

# METODOLOGÍA MÉTRICA COMPLEJA APLICADA A SERIES BURSÁTILES CORTAS Y RUIDOSAS

Salvador Rojí Ferrari

## RESUMEN

Este trabajo intenta encontrar un tipo de dependencia no lineal en las series temporales bursátiles españolas por medio de la utilización de un procedimiento basado en los tests métricos para medir conductas caóticas. Otros trabajos similares no han sido ni suficientes, ni concluyentes, ni han abarcado el suficiente abanico de posibilidades que ofrece el análisis de sensibilidad que se requiere en este tipo de modelos donde el ajuste de parámetros es fundamental. Para resolver estos problemas, especialmente en una plaza tan ruidosa y corta como la española, introducimos un modelo métrico de exponentes Lyapunov digital más robusto y completo para el entorno estudiado. Las conclusiones, empero, no se alejan de las encontradas en otros trabajos, tanto sobre la Bolsa de Madrid como sobre otras plazas internacionales.

## 1. INTRODUCCIÓN

Este trabajo busca encontrar un tipo de dependencia no lineal en las series temporales bursátiles frente a la alternativa de un proceso de memoria larga. La existencia de dicha dependencia implicaría una contradicción de los modelos del paseo aleatorio y de la hipótesis de la forma débil de eficiencia. Existen, hoy en día, manuales que resumen diferentes tests de no linealidad. Éstos pueden dividirse en 1) modelos estadísticos (análisis del campo temporal y del campo de frecuencias ó espectral), 2) métricos, que estudian las distancias entre puntos de un atractor extraño, 3) topológicos, que estudian la organización de dichos puntos, 4) modelos con poder de predicción. 5) modelos provenientes de la Mecánica Estadística en lo que ha venido a llamarse Econofísica (*Truncated Lévy Flight*, modelos basados en los agentes, o la familia de modelos *Simulated Annealing* o enfriamiento simulado). 6) otros modelos, como son el análisis R/S, ruido 1/f, el movimiento browniano fraccional, la familia de modelos ARCH, y las series fraccionalmente integradas, más relacionados con los modelos propiamente estadísticos.

Los modelos métricos y topológicos son específicamente métodos que intentan distinguir entre caos determinista y ruido. Los tests más importantes entre los métricos (Brock et al, 1991; y Lee et al, 1989) son las diferentes dimensiones de correlación, de capacidad, información, y fractal, la entropía de Kolmogorov, y la metodología de los exponentes Lyapunov. Entre los topológicos tenemos los tests de recurrencia y de los rendimientos cercanos. Mientras que la dimensión nos da una estimación de la complejidad del sistema, la entropía y los exponentes computan el nivel de caos en el sistema dinámico. Para resolver el cálculo de los exponentes, existen algunos paquetes de *software* analógicos. Este trabajo pretende calcular los exponentes utilizando una tecnología digital, lo que implica algunas adaptaciones, esperando refinar el procedimiento.

El marco donde se estudia una serie temporal dentro del campo del caos determinista es el espacio de fases. Este espacio define todos los posibles estados de un sistema. Se construye utilizando un conjunto de coordenadas  $n$  tales que al darle valores, por ejemplo,  $\mathbf{X}_t$  y  $\mathbf{X}_{t+z}$  (evitando la generación de autocorrelaciones) o  $\mathbf{X}_t$  y su primera derivada como coordenadas, la trayectoria de fases toma una forma de bucle cerrado o ciclo límite. Una vez que la conducta transitoria desaparece, entonces, el subsistema se asienta en un subespacio de dimensión  $n$   $\mathbf{R}^n$  llamado atractor (ver figura 1) es decir, “atrae” el conjunto de soluciones posibles que surgen de las condiciones iniciales que se encuentran en el vecino más cercano del atractor de fases elegido (tomando las formas de punto, bucle, atractor extraño, o nube aleatoria de puntos, según hablemos de punto fijo, señal periódica, caos determinista o simplemente una serie totalmente aleatoria). Si una trayectoria se encuentra “atrapada” en un atractor, entonces, continuará indefinidamente en los límites de dicho atractor.

Los exponentes Lyapunov miden la tasa media exponencial de divergencia (o convergencia) de dos órbitas adyacentes (ver figura 1) en el espacio de fases. Representan, por lo tanto, uno de los atributos básicos del caos determinista: la sensibilidad a las condiciones iniciales. Hay tantos exponentes como grados de libertad. Un exponente negativo significa una aproximación de las trayectorias en la misma dirección, es decir, la señal sería convergente con una conducta de reversión de la media, tendiendo a un punto fijo y, si fuese positivo, la divergencia se agrandaría, evidencia de conducta caótica. Así, los exponentes negativos comprimen el sistema, mientras que los positivos lo expanden (su suma coincide con la entropía de Kolmogorov, que da cuenta de la pérdida de capacidad de predicción del sistema). La interacción de estas dos tendencias opuestas está en la base de la estructura del atractor en el espacio de fases.

De esta manera, únicamente un exponente positivo puede mostrar la sensibilidad a las condiciones iniciales reflejando una “dirección”, por lo que la conducta a largo plazo de cualquier condición inicial especificada con incertidumbre no puede ser prevista. En la práctica, esto significa que la conducta es caótica. Si el resultado es infinito o tiende al infinito, entonces, nos encontramos ante una señal aleatoria (asumiendo que los ajustes se han llevado a cabo correctamente); por último, si el resultado es nulo, la secuencia entonces será estable (cíclica).

