Cuadernos del CIMBAGE N°7 (2005) 61-78

ANÁLISIS ECONÓMICO DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA DE GASTOS DE PRODUCCIÓN CON COEFICIENTES BORROSOS Y CON RESTRICCIONES

Joan Carles Ferrer, Guillem Bonet, Elvira Cassú
Departamento de Empresa
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad de Girona.
Campus de Montilivi s/n
17071 – Girona - España
joancarles.ferrer@udg.es

Recibido el 23 de noviembre 2004, recibido con observaciones el 16 de febrero 2005, aceptado el 24 de febrero 2005

Resumen

En el ámbito de la Economía de la Empresa tiene mucha importancia el estudio de los gastos de producción $E(Q)$ que se originarán en el proceso y que generalmente vendrán expresados matemáticamente por una dependencia lineal o cuadrática de las unidades Q que se proponen fabricar. Supondremos, además, que esta función está afectada por dos restricciones: una es de productividad, $Q_1 \leq Q_2 \leq Q_3$, y otra de limitación de gastos máximos permitidos, $E(Q) \leq E_M$.

En el presente artículo partiremos de una función cuadrática nítida, en la cual justificaremos el signo de los coeficientes que hemos empleado. Después, para adentrarnos en el campo *fuzzy*, la generalizaremos con otra de coeficientes borrosos. Naturalmente, la nueva función borrosa ya no se expresará a través de una única curva, sino que estará constituida por un haz infinito de curvas nítidas, cada una de ellas con un determinado grado de posibilidad. Centramos nuestra atención en las curvas que llamamos central, inferior y superior.

El núcleo de nuestro análisis consistirá básicamente en reducir paulatinamente los soportes de los coeficientes hasta hallar un cierto valor k del α-corte, de manera que a partir de él todas las curvas del haz borroso tengan sentido económico y cumplan las dos restricciones impuestas. En último lugar, y a través de un caso numérico, comprobaremos las deducciones teóricas que hemos obtenido en el análisis anterior.

Palabras clave: *economía aplicada, números borrosos, incertidumbre.*

ECONOMICAL ANALYSIS OF A PRODUCTION´S EXPENSES QUADRATIC FUNCTION WITH FUZZY COEFFICIENTS AND WITH RESTRICTIONS

Joan Carles Ferrer, Guillem Bonet, Elvira Cassú
Departamento de Empresa
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad de Girona.
Campus de Montilivi s/n
17071 – Girona - España
joancarles.ferrer@udg.es

Received 23 de November 2004, received in revised form 16 February 2005, accepted 24 February 2005

Abstract
In the context of Business Economics it is essential to carry out studies of the costs of production $E(Q)$. Obviously, these kinds of costs originated in the production process will depend on the number Q of units produced by the company and, generally, can be mathematically expressed by a quadratic function, $E(Q) = a.Q^2 - b.Q + c$, where all three coefficients must be positive real numbers.
We will suppose that in this process there is also a production constraint, normally due to productivity, $Q_1 \leq Q_2 \leq Q_3$, or cost limitations, $E(Q) \leq E_M$. Of course, in the production costs there must always be a non negativity constraint because the costs must always be positive. And, moreover, for reasons of security, another cost constraint is desirable, so that they do not exceed a previously fixed maximum, E_{MAX}. We summarise the last two constraints in the inequality $0 \leq E(Q) \leq E_{MAX}$.
Afterwards, to enter into the uncertainty field, we must generalise the function $E = f(Q)$ into one of fuzzy coefficients. Of course, the new fuzzy function will not be a single curve, but rather an infinite set or sheaf of sharp curves, each one associated with a particular degree of possibility. In this study we concentrate on three special curves of this infinite sheaf: the central, lower and upper curves.
However, the focus of our attention will consist basically in gradually reducing the supports of the coefficients until we find a certain value k of the α-cuts, such that if $\alpha > k$, then all the infinite curves of this fuzzy beam will make economic sense and,

besides, will meet the two imposed constraints. To conclude this paper, we confirm, using a numerical example, all the conclusions deduced in the preceding analysis.

Key words: *applied economy, fuzzy numbers, uncertainty.*

1. FUNCIÓN CUADRÁTICA DE GASTOS DE PRODUCCIÓN

Partimos de una función cuadrática de producción que, en principio, suponemos nítida:

$$E(Q) = a.Q^2 - b.Q + c \qquad [1.1]$$

en donde Q son las unidades producidas de un objeto determinado, $E(Q)$ los gastos en unidades monetarias originados durante el proceso de producción, y en la cual sus coeficientes a, b y c son positivos.

