuye "el fracaso del economista matemático de ofrecer esas traducciones" (es decir, las hipótesis y las conclusiones del análisis matemático en forma verbal) a pereza o "snobismo", o vergüenza por la abstracción del análisis. Aunque han aparecido varias traducciones desde que se afirmó lo anterior, la ausencia de un mayor número se explica por la simple consideración de que los pobres autores necesitan tiempo para consolidar sus avances antes de que verdaderamente puedan invocar la realización de aportaciones valiosas. ¡Un poco de paciencia, por favor!

(19) Ni el profesor Allais, en aquella parte de sus observaciones donde señala el abuso del formalismo matemático.

(20) Para que el editor de esta Revista (R. of E. and S.) no dude en imprimir una llamada que pueda implicar a la Revista en más polémicas de las que

## IX

ALGUNOS ASPECTOS PSICOLOGICOS  
DE LAS MATEMATICAS Y LA ECONOMIA*Paul A. Samuelson*

Las Matemáticas presentan un problema psicológico para todos los economistas de la generación actual. Cada uno afronta la situación a su propio modo. Algunos elevan sus sentimientos y pasan de la Teoría Económica a la Historia de las doctrinas, o... a la Economía laboral. Otros pasan soporíferos fines de semana rumiando los primeros capítulos del inapreciable manual de R. G. D. Allen; y no faltan quienes logran alcanzar un cierto equilibrio pensando que "las uvas están verdes".

Por supuesto que estas alusiones psicológicas nada tienen que ver con los profundos problemas sustantivos de la metodología científica. Mi opinión sobre estas cuestiones, y sobre los frutos prácticos de las Matemáticas, la he expresado en otro lugar (21). Efectuaré ahora algunas observaciones que pueden ofrecer interés.

---

desea, añadiré, con permiso de los editores de *Econometría*, que la sección "Comunicaciones" (anteriormente denominada "Invitación a la Crítica"), de dicha revista, está abierta, y desde luego se estableció con este propósito.

(21) Koopmans da la referencia exacta en su nota 14. Acepto su corrección a mi conjetura empírica de que la raza de los economistas matemáticos puros tal vez se esté extinguiendo. Añadiría también que el desacuerdo entre Dorfman y yo sobre el sentido en el que las Matemáticas son un lenguaje desaparecerá en cuanto se sepa que considero la lógica como un lenguaje, exactamente en el mismo sentido. No mantengo ninguna discrepancia fundamental con la admirable lista, confeccionada por Tinbergen, de los elementos que entran en cualquier aportación a la Economía; pero semánticamente preferiría reemplazar su contraste entre el empleo y no empleo de las Matemáticas por el del uso de la inducción y la deducción. En mi opinión, el razonamiento matemático es de la misma naturaleza que todos los razonamientos lógicos, ya se exprese la lógica por medio de palabras, diagramas de Euler, o símbolos. Esto plantea otra cuestión tratada por Tinbergen. Como no conozco el holandés, no puedo estudiar su escrito metodológico citado; pero, por lo que indica, me preguntaría si a los silogismos corrientes de la lógica no se les puede dar la formulación de una "ecuación simultánea", haciéndolos formalmente idénticos a las formulaciones matemáticas convencionales.

1. Se piensa que las Matemáticas es un juego de jóvenes. Es verdad que se aprenden más fácilmente en la juventud que en épocas más tardías. Y es históricamente cierto que los mayores logros en Matemáticas puras han sido alcanzados por hombres en plena juventud. Sin embargo, he observado el hecho consolador de que las Matemáticas "aplicadas" se emplean satisfactoriamente por personas de edad. Pigou, E. B. Wilson y otros muchos, ofrecen ejemplos de hombres que han conservado su gusto por el trabajo creador durante muchas décadas.

