ARTICULOS

EL GRUPO DE TRANSFORMACIONES EN EL ALGEBRA BINARIA. ENTRE SHEFFER Y PIAGET

JULIAN VELARDE LOMBRAÑA
Oviedo

1. Algebra de Boole

Se dice que un conjunto posee una *estructura algebráica* si posee al menos *una* ley de composición. Se denomina *álgebra* una estructura que posee al menos *dos* leyes de composición. Y una estructura algebráica que admite tres operaciones —dos binarias, que representamos por «∪» y «∩», y una monaria, que representamos por «−»— unidas por las propiedades que expresan las tablas de la F. 1 se denomina *álgebra de Boole.*

Una *cantidad booleana simple* (o variable booleana) —que representamos por «x»— es una cantidad que no consta de componentes y que es susceptible de tomar solamente dos valores que se excluyen, como son todo o nada, verdad o falsedad, sí o no, abierto o cerrado, par o impar, etc. Estos pueden representarse de múltiples formas: «1» y «0», «V» y «F», «+» y «−».

∪	1	0
1	1	1
0	1	0

∩	1	0
1	1	0
0	0	0

x	$\overline{x}$
1	0
0	1

FIG. 1

Una *cantidad booleana general* —que representamos por «X» es un conjunto de cantidades booleanas simples, esto es, un conjunto finito —una columna, matriz— o infinito —un segmento— organizado de tal forma que a cada elemento de ese conjunto se asocia una cantidad booleana simple.

Sean α y β cantidades booleanas (simples o generales). Si a cada valor de α corresponde un valor determinado de β, se dice que β es *función booleana.* Dividiendo las variables y las funciones en simples y generales caben:

(1) Funciones simples de variables simples: y = f(x)
(2) Funciones simples de variables generales: y = f(X)
(3) Funciones generales de variables generales: Y = F(X)
(4) Funciones generales de variables simples: Y = F(x)

Teniendo X *n* componentes e Y *p* componentes, el *número de funciones booleanas* es

$$(2^p)^{2^n}$$

2^n representa el número de opciones que toma X. Y cada opción se puede poner en correspondencia con una cualquiera de las 2^p que toma Y.

Limitándonos a las funciones simples —p = 1— tenemos los casos siguientes:

(a) Si *n* = 1:

$(2^1)^{2^1} = 4$

esto es, hay cuatro funciones simples de una variable simple, que podemos representar en la tabla siguiente:

x	f_1	f_2	f_3	f_4
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

FIG. 2

(b) Si $n = 2$: $(2^1)^{2^2} = 16$.

esto es, hay dieciséis funciones simples de dos variables simples, representadas en la siguiente tabla:

xy	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
11	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
10	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
01	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
00	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
	△	○	○	□	○	□	□	○	○	□	□	○	□	○	○	△

FIG. 3

Cada función simple de una o más variables simples forma una colección E de n elementos, y puesto que los elementos han de ser «0» ó «1», resulta un número determinado de permutaciones con repetición.

Siendo E una colección de n objetos en los que puede haber α ejemplares del objeto de tipo a, β ejemplares del objeto de tipo b, γ ejemplares del objeto de tipo c, etc., tenemos

$$\alpha + \beta + \ldots + \gamma = n$$

de donde resultan

$$\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\ldots\,\gamma!}$$

permutaciones con repetición.

En el caso de las funciones simples de una variable simple, dado que hay dos clases, α y β —la clase de los «1» y la clase de los «0»—, caben para $\alpha = 2$

$$\frac{2!}{2!\ 0!} = 1$$

Una permutación en el caso de $\alpha = 2$ (dos «1», por ejemplo).

Y lo mismo para $\beta = 2$ (dos «0»):

$$\frac{2!}{0!\ 2!} = 1$$

En total, 2 permutaciones con repetición para cuando una clase es igual a dos y la otra igual a cero.