Sus dos primeras derivadas:

$$E'(Q) = 2a.Q - b \qquad [1.2]$$

$$E''(Q) = 2a \qquad [1.3]$$

Para dotar de sentido económico a la función [1.1], ésta ha de ser matemáticamente cóncava, ya que ha de existir un mínimo, con lo que resultará en [1.3] que $E''(Q) > 0$, y así $2a > 0$, con lo cual el coeficiente "a" será positivo.

Además, a partir de la producción mínima $Q = b/(2a)$, que se obtiene al anular [1.2], y como Q ha de ser lógicamente positivo, también lo será el coeficiente *b*.

Por último, como siempre existirán gastos de producción, $E(Q) > 0$. En el caso límite para $Q = 0$ tendremos, $E(Q) = a.0^2 - b.0 + c = c$, con lo que el coeficiente *c* también será positivo.

Supondremos además que existe una restricción de producción, que es normalmente debida a limitaciones presupuestarias o bien a condicionamientos de fabricación:

$$Q_1 \leq Q \leq Q_2 \qquad [1.4]$$

Además, como ya hemos dicho, la función [1.1] es cóncava y como ha de ser siempre positiva, estará situada completamente en el primer cuadrante. Por tanto, no podrá cortarse con el eje horizontal de producción, $E(Q)=0$. Esto significa que la ecuación de 2º grado:

$$a.Q^2 - b.Q + c = 0 \qquad [1.5]$$

deberá tener soluciones imaginarias o complejas. En otras palabras, el discriminante de [1.5]:

$$D = b^2 - 4a.c \qquad [1.6]$$

tendrá que ser siempre negativo, $D < 0$.

De esta manera el punto mínimo de la función [1.1] estará situado en el primer cuadrante. Además, como este mínimo se produce para $Q = b/(2a)$, los gastos para este nivel de producción serán:

$$E(Q) = a.[b/(2a)]^2 - b.[b/(2a)] + c = -D/(4a)$$

Por consiguiente, el punto mínimo será:

$$P(b/(2a), -D/(4a)) \qquad [1.7]$$

2. UN EJEMPLO

Consideremos a modo de ejemplo $a = 2,\ b = 16$ y $c = 64$, con lo que la función de gastos será:

$$E(Q) = 2.Q^2 - 16.Q + 64 \qquad [2.1]$$

Consideremos también la restricción de producción con $Q_1 = 1$ y $Q_2 = 8$, es decir:

$$1 \le Q \le 8 \qquad [2.2]$$

Mediante una tabla de valores obtenemos los puntos $(1,50)$, $(2,40)$, $(3,34)$, $(4,32)$, $(5,34)$, $(6,40)$, $(7,50)$ y $(8,64)$, los cuales nos permiten dibujar la Figura 1:

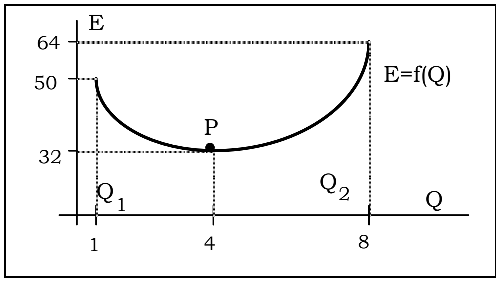

Figura1. Función de gastos de producción restringida

Observamos que el discriminante [6] será:

$$D = 16^2 - 4.2.64 = -256 \qquad [2.3]$$

Por lo que el mínimo relativo [7] estará en $Q = 16/(2.2) = 4$ y su imagen será $E(Q) = -(-256)/(4.2) = 32$, esto es:

$$P(4{,}32) \qquad [2.4]$$

Notemos también que los máximos se encuentran en los extremos de la restricción:

$$E(Q_1) = 50 \quad \text{y} \quad E(Q_2) = 64 \qquad [2.5]$$

Con lo cual el último punto constituirá un máximo absoluto.