## 2. ANTECEDENTES

Farmer y Sidorowich (1988) relacionan los exponentes con las burbujas especulativas, en contraposición a los modelos basados en las expectativas racionales de valoración de activos financieros. Así pues, miden, a través del exponente más grande, la cantidad de inestabilidad en la serie temporal. Otra medida más clásica es la distribución de probabilidades. Ya Mandelbrot (1963) observó el fenómeno de que la distribución de frecuencias de rentabilidades diarias de los títulos bursátiles tienen unos extremos excesivamente abultados, achacándolo a las burbujas especulativas (Fama y French, 1996; Brock y Malliaris, 1991; Shiller, 1989). Sin embargo, otros (Flood, Hodrick, 1986) piensan que la excesiva volatilidad de las series es debido a una pobre especificación del modelo.

Los exponentes Lyapunov se han utilizado principalmente en el campo de la Física aplicada al estudio del caos. Su utilización en series temporales tanto económicas como financieras requiere (Isham, 1993) cierta adaptación (test residual, diagnóstico aleatorio, y la estadística BDS, principalmente). Estas adaptaciones han producido dimensiones de correlación altas. Es decir, que la estructura de las series temporales financieras está más cerca de la aleatoriedad que del determinismo caótico y, por lo tanto, como sugieren Brock y Sayers (1988), estos tests son demasiado débiles para detectar la presencia de caos en una serie temporal. Gilmore (1992) apunta a que el método de utilizar este tipo de filtros o adaptaciones afecta tanto a la dimensión de correlación como al exponente Lyapunov. Debido a la poca evidencia de caos determinista de baja dimensión en las series temporales financieras, han surgido otros tests con la intención de intentar descubrir y calibrar el nivel de no-linealidad de dichas series (diagnóstico de blancura y aleatorio). Siguiendo a Brock y Sayers (1988), aumentamos la dimensión con la finalidad de intentar captar la señal de los exponentes.

En España destacan los trabajos de Blasco de las Heras, et al (1995); Fernández y Martí (1995), y Olmeda y Perez (1995) sobre el caos determinista y no-linealidad en series temporales bursátiles, y el de Bajo et al (1992) sobre tipo de cambio peseta-dólar, encontrando, dependiendo del modelo utilizado, y en series a largo plazo, estructuras internas y no-linealidad. Blasco de las Heras et al (1995) muestran, utilizando la dimensión de correlación y los exponentes Lyapunov, según la metodología de Wolf et al (1985) al IGBM en el periodo 1980-1993, unos exponentes superiores a cero en todos los casos sin llegar a ninguna conclusión sobre un posible determinismo implícito debido a la inestabilidad de la dimensión de correlación. Aplican la metodología a distintos conjuntos basados en un análisis de sensibilidad, dando unos resultados que avalan la presencia débil de caos determinista en las series

analizadas. Sin embargo, avisan sobre la necesidad de guías más precisas y técnicas más adecuadas para la potencial detección de procesos caóticos.

Blasco de las Heras y Santamaría (1994a y b) ya han demostrado la existencia de dependencia a corto plazo en las series temporales bursátiles españolas, y Lo y Mackinlay (1988) en las norteamericanas. También, Lo (1991) descubrió que, y en contraste con los trabajos de Greene y Fieldtz (1977) y Peters (1993), no hay dependencia a largo, una vez que se toman en cuenta los efectos de la dependencia a corto. Éste resultado está de acuerdo con la Hipótesis del Mercado Eficiente. Esto es debido a que el modelo de Lo (1991), como versión refinada del modelo  $R/S^1$  o rango de escala, toma en consideración las auto varianzas ponderadas y retardos usados de acuerdo con leyes heurísticas, distinguiendo entre dependencia a largo y a corto. Blasco de las Heras y Santamaría (1994a), utilizando el modelo Lo (1991), la estadística  $V$ , y el exponente  $H$  en sus dos aproximaciones, y aplicado al Índice General diario de la Bolsa de Madrid y a 18 títulos permanentes del Ibox 35 entre 1980 y 1992 rechazan la presencia de una estructura interna a largo plazo en el mercado español.

Olmeda y Perez (1995) utilizan tres procedimientos que miden la dimensión de las series. Llegan a la conclusión de que los resultados son inconclusos debido a la baja dimensionalidad utilizada por razones de tamaño de la muestra. Como realizaremos también en nuestro trabajo, los autores siguen algunas normas de aproximación entre el nivel de ruido, tamaño, dimensión, y distancia entre los vecinos. Bajo et al (1992), por su parte, sí sugieren la existencia de presencia caótica. Sin embargo, y como viene siendo tradicional en este tipo de trabajos, conviene avisar sobre la fiabilidad de los resultados debido al tamaño de la muestra, excesivamente reducido.

Ya Brock (1986) avisa sobre la posibilidad de generar artificialmente unas estimaciones de baja dimensión debido a que las series económicas y financieras utilizan series excesivamente cortas. Tata y Vassilicos (1993) usaron los exponentes Lyapunov en una serie diaria bursátil del NYSE durante más de un siglo, con más de 29.000 cotizaciones, siendo la serie la serie económica más grande utilizada en búsqueda de caos, y sin encontrar señales de conducta caótica. Sin embargo, al dividir las series en muestras, encuentran exponentes positivos, y al incrementar el número de observaciones en cada muestra, los exponentes convergen a cero. Concluyen que los anteriores resultados positivos se deben al uso de series excesivamente cortas.