Si $\alpha = 1$ y $\beta = 1$, entonces tenemos

$$\frac{2!}{1!\ 1!} = 2$$

Obtenemos, así, las cuatro permutaciones que constitiyen las cuatro funciones simples de una variable simple.

En el caso de las funciones simples de dos variables simples tenemos colecciones de n objetos (con $n = 4$) pertenecientes a dos clases, α y β, agrupadas en los siguientes tipos:

	α	—	β	ó	α	—	β
Tipo (a)	4		0		0		4
" (b)	3		1		1		3
" (c)	2		2		—		—

Esto es, en la tabla de la F. 3 las columnas forman colecciones de los tipos (a), (b) y (c), mas ¿cuántas hay de cada tipo? Aplicando la fórmula anterior de las permutaciones con repetición, tenemos:

Del tipo (a):

$$\frac{4!}{4!\ 0!} = 1$$

Y

$$\frac{4!}{0!\ 4!} = 1$$

En total, dos permutaciones con repetición de un mismo elemento. Son las columnas 1 y 16 de la F. 3, señaladas con el signo «△».

Del tipo (b):

$$\frac{4!}{3!\ 1!} = 4$$

Y

$$\frac{4!}{1!\ 3!} = 4$$

En total, ocho permutaciones con repetición de tres elementos de una clase y uno de la otra. Son las columnas

2, 3, 5, 8, 9, 12, 14 y 15 de la F. 3, señaladas con el signo «O».

Del tipo (c):

$$\frac{4!}{2!\,2!} = 6$$

Seis permutaciones con repetición de dos elementos de una clase y dos de otra. Son las columnas 4, 6, 7, 10, 11 y 13 de la F. 3, señaladas con el signo «□».

Las funciones booleanas simples forman, pues, colecciones de determinado número y tipo. (Empleamos el término «colección» para subrayar el hecho de que los elementos del conjunto son discernibles).

Dada una colección E de *n* elementos se denomina *transformación* de E a la operación que hace corresponder a E otra colección E' con los *n* elementos de E. Las transformaciones forman un grupo de permutaciones. Cada transformación opera una permutación. Así, dado el rectángulo de la F. 4, la operación consistente en una simetría respecto del eje M-N constituye una transformación Tj, cuyo resultado es el rectándulo de la F. 5

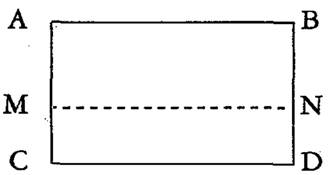

FIG. 4

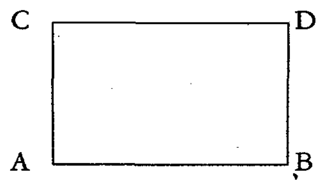

FIG. 5

$$Tj = \begin{pmatrix} A\,B\,C\,D \\ C\,D\,A\,B \end{pmatrix}$$

En la tabla de la F. 3 el rectángulo de la F. 4 se corresponde, por ejemplo, con la columna 8, y el rectángulo de la F. 5, con la columna 14. Más ¿en qué consiste la operación que como en los rectángulos transforma la primera columna en la segunda?

Si una transformación es una operación monaria, podemos aplicar ésta en la tabla de la F. 4, bien a las variables —x ó y—, bien a las funciones, que podemos simbolizar por «*». Variables y funciones constituyen ahora los argumentos de la operación. Si consideramos, además, la operación cero —la que deja las cosas como están, por ejemplo el giro de 360º en el rectángulo antes mencionado— como una operación, caben

$$2^3 = 8$$

transformaciones. Simbolizando la operación monaria por una raya («—») encima de los argumentos y la falta de símbolo para la operación cero, obtenemos las ocho transformaciones siguientes:

I: $x * y$
B: $x \overline{*} y$
C: $\overline{x} * y$
D: $\overline{x} \overline{*} y$
E: $x * \overline{y}$
F: $x \overline{*} \overline{y}$
G: $\overline{x} * \overline{y}$
H: $\overline{x} \overline{*} \overline{y}$

Hemos indicado que las columnas de la F. 3 forman colecciones de tres tipos: Ocho del tipo (b) y menos de los otros dos. Con las ocho transformaciones posibles podemos obtener ocho colecciones a partir de una dada, mas las colecciones resultantes de las distintas transformaciones ¿son todas distintas entre sí? La respuesta depende de la interpretación de los signos «*» y «—», esto es, de las funciones.