3. GASTOS DE PRODUCCIÓN CON COEFICIENTES BORROSOS

Trabajaremos a continuación en el campo de la matemática *fuzzy* generalizando la función *crisp* [1.1]. Para ello, sustituiremos los coeficientes a, b y c por los números borrosos triangulares:

$$\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3),\ \tilde{B} = (b_1, b_2, b_3) \text{ y } \tilde{C} = (c_1, c_2, c_3) \qquad [3.1]$$

coincidiendo los valores de mayor nivel de presunción con los coeficientes nítidos iniciales:

$$a_2 = a,\ b_2 = b \text{ y } c_2 = c \qquad [3.2]$$

Así obtendremos una función borrosa de gastos de producción:

$$\tilde{E}(Q) = \tilde{A}.Q^2 - \tilde{B}.Q + \tilde{C} \qquad [3.3]$$

En nuestro análisis particular de la borrosidad consideraremos que el soporte de la función *fuzzy* anterior está constituída por una familia infinita de curvas *crisp*:

$$E_{ijk}(Q) = a_i.Q^2 - b_j.Q + c_k \qquad [3.4]$$

Notemos que cada coeficiente pertenece al soporte de su respectivo número borroso triangular:

$$a_i \in [a_1, a_3],\ b_i \in [b_1, b_3],\ c_i \in [c_1, c_3] \qquad [3.5]$$

De este haz borroso de infinitas curvas [3.4] destacamos en primer lugar la *curva con mayor nivel de presunción*, que es la curva inicial crisp [1.1]. En nuestro caso adoptará la forma:

$$E_c(Q) = a_2.Q^2 - b_2.Q + c_2 \qquad [3.6]$$

Después nos fijaremos en la *curva inferior*:

$$E_i(Q) = a_1.Q^2 - b_3.Q + c_1 \qquad [3.7]$$

Y, por último, en la *curva superior*:

$$E_s(Q) = a_3.Q^2 - b_1.Q + c_3 \qquad [3.8]$$

En la Figura 2 observamos estas curvas, en donde suponemos también una restricción de máximos gastos permitidos, E(Q) máx.:

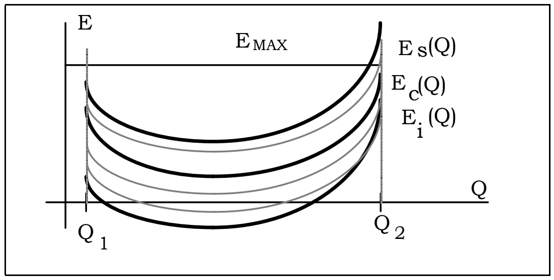

Figura 2. Curvas central, inferior y superior del haz borroso

Podrá suceder que muchas de estas curvas del haz no tengan sentido económico, pues tal como hemos dicho deben limitarse al primer cuadrante. Así, en la figura anterior la curva inferior no seria válida puesto que algunos gastos de producción serian negativos. Tampoco la curva superior seria posible ya que supera, para algunos valores de Q, los gastos de producción máximos autorizados.

4. REDUCCIÓN DE LOS SOPORTES DE LOS COEFICIENTES

Para dar sentido económico a los posibles valores de la función *fuzzy* [3.3], habrá que reducir, los soportes de los coeficientes borrosos iniciales [3.1] y utilizar nuevos números borrosos triangulares, tal como representamos en la Figura 3, para el número borroso reducido asociado a $\tilde{\tilde{A}}$, al que denotaremos por $\tilde{A}^{\alpha}$, para un cierto valor α que precisaremos. Para ello usaremos las rectas de los α-cortes de [3.1]:

$$a_1^{\alpha} = a_1 + (a_2 - a_1).\alpha \qquad a_2^{\alpha} = a_2 \qquad a_3^{\alpha} = a_3 - (a_3 - a_2).\alpha \qquad [4.1]$$

$$b_1^{\alpha} = b_1 + (b_2 - b_1).\alpha \qquad b_2^{\alpha} = b_2 \qquad b_3^{\alpha} = b_3 - (b_3 - b_2).\alpha \qquad [4.2]$$

$$c_1^{\alpha} = c_1 + (c_2 - c_1).\alpha \qquad c_2^{\alpha} = c_2 \qquad c_3^{\alpha} = c_3 - (c_3 - c_2).\alpha \qquad [4.3]$$

De manera que los nuevos coeficientes borrosos serán:

$$\tilde{A}^{\alpha} = \left(a_1^{\alpha}, a_2, a_3^{\alpha}\right) \quad \tilde{B}^{\alpha} = \left(b_1^{\alpha}, b_2, b_3^{\alpha}\right) \quad \tilde{C}^{\alpha} = \left(c_1^{\alpha}, c_2, c_3^{\alpha}\right) \qquad [4.4]$$

Como observamos en la figura 3 para un $\alpha = 0.5$, estos nuevos números borrosos reducidos asociados a los coeficientes borrosos iniciales se generan reduciendo el soporte del número borroso inicial, tomando a_1^{α} en lugar de a_1 y a_3^{α} en lugar de a_s, y manteniendo el valor de a_2 como el de mayor nivel de presunción.