También para Brock y Sayers (1988), caos es “extremadamente improbable” en estudios de series temporales bursátiles diarias o de alta frecuencia dado que en dichos mercados no se da fricción y los precios están recogidos sin error de medición. Para Jensen (1987), se da una indivisibilidad de los precios observados que puede enmascarar o alterar cualquier proceso caótico subyacente, además de que los costes de transacción hacen que la compra-venta de acciones, cuando los cambios de los precios son muy pequeños no genere beneficios, por lo que el mecanismo potencialmente caótico sea muy difícil de detectar. Con respecto a la selección de la frecuencia de la serie, es conveniente estudiar otras de amplitud superior, pues la diaria es muy ruidosa (efectos de los mecanismos de intercambio y anomalías), aunque si la frecuencia es muy baja, se puede dar estacionalidad.

Existen muchas variaciones (Lorenz, 1993; Gilmore, 1992; Dechert y Gencay, 1992) que definan los exponentes, siendo la de Wolf et al (1985) la mas conocida. Citamos: Dado un sistema dinámico continuo en un espacio de fases de  $n$  dimensiones, la esfera infinitesimal de las condiciones iniciales evolucionan en un objeto elipsoide de  $n$  dimensiones debido a la naturaleza deformante del flujo. Se define el exponente  $i$  de una dimensión en términos de la extensión del eje principal del elipsoide:

<sup>1</sup> El análisis  $R/S$  sirve para distinguir ciclos no periódicos. Para más detalles, ver Lo (1991).

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log_2 \frac{p_i(t)}{p_i(0)}$$

Donde los exponentes  $\lambda_i$  se jerarquizan de mayor a menor. Como la orientación del elipsoide cambia continuamente, no se puede definir la dirección asociada a un exponente determinado. La relación lineal del elipsoide crece con la tasa  $2^{\lambda_i t}$ , el área definida por los dos ejes crece con la tasa  $2^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}$ , el volumen definido por los tres ejes crece con la tasa  $2^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t}$ , y así sucesivamente. Esta propiedad genera otra definición del espectro de exponentes: La suma de los primeros  $j$  exponentes por medio de la tasa de crecimiento exponencial a largo plazo. Un atractor de un sistema disipativo con al menos un exponente positivo es caótico, y los signos (+/-) proporcionan información cualitativa de la dinámica del sistema. El mayor exponente nos define el horizonte de predicción, más allá del cual es imposible predecir.

Muchos investigadores han propuestos algoritmos que estiman el exponente más grande (Wales, 1991; Wolf et al, 1985), sin embargo, se las ha tachado de poco fiables para conjuntos pequeños, difíciles de implementar y de computar. Otros métodos más sencillos (método de los retrasos) sin embargo, utilizan una metodología analógica (Sato et al, 1987). Este proyecto adapta algunas de las técnicas de análisis existentes para secuencias analógicas para nuestro uso en digital. Para llevarlo a cabo, se han desarrollado varios programas que realizan los distintos análisis a las secuencias (búsqueda de vecinos, cálculo de distancias entre secuencias vecinas, y finalmente el cálculo de los coeficientes de Lyapunov. Este proceso de subdivisión en subprogramas hace más fácil el desarrollo de los algoritmos por separado y su posterior prueba y empleo, evitando el uso continuado de “comandos” para ejecutar cada subprograma. Para ello, se utiliza otro programa de ejecución, con base en Matlab, cuyos parámetros son los únicos que necesitamos saber. Este programa se llama análisis, el cual llama a los subprogramas (*acumula, agrupa, configura, digitaliza, estadístico, lyap, serie, y vecin*).

Para calcular los coeficientes existen dos métodos fundamentales según se conozca o no la fórmula de generación de la señal. Si se conoce, se calcula el logaritmo del módulo de la derivada de la fórmula de generación de la señal para todo el intervalo de valores iniciales. Si no se conoce, hay que realizar el cálculo directamente sobre la secuencia de datos con base a la media de muchos puntos iniciales, siendo el resultado similar al obtenido con el sistema de la derivación. Este método, del que partimos como base de este trabajo, sin embargo, podría adolecer de algún sesgo hacia arriba al estimar los coeficientes en sistemas de mucho ruido. También, aunque no tengamos un conocimiento exacto sobre la dimensión de las series temporales bursátiles, infinidad de trabajos de investigación (Brock, 2000), tanto con respecto a las series bursátiles como de tipo de cambio han demostrado que la complejidad o, mejor dicho, la dimensión subyacente a las series es mucho más alta de lo que se suponía en un primer momento, rondando la sexta dimensión..

Finalmente, conviene ofrecer algunos comentarios. Por una parte, el enfoque es totalmente visual. Este enfoque ha sido llevado a cabo en el análisis y descripción de series temporales utilizando procedimientos como el del vecino más cercano (Gilmore, 1992), especialmente para series cortas y ruidosas como es el caso de la plaza española. Intentar “afinar” el procedimiento, como sugieren

algunos investigadores no hace sino extraer ruido intrínseco a las propias series (Brock y Sayers, 1988). En otras palabras, en plazas como la española, solamente se podría conocer la existencia de caos en dimensiones altas a través de su visualización gráfica sin cuantificación posible. Por otro lado, el caos determinista asume que la estadística y la econometría juegan un papel no relevante en la descripción de los fenómenos de naturaleza caótica. Esto no significa que las series no se puedan transformar utilizando cualquier procedimiento afín a las medias móviles o, filtrar a través de la transformación de Fourier, lo cual podría bien llevarse a cabo en un posterior trabajo.