Comencemos por las funciones monarias expuestas en la tabla de la F. 2. La transformación cero corresponde a la columna dos (f.2). Y la transformación complemento («—») corresponde a la columna tres (f. 3). Así, $\overline{x}$ sirve para designar el complemento de x, cuyas propiedades son:

(1) $\overline{\overline{x}} = x$
(2) Si $x > y$, entonces $\overline{x} < \overline{y}$

Hemos dividido la tabla de la F. 3 en tres tipos de colecciones con dos clases de elementos cada colección, la clase α y la clase β. Puesto que la transformación complemento convierte los elementos de una clase en elementos de otra y dado que las clases en cada tipo son simétricas, a partir de las transformaciones cero y complemento podemos establecer el siguiente teorema:

Sea «A» una colección perteneciente a uno de los tipos (a), (b) o (c), el resultado de la transformación cero o de la transformación complemento es otra colección que pertenece al mismo tipo que «A».

Sea «$x * y$», por ejemplo, la función 5 (1011). Si le aplicamos la transformación D («$\overline{x} \overline{*} y$»), el resultado es la función 15 (0001).

Si aplicamos las ocho transformaciones posibles a una colección de la F. 3 ¿Cuántas colecciones distintas entre sí obtenemos?. Antes de ofrecer una respuesta hemos de introducir el concepto de «dualidad».

La *dualidad* es una aplicación del conjunto de los valores de una cantidad booleana sobre sí misma definida por:

$$0 \rightarrow 1$$
$$1 \rightarrow 0$$

(1) La dualidad es una relación simétrica. Por lo tanto, si denominamos a *x'* la dual de *x*,

$$(x')' = x$$

(2) La dualidad invierte la relación de orden. Por lo tanto,

$$\text{si } x_1 \geqslant x_2, \text{ entonces } x_1' \leqslant x_2'$$

(3) Con relación al complemento tenemos entonces que:

$x' = \overline{x}$, $X' = \overline{X}$
$\overline{F}(X) = [F(X)]$
$\overline{F'}(\overline{X}) = [F(X')]'$

Por lo tanto,

$$\overline{\overline{X}} = X$$

pero

$F(X) \neq \overline{F}'(X)$.

Las transformaciones constituyen un grupo de permutaciones. El concepto de permutación exige el de orden y, consecuentemente, el de dualidad. Hay colecciones cuya dual constituye su complemento o la transformación idéntica. Ocurre esto con las colecciones pertenecientes al tipo (a) y (c), esto es, aquéllas en las que los elementos pertenecientes a las clases α y β son simétricos. De donde resulta que:

(1) Con respecto al tipo (b) de colecciones la aplicación de las ocho transformaciones posibles a una colección del tipo (b) produce ocho colecciones (columnas) distintas del tipo (b) (las ocho que pertenecen a dicho tipo), que podemos representar mediante la figura 6.