2. Existe una opinión, que yo compartía, de que las Matemáticas, cuando son puras o aplicadas a la Física, son bellas intrínsecamente, en tanto que las Matemáticas en la Economía son de un orden estético inferior. Creo que esta opinión es equivocada. La misma teoría ricardiana de los costes comparativos es bonita, y no dejéis que ningún "snob" matemático os persuada de lo contrario. Pero no quiero ser mal interpretado. Parte de la belleza de las matemáticas aplicadas depende de su aplicación a la realidad. Se produce mayor placer respetando las reglas del juego; y estas reglas en la Teoría Económica establecen que las creaciones deductivas tengan *relevancia empírica*. ¿Quién desea victorias fáciles?

3. Nadie negará que algunas investigaciones matemáticas son, en Economía, más bien triviales. Se puede encontrar, por lo menos, una razón psicológica de ello: la idea clásica de que los costes o penas pasadas producen valor se extiende a la esfera creadora; por eso, si hemos trabajado mucho en alguna cosa gana en valor a nuestros ojos por esa exclusiva razón, e independientemente de sus méritos prácticos. He observado bastantes casos en los que un economista ha realizado un largo y difícil trabajo creador, hallándose, al final, fascinado por su logro (22).

Esto sucederá seguramente a los matemáticos flojos y deficien-

---

(22) He aquí un ejemplo personal. Cuando era un joven estudiante que no sabía cálculo, aprendí las reglas de Joan Robinson, para relacionar el ingreso marginal con el ingreso medio. A la sazón aprendía algo de geometría analítica y me enteré de la regla para diferenciar una sencilla potencia  $X_n$ , de forma que escribí un polinomio general, lo diferencié penosamente para obtener la ecuación de dicha tangente y apliqué la regla geométrica de Robinson para las



tes. Parece que el remedio se encuentra en que los economistas sean mejores matemáticos. Pero ello no resuelve totalmente el problema.

Porque, independientemente de las Matemáticas que se estudien, existe una frontera en la que todo se hace difícil: trabajando con premisas más generales (en las que se abandone, por ejemplo, la hipótesis de la continuidad) se conseguirá complicar cualquier problema. El buen juicio del teórico determinará la solución óptima al discernir el tratamiento que cada problema merece y que sus lectores desearán.

Aunque es un buen consejo indicar a los economistas que aprendan más matemáticas, muchos progresarán poco, y de ello parece desprenderse que deberían apartarse totalmente de la economía matemática. Reflexiones basadas en los costos comparativos corroboran esa conclusión. Sin embargo, disiento enérgicamente de la idea carlyleana sostenida por Colin Clark y otros; según ella, sólo las preclaras inteligencias de cada generación deberían ser teóricos económicos. Los demás deben dedicarse a la recogida de datos para que los genios los conviertan en grandes principios. Yo creo que el conocimiento se forma con muchos sumandos, y que la historia de las doctrinas económicas enseña que el progreso se deriva de diversas e impredecibles fuentes.

4. Mi última observación psicológica parecerá, a primera vista, contraria a la anterior, en la que sostenía que el científico sufre a veces espejismos sobre el valor real de su trabajo debido al esfuerzo que le ha costado. Razonaré ahora de forma diferente. Al final de un razonamiento deductivo, cuando ya comprendemos las implicaciones de nuestras premisas y sabemos exactamente cómo conducen a diversas conclusiones y teoremas, se produce, casi inc-

---

rectas; al fin, después de no cometer milagrosamente ningún error algebraico, en la larga cadena del razonamiento, alcancé el resultado de  $d$

$$[x p(x)] / dx = p(x) + x dp(x) / dx,$$

que tiene una interpretación literaria obvia. Por supuesto que si hubiese sabido la regla más sencilla de obtener la derivada de un producto de dos funciones hubiese llegado inmediatamente a ese resultado, y no sólo para los polinomios, sino para todas las funciones. Pero estoy seguro que no me hubiese quedado nunca tan impresionado con el resultado, de no haberlo logrado mediante una súbita y hermosa simplificación, después de haber sudado largo rato.

vitablemente cierta desilusión. “¿Esto es todo?”, pensamos. “¡Cuán obvio!”