### 3. RESULTADOS EMPÍRICOS

Partiendo de un juego de dimensiones entre cinco y siete, nos basamos en el sistema de medias de puntos iniciales, a partir del cual se eligen un punto de la secuencia y los vecinos, de tal manera que su distancia sea inferior que un umbral determinado  $\varepsilon$ . Calculamos la diferencia que existe entre los siguientes puntos de la secuencia, utilizándose como procedimiento de cálculo la media de las diferencias. Posteriormente se calcula el grado de incremento del logaritmo de la diferencia entre pasos. Sin embargo, para señales digitalizadas como es nuestro caso, el cálculo de los vecinos debe de realizarse para varios puntos ó dimensiones  $n$  con la intención de eliminar el riesgo de que la secuencia no se encuentre cerca de dicho punto y del vecino. Este proceso hay que realizarlo especialmente con señales digitalizadas debido a que se pueden generar errores al llevarse a cabo el proceso de digitalización. Si en varios valores consecutivos los resultados son similares, el resultado obtenido muestra que se está utilizando valores adecuados. Sin embargo, en caso contrario, es decir, que se incremente el valor de los coeficientes, entonces, se esta empleando valores erróneos.

También se puede realizar el cálculo para varios puntos iniciales y realizar la media. Sin embargo, para valores digitalizados, la diferencia con un punto vecino puede ser de cero, de tal manera que su logaritmo se acerque a  $(-\infty)$  y, por lo tanto, se puede producir una alteración del cálculo. Para evitar esta situación, en caso de diferencias con resultado cero se emplea un valor muy alto  $(-100, -1000)$ . Tampoco se genera ningún vecino si se emplean distancias para buscar los vecinos inferiores a la mínima diferencia existente entre dos puntos de la secuencia. Por último, el factor punto inicial puede ser clave, pues el resultado final puede ofrecer grandes variaciones, por lo que el cálculo se realiza con varios puntos iniciales distintos, calculando posteriormente la media geométrica entre todos ellos. Debido a todas estas condiciones, es aconsejable llevar a cabo un análisis de sensibilidad, variando diferentes valores y observar los resultados para poder acotar mejor el proceso de medición.

El programa que vamos a utilizar recibe dos parámetros, la señal que queremos analizar, y un valor o modo para configurar los coeficientes de Lyapunov. El tipo informa sobre la señal analógica con valor 1 o digital con valor 0. El primer valor indica el valor 1 para su cálculo; el segundo valor indica el tamaño máximo de la señal que se va a emplear, pues la obtención de los exponentes requiere mucha potencia de cálculo (dependiendo del autor, el número de datos requeridos varía, así, para Eckmann y Ruelle (ver Rosenstein et al 1992), el tamaño vendría dado por  $N > 10^D$ , siendo  $D$  la dimensión). El tercer valor se refiere al número de valores de origen que se van a emplear para hacer la media, utilizándose 50 por defecto. El cuarto valor especifica la distancia mínima entre vecinos, normalmente,  $> 0.001$ . Finalmente, el quinto valor se emplea para indicar para cuántos pasos se calcula la diferencia de distancias, generalmente, 30 ó 50. Nuestro trabajo calcula el máximo exponente como la pendiente de una recta de mínimos cuadrados que se adapta a la curva de un gráfico donde se sitúa el  $\ln$  de la divergencia en la ordenada, y el número de pasos utilizados en la abscisa. Tras una somera comprobación, el resultado es similar si variamos este parámetro.

En una primera fase utilizamos series temporales no caóticas y caóticas analógicas para observar las diferencias entre los gráficos formados entre ambas series, para posteriormente, en una segunda fase, realizar el mismo proceso de series temporales no caóticas y caóticas usando la señal digital y el cálculo del coeficiente Lyapunov. Esto nos permite comprobar dos hechos. Por una parte, realmente saber si se detectan las señales caóticas como tales, obteniéndose los resultados esperados, y por la otra, nos permite observar cómo funcionan los programas con señales digitales, es decir, si el proceso de digitalización es correcto.

### Pruebas con señales analógicas y digitales

#### I) Señales no caóticas

Ejecutamos el programa “analiza” con las series temporales generadas por las ecuaciones sinusoidales

$$\text{Sin}(x \cdot \pi/8)$$

y sinusoidal aditiva

$$\sin(x \cdot 8) + \sin(x \cdot \pi/100) + \sin(x \cdot \pi/4)$$

#### II) Señales caóticas

Utilizamos la ecuación logística

$$x_{n+1} = A x_n (1 - x_n)$$

con los parámetros  $A=4$  y  $0,1$  como inicio de la serie

Para estos cálculos se digitalizaron las señales en  $2^{16}$  niveles, es decir, empleamos 16 bits, lo que nos da un margen de distancia entre valores consecutivos de  $\frac{1}{2^{16}}$ , y se emplearon el resto de valores de configuración igual que en el caso de señales analógicas.

Se calcularon 15.000 valores de cada una de las series, de los cuales representamos en gráficos los primeros 200. Podemos observar en un análisis de dominio de frecuencias, que las gráficas temporales sinusoidales corresponden totalmente a una señal seno (fig. 2) y a la suma de tres señales sinusoidales de distintas frecuencias (fig. 3) representando unas funciones periódicas bien previsibles y deterministas. Esta clara predicción puede observarse en los gráficos correspondientes a sus coeficientes Lyapunov, con un valor de cero (la pendiente de la curva) para la señal seno (fig. 4) y negativo para la señal aditiva (fig.5). Este exponente negativo significa una aproximación de las trayectorias en la misma dirección, es decir, la señal es convergente y no caótica.