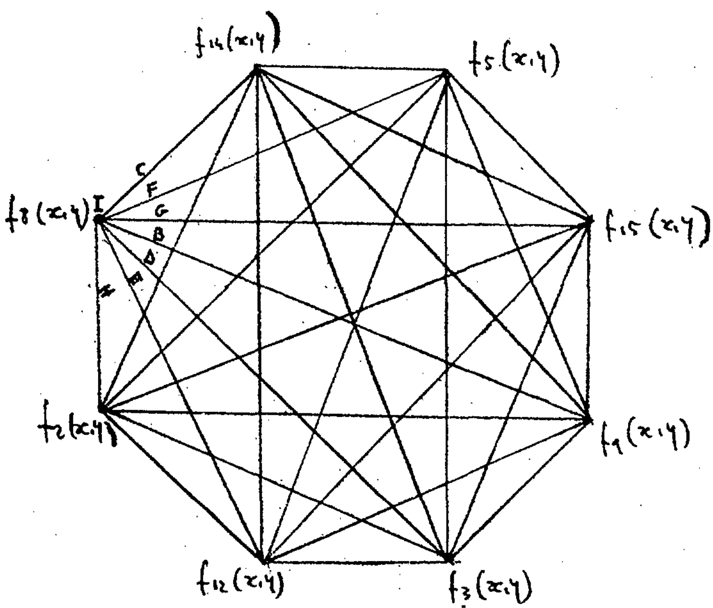

FIG. 6

(2) Con respecto al tipo (a) de colecciones, las transformaciones

C, E, G = I
D, F, H = B

Según esto:

$$\underset{f_1}{\text{C, E, G, I}} \bullet\!\!\xrightarrow{\text{D, F, H, B}}\!\!\bullet\ f$$

(3) Con respecto al tipo (c) de colecciones se precisa distinguir tres tipos de simetría que guardan entre sí los elementos pertenecientes a las clases α y β:

	α	—	β	—	α	—	β	
(C_1)	2		2					Ej., f_4
(C_2)	1		2		1			Ej., f_7
(C_3)	1		1		1		1	Ej., f_6

Para (C_1) tenemos:

D, E, H = I
C, F, G = B

Esto es,

$$\underset{f_4}{\text{D, E, H, I}} \bullet\!\!\xrightarrow{\text{C F G B}}\!\!\bullet\ f_{13}$$

Para (C_2) tenemos:

D, F, G = I
C, E, H = B

Esto es,

$$\underset{f_7}{\text{D, F, G, I}} \bullet\!\!\xrightarrow{\text{C, E, H, B}}\!\!\bullet\ f_{10}$$

Y para (C_3):

C, F, H = I
D, E, G = B

Esto es,

$$\underset{f_6}{\text{C, F, H, I}} \bullet\!\!\xrightarrow{\text{D, E, G, B}}\!\!\bullet\ f_{11}$$

Hasta aquí nos hemos ocupado de la combinatoria referente a cantidades y funciones booleanas y a transformaciones. Sin abandonar el álgebra abstracta es posible el estudio de las ocho transformaciones en sí mismas y el sistema que constituyen.

Teorema: El conjunto de transformaciones I, B, C, D, E, F, G, H forman un grupo conmutativo por relación a la operación «producto» de transformaciones.

El producto de dos transformaciones T_j y T_k, que notamos $T_j T_k$ es la transformación resultante —T — de la operación que consiste en efectuar sucesivamente T_j y T_k i.e. $T_j T_k = T_l$.

El conjunto de transformaciones E satisface las condiciones siguientes:

(I) *Condición de cierre*: La operación «producto» aplicada a dos transformaciones de E da como resultado una transformación que pertenece también a E. Por ejemplo, C/E = G.

(II) *Condición de asociatividad*: Si T_j, T_k y T_l son tres transformaciones cualesquiera de E no necesariamente distintas, entonces

$$(T_j/T_k)/T_l = T_j/(T_k/T_l)$$

(III) *Condición de la existencia de una transformación idéntica* Ti, tal que

$$Ti\,Tj = Tj\,Ti = Tj$$

En nuestra tabla Ti corresponde a la transformación I.