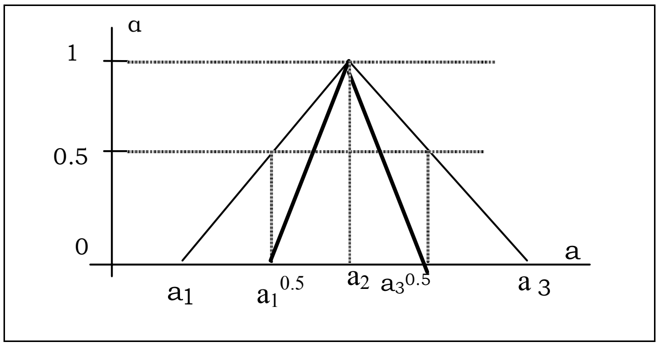

Figura 3. Números borrosos triangulares de soporte reducido

En nuestra función particular [2.1], $E(Q) = 2.Q^2 - 16.Q + 64$, con $a = 2$, $b = 16$ y $c = 64$, podemos generalizar estos coeficientes a través, por ejemplo, de los siguientes números borrosos triangulares:

$$\tilde{A} = (1, 2, 3), \ \tilde{B} = (14, 16, 19) \text{ y } \tilde{C} = (60, 64, 70) \qquad [4.5]$$

De esta manera, la curva central de la función borrosa será la misma que [2.1], pero la curva inferior y superior vendrán expresadas por:

$$E_i(Q) = Q^2 - 19.Q + 60 \qquad [4.6]$$

$$E_s(Q) = 3.Q^2 - 14.Q + 70 \qquad [4.7]$$

Con el fin de reducir la amplitud, $A(Q) = E_s(Q) - E_i(Q)$, de este haz infinito de curvas, emplearemos las expresiones [4.1], [4.2], [4.3], [4.4]obteniendo para cada valor de $\alpha \in [0,1]$, los nuevos números borrosos triangulares:

$$\tilde{A}^{\alpha} = (1+\alpha, 2, 3-\alpha) \quad \tilde{B}^{\alpha} = (14+2\alpha, 16, 19-3\alpha) \quad \tilde{C}^{\alpha} = (60+4\alpha, 64, 70-6\alpha) \quad [4.8]$$

donde para $\alpha = 0$ resultan los NBTs iniciales [4.5] y para $\alpha = 1$ los coeficientes *crisp* de [2.1].

5. RESTRICCIÓN DE NO-NEGATIVIDAD

Ya hemos mencionado que en la Figura 2 existían valores de la producción Q que hacían negativos los gastos $E(Q)$. En otras palabras, que algunas curvas, como la inferior, cortan al eje horizontal en dos puntos, lo cual significa que el discriminante [1.6] es positivo. Comprobémoslo en nuestro ejemplo particular con la curva inferior [4.6], $E_i(Q) = Q^2 - 19.Q + 60$, obteniendo $D = 19^2 - 4.1.60 = 121 > 0$, signo que nos asegura la existencia de curvas secantes.

Por consiguiente, si queremos que siempre $E_i(Q) > 0$, la curva inferior no podrá cortar nunca el eje horizontal $E = 0$, y así el discriminante D habrá de ser siempre negativo. Es decir, que la negatividad del discriminante implica la existencia de soluciones complejas y, por tanto, la no intersección de la curva con el eje de abscisas.