Recordemos la famosa afirmación de Newton: “No sé lo que pareceré al mundo, pero para mí soy como un muchacho que juega en la playa y se divierte en encontrar una piedrecita más suave o una concha más hermosa que lo ordinario, mientras el gran océano de la verdad yace impenetrable ante mí.”

Casi todos los comentaristas han tomado esto como excesiva modestia, falsa o genuina. Yo no estoy de acuerdo. Creo que es una reacción totalmente honrada y característica. Otro gran número de grandes pensadores, como Lagrange y muchos más, compartieron sentimientos análogos. Ernst Mach, el físico, se expresa igualmente: “... todo principio general, además de lucidez, produce desilusión. Implica desilusión cuanto que en él reconocemos hechos conocidos e incluso instintivamente percibidos mucho tiempo antes; y lucidez, porque nos permite contemplar los mismos hechos —aunque más claros y definidos— a través de complicadas relaciones”.

¿Por qué me ocupo de este aspecto psicológico? Porque frecuentemente individuos con escaso bagaje matemático, entre los que se incluye Novick, consideran necesario trabajar sobre las conclusiones lógicas de alguna rama de la Economía matemática. Ello se puede conseguir con esfuerzo, porque es completamente cierto el dicho de que “lo que un tonto aprende puede aprenderlo otro”. ¿Qué sucede cuando, finalmente, asimila el contenido de la Teoría? Seguramente dirá: “¿esto es todo? Si yo, pobre de mí, con mi infinita ignorancia, lo comprendo fácilmente, ¿por qué tanto alboroto?”.

Esta desilusión, explicable por las razones que acabo de descubrir, conduce de forma natural, pero ilegítima, a la suposición de que algún charlatán ha sido cogido cometiendo un timo. En realidad, para los adeptos a los símbolos, no ha habido alboroto ninguno. Por el contrario, el asunto se ha despachado de la forma más sencilla hasta alcanzar sus conclusiones, de sentido común (pues todas las consecuencias lógico-matemáticas describen únicamente implicaciones de sentido común).

Charlatanes y estudiosos poseídos de sí mismos abundan en todos los campos. Pero nadie que estudie seriamente las tensiones

psicológicas y la tirantez existente entre los economistas literarios y los matemáticos, las atribuirá a profesionales de segundo orden que especulan con los símbolos. Fueron Cournot, Walras, Edgeworth, Pareto —y también Marshall— quienes perturbaron la existencia de la generación más antigua de economistas. Y hoy son Pigou, Hicks, Hotelling, Koopmans, Frisch —¿para qué citar más?— los que plantean graves problemas a los estudiantes. Sólo si se acepta la opinión de Novick —que toda la obra de ellos ha sido trivial— se considerará de importancia la cuestión del charlatanismo. El problema verdadero es mucho más profundo, y creo que persistirá durante largo tiempo.

### UN COMENTARIO DEL EDITOR

Deseo, ante todo, expresar mi agradecimiento a los que han contribuido a esta controversia (y especialmente al profesor Samuelson por su ayuda editorial), quienes han arrojado luz sobre el asunto de la Economía matemática, no sólo para los lectores, sino también para el editor, que se encuentra entre el deseo de publicar aportaciones al conocimiento, aunque no las comprenda, y la obligación de contar con sus suscriptores, la gran mayoría de los cuales no están capacitados para leer Economía matemática.