(IV) *Condición de la existencia de una transformación inversa:* A cada transformación T de E corresponde otra T^{1} también de E tal que

$$T/T^{-1} = T^{-1}/T = Ti$$

(V) *Condición de conmutatividad:* Para cada dos transformaciones de E se cumple que

$$Tj/Tk = Tk/Tj$$

La tabla de la F. 7 representa los axiomas que rigen la estructura de grupo conmutativo del conjunto E de transformaciones

	I	B	C	D	E	F	G	H
I	I	B	C	D	E	F	G	H
B	B	I	D	C	F	E	H	G
C	C	D	I	B	G	H	E	F
D	D	C	B	I	H	G	F	E
E	E	F	G	H	I	B	C	D
F	F	E	H	G	B	I	D	C
G	G	H	E	F	C	D	I	B
H	H	G	F	E	D	C	B	I

FIG. 7

2. Algebras particulares

El álgebra «abstracta» (de las letras) hasta aquí desarrollada se convierte en álgebra particular cuando los símbolos recuperan su dimensión semántica. Pasamos, así, al álgebra de circuitos, al álgebra numérica, al álgebra de proposiciones, etc. Areas de diversos campos quedan estructuradas de acuerdo con las leyes del álgebra «abstracta» (de las letras) y ello permite una comparación de los diversos campos precisamente a través de esas áreas de idéntica estructuración. Nuestro objetivo —inserto en la tarea de Boole— es la comparación de dos campos: El de los números (Aritmética) y el de las proposiciones (Lógica) a través del álgebra. En concreto, establecer un isomorfismo lo más amplio posible entre ambos campos.

Sea L el campo del álgebra de proposiciones: Las variables simples representan proposiciones; los dos valores booleanos «1» y «0» representan la verdad y la falsedad respectivamente; las funciones que encabezan las columnas de las tablas de las figuras 2 y 3 se corresponden con los funtores —monádicos y diádicos— de la lógica clásica bivalente.

Se puede intentar establecer una correspondencia biunívoca entre los elementos mencionados del campo L y otros elementos del campo A —el campo de la Aritmética. Habría que buscar para cada funtor lógico una operación aritmética. Más este camino queda cerrado a poco de transitarlo. Es preciso buscar atajos, pero no uno cualquiera; el elegido no ha de ser tan angosto que obligue a dejar atrás parte del material del campo. El que proponemos es el siguiente:

Considerar los funtores lógicos agrupados según los tipos de colecciones (a), (b), (c_1), (c_2) y (c_3) en que hemos dividido las columnas de las figuras 2 y 3. A partir de un funtor perteneciente a un determinado tipo y de las transformaciones idéntica y complemento se obtienen los funtores restantes del tipo en cuestión. Esto exige considerar a las transformaciones como elementos pertenecientes también al conjunto original a partir del cual se establece la correspondencia entre el campo L y el campo A.

Si L —campo de la Lógica— es el conjunto original cuyos elementos son: Variables proposicionales (p, q, r,...); dos valores (verdad y falsedad, representados por «1» y «0»); cinco funtores, pertenecientes a los tipos (a), (b), (c_1), (c_2) y (c_3); y dos transformaciones (idéntica y complemento), hay que establecer una aplicación sobre el conjunto imagen A —campo de la Aritmética— que debe incluir: variables numéricas (x, y, z,...), dos valores numéricos, cinco tipos de operaciones binarias, y dos operaciones monarias.

TEOREMA: Cabe establecer una aplicación de L sobre A.

La tabla de la F. 8 muestra la correspondencia biunívoca entre los elementos de ambos campos como sigue:

(I) p, q, r, ...variables proposicionales; x, y, z,..., variables numéricas.

(II) «1» y «0» signos que representan los valores proposicionales «verdad» y «falsedad» y asimismo los valores numéricos 1 y 0.

(III) «T» (tautología), el funtor lógico perteneciente al tipo (a); «&» (Conjunción), el funtor lógico perteneciente al tipo (b); «_» (afirmación del miembro a la izquierda del signo), es el funtor perteneciente al tipo (c_1); «W» (disyunción exclusiva), el funtor perteneciente al tipo (c_2); y «_» (afirmación del miembro a la izquierda del signo), el funtor perteneciente al tipo (c_3). A cada uno de estos funtores lógicos corresponde respectivamente una operación aritmética que aparece en la Fig. 8 encima de su correspondiente funtor lógico.