Para comprobar nuestro modelo, hemos utilizado la conocida ecuación logística, ecuación que genera una serie temporal aparentemente aleatoria (fig. 6), pero que realmente genera una dinámica caótica determinista. Podemos comprobar que genera un gráfico (fig. 7) con una

pendiente que nos define el exponente Lyapunov alrededor de 0,7 (0,6914), muy cercano a los valores teóricos. Los resultados son muy similares a los obtenidos por Rosenstein, et al (1992) en su estudio sobre los exponentes de conjuntos pequeños, tanto en su formulación gráfica como numérica. Para ello, realizan un análisis de sensibilidad previo sobre generadores caóticos conocidos, entre ellos, la ecuación logística. Utilizan varias dimensiones (0-5) y diversas series temporales a través de la metodología de Sato et al (1987). Calculan para cada combinación unos exponentes entre 0,675 y 0,686, casi similares al 0,6914 de nuestro trabajo. La pequeña variación encontrada podría ser el resultado de que no utilizan la sexta dimensión, la cual, sin embargo, y según Brock (2000), sería la más apropiada.

Una vez comprobado que el programa respondía correctamente a las señales digitalizadas, hemos utilizado un procedimiento de análisis de sensibilidad con la intención de comprobar la señal y las limitaciones de los valores que se emplean en la configuración según el número de bits empleados. Hemos comprobado, pues, los siguientes efectos:

- 1) Disminución de la distancia entre los vecinos, pues ésta debe de estar en línea con la digitalización de la señal, ya que existe una distancia mínima debido a la digitalización, por debajo de la cual no existe diferencia. Por ejemplo, si digitalizamos con 8 bits, entonces no se pueden buscar distancias inferiores a  $1/256$ , ya que a una distancia inferior dará como resultado contar como vecinos a los valores idénticos.
- 2) Disminución del número de puntos iniciales. Si no escogemos un número adecuado de puntos el resultado puede ser erróneo, requiriéndose un número relativamente alto. Existe un número adecuado de puntos dependiendo de la secuencia que estudiemos.
- 3) Variación de la dimensión. El modo de calcular si la dimensión es correcta consiste en variar el parámetro  $y$ , a partir de un cierto valor, el resultado se estabiliza.
- 4) La distancia entre vecinos. Ésta debe ser suficientemente pequeña debido a que las secuencias puede que no tengan margen para divergir y que sean cuantificables. Por el contrario, si utilizamos un valor excesivamente pequeño, podemos no encontrar vecinos, siendo más probable en el caso de una señal digitalizada.
- 5) El número de bits de digitalización. Hemos observado que con un valor de 8 bits, los resultados no son correctos, sin embargo, con 16 y 32, obtenemos una representación similar y correcta.

Se utilizan datos diarios de las diferencias de los logaritmos de las rentabilidades para obtener series estacionarias, cubriendo, para todas las series, el periodo comprendido entre 1986 y 2003, ambos incluidos. Según Brock et al, (1991), este procedimiento de diferencias no afecta a las características dinámicas de una serie caótica. Una vez dados todos los valores a las variables, los resultados pueden observarse en un gráfico con los cálculos numéricos de los coeficientes y los estadísticos. Los valores estudiados son dos empresas individuales: Telefónica y Acciona, y dos índices, el IGBM, y el Ibx 35 (aunque su formación data de enero 1990, utilizamos los resultados del índice adaptados regresivamente).

Las tres variables claves que generan información sobre los exponentes Lyapunov son la dimensión, en nuestro estudio, 3, 5, 6 y 7, el nº de valores de origen utilizados para calcular la media (20 y 50), y la distancia entre vecinos (0,01, 0,005, y 0,001), dando entre paréntesis los valores utilizados en el análisis de sensibilidad. La combinación total de variables para poder

llevar a cabo totalmente el análisis de sensibilidad de las cuatro series es de 432 cálculos y sus respectivos gráficos. Debido a este problema, en nuestro análisis solamente incluimos aquellas combinaciones que nos dan un resultado novedoso, es decir, obviamos resultados persistentemente negativos con la intención de evitar la publicación de excesivos gráficos que no ofrecen información útil. Así, por ejemplo, la distancia 0,001 no ofrece ningún tipo de información, por lo que evitamos ampliar el análisis de sensibilidad con dicho parámetro más allá de lo imprescindible.

Al variar el  $n^\circ$  de valores de origen utilizados para calcular la media, de 50 valores a 20, en un marco de distancia mínima entre vecinos intermedia (0,005), el exponente Lyapunov de Acciona pasa de nulo a positivo. Especulamos con la idea de que al ser Acciona un valor relativamente volátil, y al utilizar demasiados valores para calcular la media en un marco de distancias pequeñas, no encuentre el exponente. Sin embargo, la señal queda recogida al incrementar la distancia mínima entre vecinos hasta el 0,01. Telefónica, por otra parte, muestra los exponentes en dimensiones superiores a cinco, tanto para un  $n^\circ$  de valores de origen altos como bajos, aunque pierde la señal cuando la distancia mínima entre vecinos es excesivamente pequeña (0,001) (fig.8-18). Éste último caso se da para las cuatro series dadas, por lo que podemos asumir que la señal de los coeficientes requiere una distancia superior que este mínimo.

El IGBM muestra en diversas dimensiones (3-6) la falta de señal que indique el exponente, incluso en el marco de la mayor distancia mínima de 0,01. Sin embargo, el Ibex 35, en el marco de la dimensión de seis, considerada la más adecuada, muestra señales de exponentes tanto para la mínima distancia como para la intermedia.