He aquí una cuestión editorial de difícil respuesta: ¿cuántos y qué artículos matemáticos debería aceptar el editor? Esta duda aumenta ante las contestaciones dadas en el informe de Bowen (por profesores de escuelas graduadas) en relación con la capacidad actual de los candidatos a Doctores, para utilizar Matemáticas en el análisis económico. Las proporciones fueron: buena, 2 por 100; aceptable, 41 por 100; deficiente, 44 por 100; incierta, 7 por 100; sin respuesta, 6 por 100; y los conocimientos matemáticos de los aspirantes a grados de licenciatura (*master of arts*) es menor, y menor también la de los estudiantes antiguos en comparación con los actuales (23). El hecho es que, en los últimos veinticinco años, las instituciones de enseñanza superior de Estados Unidos y Canadá han expedido casi 4.000 títulos de doctor en Economía (300 por

---

(23) H. R. BOWEN, "La educación superior en Economía", *A. E. R.*, XLIII (Febrero, 1953), pág. 134.

año, desde 1945-1946 al 1950-1951), y deben de existir otros 500 a 1.000 doctores en activo. Se aprecia claramente que, a pesar del mayor interés que despiertan hoy las Matemáticas, transcurrirá mucho tiempo antes de que la mitad de los economistas sean capaces de comprender lo que se publica, por ejemplo, en "Econometría". Tanto los profesores como los estudiantes, según se desprende del informe Bowen, se precatan de las necesidades y se hallan igualmente confusos respecto a la solución. Que la escasa preparación matemática es un viejo problema para los economistas lo demuestra el hecho de que durante un periodo de sesenta y cinco años, sólo un presidente de la Asociación Económica Americana (Fisher) fué un matemático competente. Tiene también interés que, según el informe de Bowen, sólo el 9 por 100 de los profesores de escuelas graduadas sostienen que la Economía matemática o la Econometría se hallan infraestimadas.

Las colaboraciones aquí recogidas revelan que los economistas matemáticos tienen una gran fe en la potencia de las Matemáticas como instrumento aplicable a la Economía. Su deseo y hasta ansiedad por exponer su caso es, en sí mismo, sintomático. No han mostrado el mismo entusiasmo los economistas literarios, quizás porque, como Pigou, creen que "las objeciones de personas que no saben Matemáticas son como objeciones a la literatura china de quienes no pueden leer chino...". Hasta alguien, tan poco conocedor de las Matemáticas como el que esto escribe, se ha impresionado al conocer las aportaciones que pueden realizarse gracias al empleo de las Matemáticas (24).

Como editor, invito a los colaboradores potenciales que utilizan Matemáticas que examinen las siguientes conclusiones que parecen desprenderse de todo lo dicho.

1. *El economista matemático tiene la responsabilidad de que su exposición sea inteligible para sus lectores.*—El profesor Tinber-

---

(24) Por ejemplo, SAMUELSON, sobre la interacción de los principios del multiplicador y de la aceleración; DOMAR, sobre la relación entre el crecimiento de la deuda pública, la renta y los costos de financiación; LEONTIEF, sobre el análisis input-output; TINBERGEN, sobre las elasticidades de la demanda. Véase especialmente el brillante ensayo de LEONTIEF, "Las Matemáticas en la Economía". *Bulletin of the American Mathematical Society* (1954).

gen (y otros) recomienda que, al menos las hipótesis y las conclusiones, se pongan en forma comprensible para los no matemáticos, y también que se utilicen ejemplos sencillos, siempre que sea posible. Pero Tinbergen demuestra que no es siempre práctico traducir un razonamiento a lenguaje no matemático. (En este punto, Tinbergen discrepa de Marshall, buen matemático a la par que economista, porque Marshall destruiría las Matemáticas que no pueden traducirse para el lector no matemático. Aquí, Marshall parece más próximo a Novick que, por ejemplo, Dorfman, quien considera a las Matemáticas no solamente como un lenguaje, sino también como una "Técnica para expresar relaciones").

Los profesores Koopmans y Solow parecen menos preocupados por la responsabilidad de lograr un buen entendimiento: "... prefieren (los economistas matemáticos) no añadir nada a la ecuación lógica de su problema (curiosa tendencia que los matemáticos puros manifiestan más acusadamente) porque consideran cualquier discusión de los motivos, importancia y objetivos subsiguientes, como una mezcla indeseable de elementos subjetivos". (Koopmans.)