La curva inferior del haz borroso, dependiente de α y como generalización de la [3.7], será:

$$E_i(Q,\alpha) = a_1^{\alpha}.Q^2 - b_3^{\alpha}.Q + c_1^{\alpha} \qquad [5.1]$$

Calculemos su discriminante:

$$D^{\alpha} = \left(b_3^{\alpha}\right)^2 - 4.a_1^{\alpha}.c_1^{\alpha} \qquad [5.2]$$

A continuación deberemos determinar el valor concreto k de α que sea frontera entre los conjuntos de soluciones reales y complejas. Por consiguiente, deberemos anular el discriminante:

$$\left(b_3^{k}\right)^2 = 4.a_1^{k}.c_1^{k} \qquad [5.3]$$

Teniendo en cuenta las expresiones [4.1], [4.2] y [4.3] de los α-cortes, tendremos la relación que nos permitirá deducir el valor de k;

$$\left[b_3 - \left(b_3 - b_2\right).k\right]^2 = 4.\left[a_1 + \left(a_2 - a_1\right).k\right].\left[c_1 + \left(c_2 - c_1\right).k\right] \qquad [5.4]$$

Ejemplo:

Trabajando a partir de nuestra particular función de gastos, [2.1] dada en la sección 2, aunque considerando ahora sus coeficientes *fuzzy* usando los NBTs [4.8], y tomando el valor k para α, resultará al aplicar la igualdad [5.4] que:

$$\left(19 - 3k\right)^2 = 4.\left(1 - k\right).\left(60 + 4k\right)$$

Desarrollando y simplificando obtenemos la ecuación de 2º grado $5 \cdot k^2 - 370 \cdot k + 121 = 0$, que tiene de raíces k=73.67 y k=0.328485169. Evidentemente, la primera no será válida porque k, como nivel de un α-corte, tiene que estar en el intervalo [0, 1]. La segunda sí lo es y la aproximamos a:

$$k=0.3285 \qquad [5.5]$$

Para este valor de k los nuevos coeficientes borrosos, utilizando [4.8], serán:

$$\tilde{A}^k = (1.3285, 2, 2.6715) \qquad \tilde{B}^k = (14.657, 16, 18.0145)$$

$$\tilde{C}^k = (61.314, 64, 68.029) \qquad [5.6]$$

Fijémonos que con ello la nueva curva inferior será:

$$E_i^1(Q) = 1.3285.Q^2 - 18.0145.Q + 61.314 \qquad [5.7]$$

Mientras que la nueva curva superior vendrá expresada por:

$$E_i^1(Q) = 2.6715.Q^2 - 14.657.Q + 68.029 \qquad [5.8]$$

Seguidamente realizamos la gráfica del haz borroso con el α-corte $k = 0.3285$, obteniendo las curvas central, inferior y superior, que mostramos en la Figura 4:

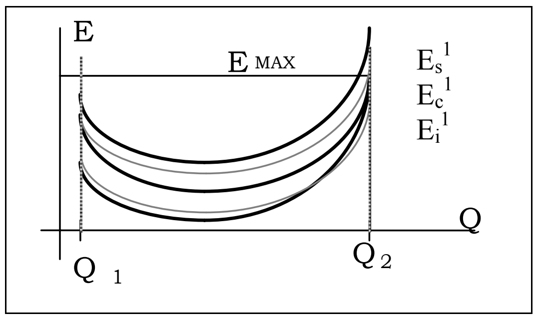

Figura 4. No negatividad de la nueva curva inferior

Comprobamos, pues, que la curva inferior se encuentra completamente por encima del eje horizontal, es decir que los gastos serán siempre positivos. Por supuesto, ahora el discriminante tendrá que ser negativo, $D = (18.0145)^2 - 4\ .1.3285\ .\ 61.314 = -1.3 < 0$, con lo que no habrá intersección con el eje horizontal.

6. RESTRICCIÓN DE RIESGO

Para evitar peligros derivados de un excesivo valor de los gastos de producción $E(Q)$, será indispensable que exista un valor máximo permitido de los gastos, E_{MAX}, el cual nunca podrá ser superado. Con ello tendremos la nueva restricción:

$$E(Q) \leq E_{MAX} \qquad [6.1]$$

Puesto que las curvas son matemáticamente cóncavas, el valor máximo de $E(Q)$ se encontrará en alguno de los extremos de la restricción de producción, Q_1 o Q_2, y además estará situado sobre la curva superior que, como la inferior [5.1], deberemos generalizarla a partir de la curva superior *crisp* [3.8]:

$$E_s(Q,\alpha) = a_3^{\alpha}.Q^2 - b^{\alpha}.Q + c_3^{\alpha} \qquad [6.2]$$

Sabemos que ha de suceder que $E_s(Q,\alpha) \leq E_{MAX}$, así que hallaremos los α-cortes frontera a los niveles k_1 y k_2, que serán distintos del valor k deducido por [5.4], para cada uno de los extremos, Q_1 y Q_2.