#### 4. CONCLUSIONES

En definitiva, encontramos, señales caóticas en dimensiones altas. Esto es fácilmente observable visualmente al comparar el resultado del gráfico de los coeficientes de la función logística, generadora de una serie temporal caótica -dados los parámetros adecuados (figura 7)-, con los resultados obtenidos por los índices y empresas escogidas en el estudio figuras 11-18). Estos resultados avalan los ya registrados en otras plazas financieras y en la Bolsa de Madrid, según hemos comentado en el apartado segundo. Sin embargo, al distinguir entre series individuales y colectivas, se observa que, para series de títulos individuales, tales señales se pueden obtener a partir de la dimensión 5, y para índices, a partir de la dimensión 6, debido, seguramente, a la debilidad de su señal. Una hipótesis es que las variaciones de los distintos títulos que conforman las series, alrededor de 125 en el caso del IGBM, y 35 en el del Ibex, hacen que se compensen las unas con las otras a través de las correlaciones internas, de tal manera que la señal caótica sea más difícil de encontrar, requiriendo, por lo tanto, dimensiones superiores que la requerida para títulos individuales.

También, como ya hemos comentado previamente, al aumentar la frecuencia de datos (datos diarios o intra diarios), la memoria corta tiende a desaparecer, dándose, por otra parte, una cierta forma de proceso autoregresivo en forma de ruido. Su significación, sin embargo, es casi cero al usar un muestreo basado en datos trimestrales, siendo la memoria a largo la que surge cuando se usa baja frecuencia. Blasco de las Heras y Santamaría (1994a) ya informaron sobre la existencia de dicha memoria, poniendo en entredicho, junto con la mayoría de otros investigadores, la veracidad de sus resultados en la búsqueda de conducta caótica en las series temporales bursátiles.

- Un muestreo de menor frecuencia, como puede ser el basado en datos mensuales o trimestrales, y aconsejado por Brock (1986), hace que la serie se reduzca excesivamente, especialmente si

consideramos que la Bolsa de Madrid recoge datos sobre un conjunto de años no solamente bastante reducido sino que podríamos afirmar ruidoso. Previo al inicio del Índice General de la Bolsa de Madrid, a principios de 1986, o el índice subyacente en contratos de derivados, Ibex 35, a partir de 1990, su utilización en la búsqueda de señales caóticas queda cuestionado debido a su carácter opaco y no muy eficiente.

Así pues, nos encontramos con el descubrimiento de señales caóticas en dimensiones muy altas, tanto utilizando señales analógicas como digitales, sin poder realmente verificar si es debido a un proceso auténticamente caótico o simplemente ruidoso. La implicación práctica desde una perspectiva financiera es la no existencia de oportunidades de arbitraje en la búsqueda de rentabilidades superiores ajustadas por el riesgo en series bursátiles españolas. Esto concuerda con los resultados obtenidos por otros investigadores españoles siguiendo técnicas propias de la teoría caótica como en modelos econométricos lineales y no lineales basados en la media o varianza. Sin embargo, la utilización de otras técnicas que intentan encontrar estructuras internas con poder de predicción a largo plazo en vez de señales caóticas a corto es, tal vez, el objetivo futuro a investigar.

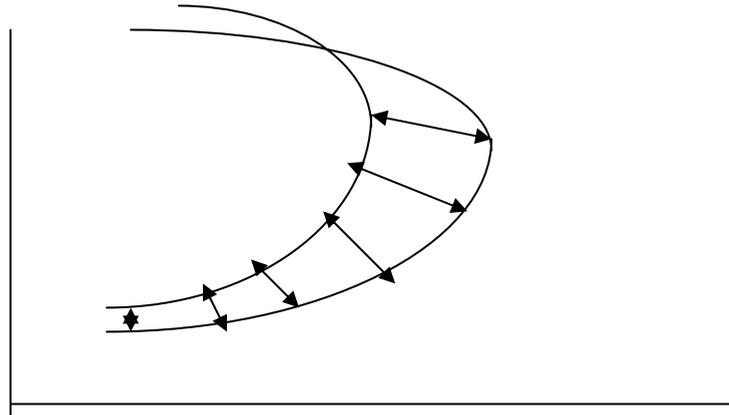


Figura 1. Dos trayectorias vecinas en un atractor mostrando la divergencia característica en el transcurso del tiempo asociada con una conducta caótica.

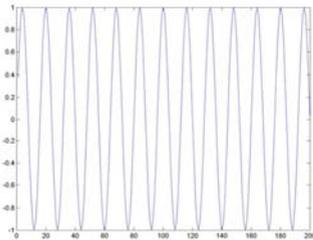


Fig 2: Primera sinusoidal.