2. *El economista no matemático debe confiar en el matemático para el descubrimiento de posibles errores.*—Esto es inevitable, ya que la mayor parte de los economistas no saben Matemáticas. Los errores no son monopolio de los economistas matemáticos o no matemáticos. Cuanto menos personas capaces de comprender haya, es decir, cuanto más esotérica sea una materia, mayor será el peligro de que no se descubran los errores. Tal vez esto explica por qué no se descubrió durante muchos años uno cometido por un famoso matemático (¿Cournot?) cuando probó la conveniencia del proteccionismo (¿o era el comercio libre?), y, a causa de un desliz matemático, había demostrado precisamente lo contrario.

3. *El economista matemático tiene otras responsabilidades.*—Como dice Tinbergen, debería empezar con ejemplos sencillos y, sobre todo, no abusar de sus matemáticas. "Si el análisis es efectuado por personas demasiado entusiastas de las Matemáticas pueden o bien descuidar esas funciones (que requieren un tratamiento no matemático) o aceptar ciertas hipótesis básicas porque sean fácilmente tratables matemáticamente. Si haciendo esto escogen hipótesis irreales no rinden ningún servicio a la Economía."

4. *El economista debe aprender Matemáticas.*—Este es un buen consejo. Pero aquí se presentan problemas casi insolubles, como ha demostrado el informe de Bowen. Desde un punto de vista práctico, parece aceptable la solución que ofrece el informe Bowen, según el cual deberían existir tres tipos de economistas: a), economistas (o matemáticos) preparados para economistas matemáticos; b), lectores matemáticos, y c), por lo menos, conocedores de un mínimo de Matemáticas. En la próxima generación sería menos grave el problema del empleo de las Matemáticas y de la transmisión de los resultados; pero ello no soluciona suficientemente la situación actual.

5. *El empleo de las Matemáticas es conveniente también con fines ahorrativos.*—De espacio, sí. No estoy seguro de que resulte siempre más barato el coste de imprenta, y dudo que se economice tiempo, excepto por los que poseen una enorme preparación matemática. Alfredo Marshall dijo en una ocasión: "Parece dudoso que se emplee bien el tiempo en la lectura de largos textos económicos expresados matemáticamente si no han sido elaborados por uno mismo" (25).

Por último, es lástima que el Dr. Novick no haya recibido apoyo de los no matemáticos. Desgraciadamente, puede recibir poca ayuda del que esto escribe; pero pueden interesar a algunos las opiniones de Marshall, Keynes y Pigou, economistas que ciertamente no ignoran las Matemáticas (26).

Para Marshall, las Matemáticas eran un lenguaje taquigráfico más que una máquina de investigación. El profesor Samuelson me hace notar que Marshall empleaba las Matemáticas para sus investigaciones en privado, pero no públicamente, es decir, no se comunicaba con los demás a través de las Matemáticas. En 1906 escribió "que de un buen teorema matemático que utilice hipótesis económicas es muy improbable que salga buena Economía", y dijo a Fay que "esta parte de la Economía se halla ahora muy sobrecargada". En su revista (recensión) de Edgeworth, manifestó

(25) J. M. KEYNES, "Essays in Biography", pág. 193.

(26) Véase especialmente: A. C. PIGOU (ed), "Memorials of Alfred Marshall" y "Alfred Marshall and Current Thought"; J. M. KEYNES: 1), "Essays in Biography"; 2), sobre "Jevons en el Journal of Royal Statistical Society" (1936), y 3), "General Theory of Employment, Interest and Money".

un gran temor de que dicho economista fuese desbordado por sus matemáticas.