(IV) «−» (transformación complemento). Dada una variable proposicional *p*, mediante la transformación «−» obtenemos $\overline{p}$. Se corresponde con la operación aritmética «1 − x»

Campo A	x y	1-x	1	x.y	x	x-y	y
Campo L	p q	p	p T q	p & q	p q	p w q	p q
	1 1	0	1	1	1	0	1
	1 0	0	1	0	1	1	0
	0 1	1	1	0	0	1	1
	0 0	1	1	0	0	0	0

FIG. 8

3. Entre Sheffer y Piaget

Hemos hecho referencia más arriba a atajos a través de los cuales es posible poner en correspondencia operaciones lógicas con operaciones aritméticas. Uno de ellos (atajo nº 1) consiste en partir de un número más o menos reducido de funtores lógicos tomados como primitivos y definir los restantes en términos de aquéllos. Sólo resta, en ese caso, buscar las operaciones aritméticas que se corresponden con los funtores lógicos tomados como primitivos. El caso límite en esta dirección lo constituye el funtor de Sheffer (o el de Peirce), pero con todas las dificultades que plantean los casos límite. El funtor incompatibilidad, «/», es un funtor diádico al que pueden reducirse todos los demás (incluídos los monádicos). Pero sólo aparentemente. (Por lo demás resulta obvio que un sistema con un sólo operador no sería tal). En la interpretación misma de «/» aparece —aunque implícito— el funtor «−»; «p/q» significa «no a la vez *p* y *q*».

Los funtores «/» y «↓» constituyen, pues, casos límites, ya que no se sabe actualmente cómo realizar concretamente dichas operaciones sin acudir a otras operaciones elementales.

Abandonado el atajo de la operación única, hemos de elegir uno de entre aquéllos en los que intervienen n (con $n \geqslant 2$) operaciones. Por ejemplo (atajo nº 2), a la vista de la tabla de la F. 3, doblarla por la línea que separa f_8 y f_9. Las figuras △, O, □ coinciden. Ello quiere decir que necesitamos ocho operaciones diádicas correspondientes a las ocho primeras funciones y una operación manádica correspondiente a la transformación complemento.

Atajo nº 3: Partir de dos funtores, uno monádico y otro diádico, como funtores primitivos a los que pueden reducirse todos los demás. Sean éstos, por ejemplo, «−» y «&». Se pueden poner en correspondencia con la operación aritmética «$1-x$» y el operador «.» (multiplicador). Así, dada la fórmula lógica «$p \rightarrow q$», su correspondiente aritmética es $1-[x.(1-y)]$.

De hecho, todos los investigadores de la Lógica han realizado —explícita o implícitamente— la reducción de unos funtores a otros. Tal reducción ha de ser efectuada a partir de unos criterios evaluables algebráicamente, que son los que hacen preferible un atajo a otro. De otro modo, resulta arbitrario reducir las operaciones lógicas a un número cualquiera sin justificar la elección. Es el sistema que constituyen los funtores elegidos como primitivos y las transformaciones lo que importa a la hora de decidirse por uno de los atajos. Es desde este punto de vista desde el cual preferimos el expuesto más arriba —tres tipos de funtores y ocho transformaciones— al nº 1 y al nº 3. Estos últimos son inferiores algebráica y estructuralmente.

Nuestro atajo es similar al de Piaget, pero sólo en las vías de acceso. Para Piaget lo importante es el sistema que forman las transformaciones, más no se preocupa del sistema que forman los funtores. En segundo lugar, el objetivo de Piaget consiste en relacionar, no la Lógica con la Aritmética, en el sentido arriba descrito, sino la Lógica con el Algebra, en cuyo caso su sistema de transformaciones resulta incompleto. El grupo de transformaciones de Piaget —I, N, R, C— constituye un subgrupo de nuestro grupo —completo algebráicamente. Las transformaciones I, N, R, C corresponden respectivamente a las transformaciones I, B, G, H de nuestro grupo.