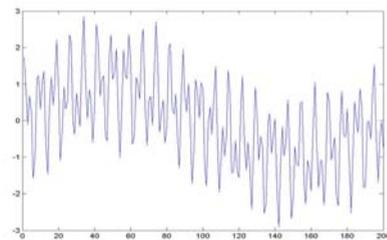


Fig 3: Suma de sinusoidales

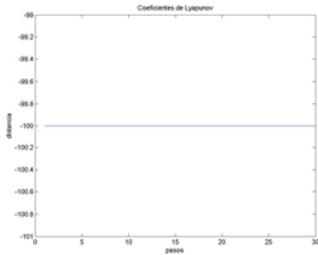


Fig 4: Coeficientes de Lyapunov de senoide. sinusoides

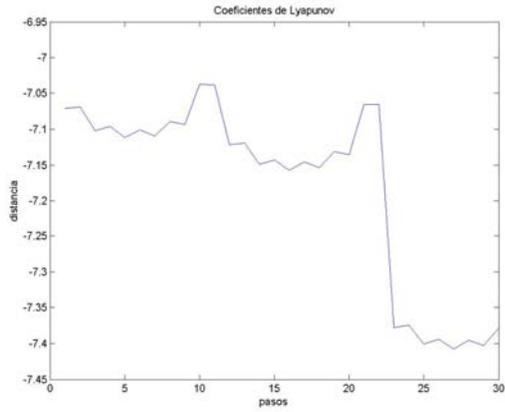


Fig 5 : Coeficientes de Lyapunov de suma de

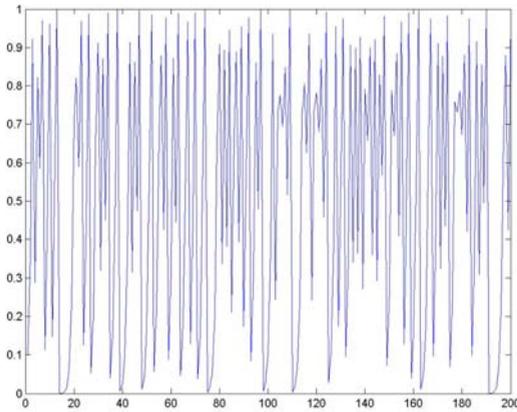


Fig 6: Función Logística

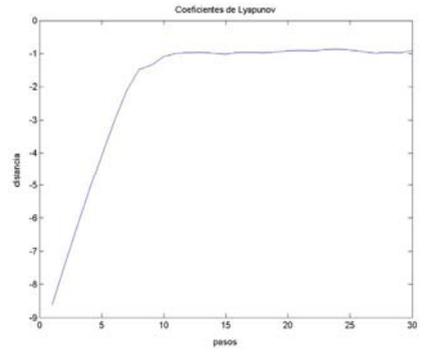


Fig 7 : Coeficientes de ecuación logística.

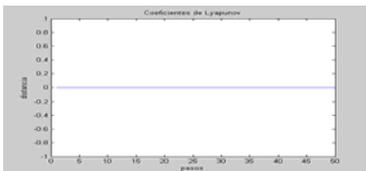


Fig. 8 dimen=[3];IGBM  
lya=[1 25000 50 0.01 50];

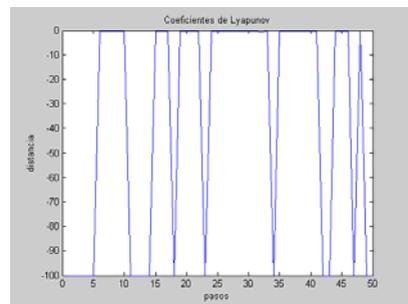


Fig. 9 dimen=[6]; IGBM  
lya=[1 25000 50 0.001 50]

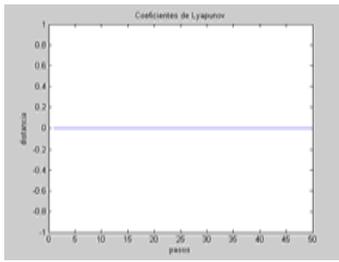


Fig. 10 dimen=[6]; Tel.  
lya=[1 25000 20 0.001 50];

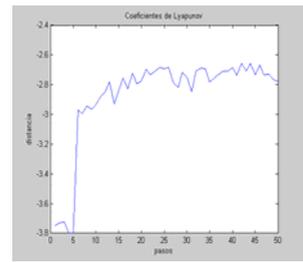


Fig. 11 dimen=[6]; Tel.  
lya=[1 25000 50 0.01 50];



Fig. 12 dimen [6]; lya=[1 25000 20 0.01 50];



Fig. 13 dimen [7] lya=[1 25000 50 0.01 50];

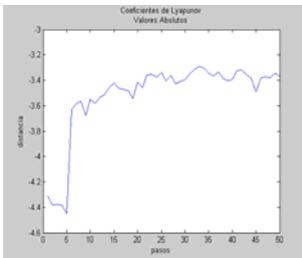


Fig. 14 dimen [6]; lya=[1 25000 50 0.01 50];

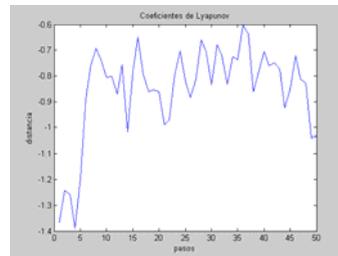


Fig. 15 dimen [6] lya=[1 25000 50 0.01 50];

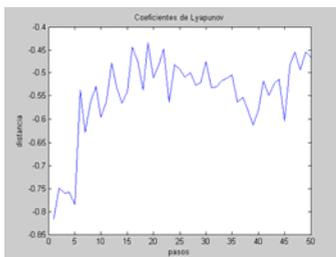


Fig 16 dimen=[6]; lya=[1 25000 50 0.01 50];

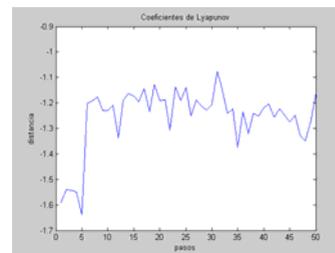


Fig 17 dimen [6]; lya=[1 25000 50 0.005 50];