Según Pigou, Marshall desconfiaba de la economía matemática porque en la vida real las variables son tan numerosas, y se hallan tan interrelacionadas entre sí, que cualquier intento de plasmarlas en lenguaje matemático complicaría el problema desmesuradamente, y la omisión de las necesarias para que el problema sea manejable, daría lugar a una construcción irreal. Más tarde, Keynes atacó el empleo de las Matemáticas por razones similares, y, especialmente, por su fracaso en incluir variables relevantes, además de excluir las interrelaciones entre las llamadas variables independientes. Pigou, concluye: "Con todo, no puedo pensar que Marshall hubiese condenado a un hombre de mentalidad matemática —Frank Ramsay, por ejemplo— por estudiar los problemas económicos reales con ayuda del aparato matemático" (27).

Volvamos a Keynes. Creo que mi distinguido colega, el profesor Leontief, comete una injusticia con Keynes, cuando le atribuye la opinión de que la Economía matemática es "pura mezcla" (28). (La cita completa vendrá después.) No es preciso sino leer los ensayos de Keynes sobre Jevons, Ramsay y hasta Marshall, para convencerse de que Keynes se percataba de la importancia de las Matemáticas. Bueno será recordar que Keynes destacó en Matemáticas, tanto en el colegio como en la Universidad. Abandonó el cultivo de las mismas, sólo cuando descubrió que no podría competir en los máximos niveles con los matemáticos de primer rango. Keynes quedó impresionado de la utilidad de las matemáticas, cuando numerosos economistas (Harrod, Hicks, Samuelson, Bryce) aclararon confusiones en su "Teoría General" y presentaron su sistema nítidamente con la ayuda de las Matemáticas.

Como Marshall, Keynes creía que se abusaba de la Economía matemática. Ello se desprende de lo siguiente (29):

"La economía matemática ejerce, frecuentemente, una fascinación e influencia excesivas sobre los estudiantes

---

(27) A. C. PIGOU, "Alfred Marshall and Current Thought", pág. 11.

(28) "Las Matemáticas en la Economía", op. cit., pág. 215.

(29) "Essays in Biography", pág. 191.

que se inician en la materia sin una fuerte preparación previa en Matemáticas. Resulta lo bastante sencilla para ser comprendida por casi todos, y, sin embargo, permite al estudiante, en pequeña escala, saborear las delicias de las construcciones puramente formales, a la par que coloca en sus manos ladrillos de juguete que puede manipular él mismo; lo cual supone un nuevo atractivo para quienes no han contemplado la gigantesca arquitectura y los bellísimos monumentos de las matemáticas modernas.”

Keynes, que se apoyaba en la intuición, no sobrevaloraba la importancia de las Matemáticas (30):

“El profesor Planck, de Berlín, famoso creador de la Teoría del *Quantum*, me contaba una vez que en su juventud había pensado en estudiar Economía, ¡pero le había parecido demasiado difícil! El profesor Planck podía dominar todo el contenido de la Economía matemática en pocos días. No quería decir eso, sino que la amalgama de lógica e intuición y el vasto conocimiento de hechos, la mayoría de los cuales son imprecisos, que se necesitan para la interpretación económica en sus formas superiores, es, sin duda alguna, extraordinariamente difícil para aquellos cuya principal cualidad radica en el poder de imaginar y perseguir hasta sus últimas consecuencias las implicaciones y condiciones previas de hechos comparativamente sencillos, que se conocen con un alto grado de precisión.”

La intuición precede al análisis, dijo Keynes interpretando a Marshall (cf. Chipman a este respecto) (31):

“Pero fué una verdad esencial que sostuvo firmemente, que aquellos individuos que están dotados de un genio especial para la materia y tienen una intuición económica poderosa, acertarán con más frecuencia en

---

(30) *Ibid.*, págs. 191-192.

(31) *Ibid.*, pág. 232.



sus conclusiones y presunciones implícitas que en sus explicaciones y afirmaciones explícitas.”