La puesta en correspondencia de un área de la Lógica estructurada de la forma arriba indicada permite, en primer lugar, una comparación en base a aspectos concretos de ambas disciplinas. En segundo lugar, permite desarrollar un método de decisión para el cálculo de proposiciones a través de operaciones aritméticas con aplicaciones prácticas como puede ser la prueba de teoremas de lógica de proposiciones en una calculadora que sólo dispone de operaciones aritméticas.

Como puede comprobarse, este método de decisión constituye un caso intermedio entre el método de las «formas normales» y el «método de resolución» de Quine. Desde el punto de vista práctico tiene, creemos, las siguientes ventajas sobre los dos citados:

(1) Frente al método de Quine: al intervenir como miembros de operaciones aritméticas los elementos «1» y «0» éstas se resuelven más rápida y cómodamente que los elementos «1» y «0» ó «V» y «F» en operaciones lógicas. La mayor parte de las pruebas constituyen fórmulas en las que intervienen ceros, unos, restas y multiplicaciones. Y teniendo en cuenta las relaciones que estos elementos —cero y uno— guardan con las operaciones multiplicación y resta, las fórmulas se acortan rápidamente.

Ofrecemos a continuación la prueba de los dos teoremas más específicos de la lógica clásica. Uno de la lógica aristotélica —el principio de no contradicción. Y otro de la lógica estóica —el IV de sus «indemostrables»:

(I) PRINCIPIO DE NO-CONTRADICCION:

—(p & - p)

nº de opciones $\begin{cases} p = 1 \\ p = 0 \end{cases}$

Forma aritmética: $1-[px(1\text{-}p)]$

$p = 1$ $\quad 1-[1x(1\text{-}1)] =$
$\quad\quad 1- \quad 0 \quad = 1$

$p = 0$ $\quad 1-[0x(1\text{-}0)] =$
$\quad\quad 1- \quad 0 \quad = 1$

(II) EL IV INDEMOSTRABLE DE LOS ESTOICOS EN FORMA DE TESIS LOGICA:

$[(p\,w\,q)\ \&\ p] \rightarrow -q$

nº de opciones $\begin{cases} p = 1 & \begin{cases} q = 1 \\ q = 0 \end{cases} \\ p = 0 & \begin{cases} q = 1 \\ q = 0 \end{cases} \end{cases}$

Forma aritmética: $1-[[(/p-q/)xp]xq]$

$p = 1$ $\quad 1-[[(/1-q/)x1]xq]$
$\quad\quad 1-[(/1-q/)xq]$

$q = 1$ $\quad 1-[(/1-1/)x1]$
$\quad\quad 1- \quad 0 \quad = 1$

$q = 0$ $\quad 1-[(/1-0/)x0]$
$\quad\quad 1- \quad 0 \quad = 1$

$p = 0$ $\quad 1-[[(/0-q/)x0]xq]$
$\quad\quad 1- \quad 0 \quad = 1$

BIBLIOGRAFIA

ALEXANDROFF, P.S., *Introducción a la teoría de los grupos.* Trad. J.E. Quastler. EUDEBA, Buenos Aires, 1965.

BERNSTEIN, B.A., «Operations with respect to which the elements of a boolean algebra form a group» en *Transact. Amer. Math. Soc.*, 26, 1924, pp. 171-75.

KUNTZMANN, J., *Algèbre de Boole.* Dunod, Paris, 1965.

LENTIN, A. - RIVAUD, J., *Algebra moderna.* Trad. E. Motilva. Aguilar, Madrid, 1973.

PIAGET, J., *Essai de logique opératoire.* Dunod, París, 1972.

SHEFFER, H.M., «A set of five independent postulates for Boolean algebras, with application to logical constants» en *Transa Amer. Math. Soc.*, 14, 1913, pp. 481-88.