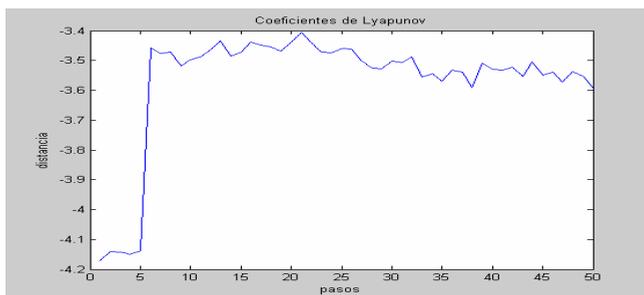


Fig. 18  $\text{dimen lya}=[1 \ 25000 \ 50 \ 0.01 \ 50]$ ;

## BIBLIOGRAFÍA

- Bajo, O. Fernández, F., Sosvilla-Rivero, S. (1992): Volatilidad y predecibilidad en las series del tipo de cambio peseta-dólar: Un enfoque basado en el caos determinista, "Revista Española de Economía", monográfico.
- Blasco de las Heras N., del Río, C., Santamaría, R., (1994a): Memoria a largo plazo en el mercado de valores español: Una aproximación a través del análisis R/S, "Investigaciones Económicas", 18.
- Blasco de las Heras N., del Río, C., Santamaría, R., (1994b) ¿Son las rentabilidades de las acciones series fraccionalmente integradas?. Resultados en el mercado de valores español, "Revista de economía aplicada", 6.
- Blasco de las Heras N., del Río, C., Santamaría, R., (1995): Teoría del caos y mercado de capitales: Un estudio exploratorio del IGBM 1980-1993, "ICE", 746.
- Brock, W (1986): Distinguishing Random and Deterministic Systems: Abridged Version, "Journal of Economic Theory", 40.
- Brock, W. (2000): Whither Nonlinear?, "Journal of Economic Dynamics and Control", 24.
- Brock, W. y Sayers, C. (1988): Is the Business Cycle Characterized by Deterministic Chaos?, "Journal of Monetary Economics", 22, pág. 71-90.
- Brock, W., y Malliaris, A. (1991): Differential Equations, Stability and Chaos in Dynamic Economics, North-Holland, Amsterdam.
- Brock, W., Hsieh, D., y LeBaron, B. (1991): Nonlinear Dynamics, Chaos, and Instability: Statistical Theory, MIT Press, Cambridge, Mass.
- Dechert, W. y Gencay, R. (1992): Lyapunov Exponents as a Nonparametric Diagnostic for Stability Analysis, "Journal of Applied Econometrics", 7.
- Fama, E. y French, K. (1996): Multifactor Explanations of Asset Pricing Anomalies, "Journal of Finance", 51.
- Farmer, J., y Sidorowich, J., (1988): Can New Approaches to Nonlinear Modeling Improve Economic Forecasts?, pág. 99-115, en Anderson, P., Arrow, K., y Pines, D. (1988): The Economy as an Evolving Complex System, Addison-Wesley, Ca.
- Fernandez, F., y Martí, J. (1995): Distinción entre el caos y azar en series ruidosas mediante predicciones locales, "Estadística Española", 37.
- Flood, R. y Hodrick, R. (1986): Asset Price volatility, Bubbles, and Process Switching, "Journal of Finance", 41.
- Gilmore, C. (1992): Financial Markets and the Theory of Chaos, tesis no publicada, Drexel University, EE UU.
- Greene, M. y Fielitz, B. (1977): Long-Term Dependence in Common Stock Returns, "Journal of Financial Economics", 4.
- Isham, V. (1993): Statistical Aspects of Chaos: A Review, en Barndorff-Nelsen, O., Jensen, J., y Kendall, W., Networks and Chaos. Statistical and Probabilistic Aspects, Chapman & Hall, RU.
- Jensen, R. (1987): Classical Chaos, "American Scientist", 75.
- Lee, T., White, H., y Granger, C. (1989): Testing for Neglected Nonlinearity in Time Series Models: A Comparison of Neural Network Methods and Alternative Tests, Universidad de California, San Diego.
- Lo, A., (1991): Long-Term Memory in Stock Market Prices, "Econometrica", 59.
- Lo, A., y Mackinlay, A., (1988): Stock Market Prices do not Follow Random Walks: Evidence from a Simple Specification Test, "Review of Financial Studies", 3.
- Lorenz, H. (1993): Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion, Springer-Verlag.
- Mandelbrot, B. (1963): The Variation of Certain Speculative Prices, "Journal of Finance", 36.
- Olmeda, I., Perez, J. (1995): Non-Linear Dynamics and Chaos in the Spanish Stock Market, "Investigaciones Económicas", 19.
- Peters, E. (1993): Fractal Market Analysis, Wiley&sons.
- Rosenstein, M., Collins, J., De Luca, C., (1992): A Practical Method for Calculating Largest Lyapunov Exponents from Small Data Sets, "Physica D", 65.
- Sato, S., Sano, M., Sawada, Y. (1987): Practical Methods of Measuring the Generalized Dimension and the Largest Lyapunov Exponent in High Dimensional Chaotic Systems, Prog. Theor. Phys 77, I.
- Shiller, R. (1989): Market Volatility, Cambridge, Mass., The MIT Press.
- Tata, F., y Vassilicos, Ch., (1993): Is There Chaos in Economic Time Series? A Study of the Stock and the Foreign Exchange Markets, en Crilly, A., Earnshaw, R., Jones, H., Applications of Fractals and Chaos, Springer-Verlag.
- Wales, D.L. (1991): Calculating the Rate Loss of Information from Chaotic Time Series by Forecasting, Nature 350, 485.
- Wolf, A., Swift, J., Swinney, H., y Vastano, J. (1985): Determining Lyapunov Exponents from Time Series, "Physica", 16D.