No sólo confiaba más en la intuición que en las Matemáticas, sino que criticaba el uso de pseudomatemáticas, que ocasionaban errores (32) (obscrvese, especialmente, el último párrafo de la cita):

“El objeto de nuestro análisis no es proporcionar una máquina o método de manejo ciego que suministrara una respuesta infalible, sino proveernos de un método organizado y ordenado para pensar sobre problemas particulares: y después de que hayamos alcanzado una conclusión provisional aislando los factores uno a uno, tenemos entonces que volver sobre nosotros mismos y descubrir, dentro de lo posible, las probables interacciones que existan entre los mismos factores. Esta es la naturaleza del pensamiento económico. Cualquier otro modo de aplicar nuestros principios formales de pensamiento (sin los cuales nos perderíamos en la selva) nos llevará a error. Es un gran defecto de los métodos simbólicos pseudomatemáticos para formalizar un sistema de análisis matemático, el que expresamente supongan una estricta independencia entre los factores, perdiendo toda su fuerza lógica y autoridad si esta hipótesis es desechada; mientras en el razonamiento ordinario donde no operamos ciegamente, sino que sabemos todo el tiempo lo que hacemos y lo que las palabras significan, podemos mantener las necesarias reservas y cualificaciones, así como los reajustes que debemos efectuar más tarde, en tanto que las complicadas diferenciales parciales no pueden “cualificar” varias páginas de álgebra. Una parte excesiva de la Economía matemática reciente es simple mezcla, tan imprecisa como las hipótesis iniciales sobre las que descansa, que hacen perder al autor visión de las complejidades e interdependencia del mundo real, en un laberinto de símbolos pretenciosos e inútiles.”

---

(32) “The General Theory of Employment, Interest and Money”, pág. 297.

Keynes quería hacer de la Economía, sobre todo, un instrumento útil para remediar las enfermedades económicas; y parecía opinar —como muchos de los que han colaborado a la polémica que nos ocupa se quejan de la mala distribución de los recursos entre el trabajo técnico y el empírico— que se concede demasiado tiempo a la Economía matemática, muy alejada de las exigencias de la vida; descuidando, en cambio, la comunicación entre los economistas.

En resumen: este editor espera que el economista matemático tendrá presente el hecho de que, aun cuando el aprendizaje de las matemáticas disminuirá la gravedad del problema, actualmente sólo el 10 por 100 de los lectores de la revista económica media, en Estados Unidos y Canadá, comprende la Economía matemática (excluyo a los lectores de "Econometría" e incluso del "Journal of the American Statistical Association"). De donde se infiere que el problema del entendimiento entre los economistas sigue siendo serio. Por consiguiente, el economista matemático tiene la responsabilidad de comunicar sus resultados al no matemático; y no debe abusar de las Matemáticas, tanto al elegir los problemas como al tratarlos.

Los demás deberemos, siempre que sea posible, aprender Matemáticas. Las desventajas de los economistas que no las poseen tienden a aumentar.

Terminaré citando la opinión publicada por Harrod y Robinson, editores del "Economic Journal" (33):

"Consideramos tan inevitable como conveniente que en algunos casos los autores deseen presentar su trabajo matemático. Pero creemos que muchos de nuestros lectores lamentan el reciente aumento de la barrera lingüística entre ellos y tales autores. Al elegir los artículos, los editores deben tener en cuenta la difusión que cabe esperar alcance el artículo, y den alguna preferencia en cada número a los autores cuyos escritos sean inteligibles para una proporción razonable de nuestros lectores. Sugerimos que los autores eviten el empleo de Ma-

---

(33) Marzo, 1954, págs. 1-2.

temáticas superiores, excepto donde sea necesario para ofrecer una prueba rigurosa, o cuando la naturaleza del asunto irremisiblemente lo requiera. En todos los casos, los autores deberían —sugerimos también— exponer, tanto sus hipótesis como sus conclusiones, en lenguaje económico ordinario, y siempre que sea factible reproducir en tales términos los principales eslabones de sus razonamientos.”