Así, el valor de k_1 se hallará a partir de la igualdad:

$$a_{s1}^{k}.(Q_1)^2 - b_{11}^{k}.Q_1 + c_{31}^{k} = E_{MAX} \qquad [6.3]$$

Y, de forma parecida, el valor de k_2 se deducirá a partir de:

$$a_{s2}^{k}.(Q_2)^2 - b_{12}^{k}.Q_2 + c_{32}^{k} = E_{MAX} \qquad [6.4]$$

Finalmente, escogeremos como nivel del α-corte, el máximo de los valores entre el k de [5.4], el k_1 de [6.3], y el k_2 de [6.4]. Evidentemente, con los nuevos coeficientes borrosos que se obtendrán, todas las curvas del haz cumplirán las tres restricciones impuestas de no negatividad, productividad y riesgo.

Ejemplo:

Continuamos con nuestro caso particular, imponiendo seguidamente una restricción de riesgo en la cual los gastos de producción no puedan superar las 100 unidades. Es decir, el valor máximo permitido es $E_{MAX=100}$. Por consiguiente, la restricción será:

$$E(Q) \leq 100 \qquad [6.5]$$

A continuación comprobamos que la curva superior inicial (para $\alpha = 0$), dada por [4.7], $E_s(Q) = 3.Q^2 - 14.Q + 70$, supera el valor de E_{MAX} para el extremo superior $Q_2 = 8$ unidades:

$$E_s(8) = 3.8^2 - 14.8 + 70 = 230 > 100$$

La curva superior del haz que hemos reducido para evitar la negatividad (para $\alpha = k = 0.3285$), dada por [5.8]. Tampoco cumple la condición [6.5] en Q_2, puesto que:

$$E_s^1(8) = 2.6715.\,8^2 - 14.657.8 + 68.029 = 121.749 > 100$$

En cambio sí la cumplen para el extremo inferior $Q_1 = 1$. Sólo falta aplicar las expresiones [4.7] y [5.8] para confirmarlo:

$$E_s(1) = 3.\,1^2 - 14.\,1 + 70 = 59 < 100$$

$$E_s^1(1) = 2.6715.1^2 - 14.657.1 + 68.029 = 56.0435 < 100$$

Por lo tanto, como el extremo Q_1 ya cumple la condición, solamente deberemos aplicar la fórmula [6.4] para determinar el α-corte k_2:

$$a_{s2}^k.8^2 - b_1\,k_2.8 - b_1\,k_2.\,8 + c_{32}^k = 100$$

Consultando los números borrosos triangulares de los coeficientes iniciales obtenidos en [4.8], en los que consideramos k_2 en el lugar de α, tendremos:

$$(3-k_2).64-(14+2.k_2).8+(70-6.k_2)=100$$

Operando obtendremos el valor $k_2 = 0.581395384$, que siempre hemos de redondear por exceso para que se cumpla la restricción:

$$k_2 = 0.5814 \qquad [6.6]$$

Ahora deberemos hallar el valor máximo de los α-cortes frontera encontrado que, en nuestro caso, han sido $k = 0.3285$ y $k_2 = 0.5814$. Evidentemente deberemos considerar este último valor para que se cumplan todas las restricciones, por lo que tomaremos los α-cortes con $\alpha = 0.5814$. Para este valor los nuevos coeficientes borrosos de [4.8] vendrán dados por:

$$\tilde{A}^{k_2} = (1.5814, 2, 2.4186) \qquad \tilde{B}^{k_2} = (15.1628, 16, 17.2558)$$

$$\tilde{C}^{k_2} = (32.3256, 64, 66.5116) \qquad [6.7]$$

De esta manera, la nueva curva inferior será:

$$E_i^2(Q) = 1.5814.\,Q^2 - 17.2558.\,Q + 62.3256 \qquad [6.8]$$

Mientras que la nueva curva superior vendrá expresada por:

$$E_s^2(Q) = 2.4186.\,Q^2 - 15.1628.\,Q + 66.5116 \qquad [6.9]$$

Como ya hemos indicado a través de la propia construcción, la curva intermedia con mayor nivel de presunción [2.1], $E_c^2(Q) = 2.Q^2 - 16.Q + 64$, es siempre invariable. Podremos realizar ahora una gráfica del haz borroso, que mostramos en la Figura 5:

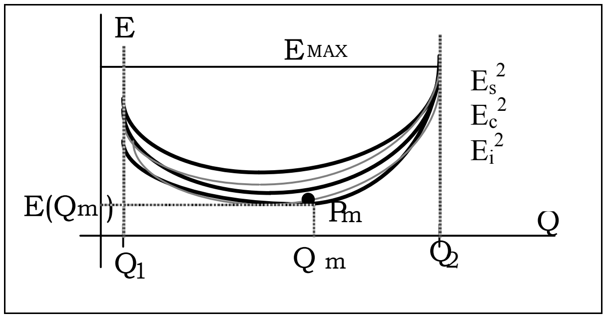

Figura 5. Nuevo haz borroso que cumple las restricciones

Dando algunos valores a la producción, $Q=1$, 4 y 8, que los gastos cumplen las restricciones de no negatividad y riesgo. En efecto, en la curva inferior [6.8] veremos que los tres puntos $(1, 46.65)$, $(4, 18.60)$ y $(8, 25.48)$ son todos de gastos positivos, y en la curva superior [6.9] los puntos $(1, 53.76)$, $(4, 44.56)$ y $(8, 99.99)$ indican que los gastos no superan las 100 unidades, coincidiendo prácticamente este valor en el extremo superior $Q_2 = 8$ de la restricción de producción.

7. COMENTARIOS FINALES

Generalmente, en microeconomía, la función de gastos de producción $E = f(Q)$ viene dada por una función cuadrática *crisp* [2.1], que en el caso de nuestro ejemplo es:

$$E_c^2(Q) = 2.Q^2 - 16.Q + 64$$

Sin embargo, para ajustarnos mejor a la realidad económica, debido a la incertidumbre presente en los procesos económicos y en la modificación de factores que puedan surgir en la propia empresa, *a priori* la transformamos, por ejemplo, en la función *fuzzy*:

$$\widetilde{E}(Q) = (1, 2, 3).Q^2 - (14, 16, 19).Q + (60, 64, 70)$$

Al establecer estos coeficientes, que son números borrosos triangulares, seguramente no habremos tenido en cuenta la necesaria condición de no negatividad de las variables económicas, la restricción de producción y la de gastos máximos permitidos (o de riesgo), que en nuestro ejemplo numérico son:

$$1 \le Q \le 8 \qquad 1 \le E(Q) \le 100$$

Después de un proceso de cálculo observamos que deben restringirse los soportes de los coeficientes para que se cumplan las restricciones anteriores en nuestro ejemplo particular. Cómo máximo la nueva función *fuzzy* de gastos de producción será:

$$\tilde{E}^2(Q) = (1.5814, 2, 2.4186).\, Q^2 - (15.1628, 16, 17.2558).\, Q + (62.3256, 64, 66.5116)$$

Para lograr un menor gasto de producción sería interesante disponer las condiciones necesarias para que la función sea precisamente la curva inferior [6.8]

$$E_i^2(Q) = 1.5814.\, Q^2 - 17.2558.\, Q + 62.3256$$

Además, siempre que sea posible, será deseable trabajar con el mínimo de esta curva inferior. Para saber cuál es anularemos su derivada, $2.\ 1{,}5814.\, Q - 17.2558 = 0$, obteniendo:

$$Q_m = 5.456 \text{ unid.} \qquad [7.1]$$

Para este nivel de producción los gastos esperados que corresponderían a los mínimos absolutos, alcanzarían el valor de:

$$E_m = 12.523 \qquad E_m = \text{unid. mon.} \qquad [7.2]$$

Hemos señalado en la Figura 5 este punto mínimo, con el cual deberíamos trabajar para ulteriores procesos de decisión.

REFERENCIAS

[1] Bonet, J.; Bonet, G.; Corominas, D. (2004). *Minimization of a cubic costs function with fuzzy coefficients using approximation matrices*. AMSE Internacional Conference on Modelling and Simulation. Lyon, France.

[2] Buckley, J.J. (1990) *On using α-cuts to evaluate fuzzy equations*. Fuzzy Sets and Systems, 38, 309-312.

[3] Buckley, J.J. (1991) *Solving fuzzy equations: A new solution concept*. Fuzzy Sets and Systems, 39, 291-301.

[4] Cassú, C.; Ferrer, J.C.; Bonet, J.; Bertrán, X. (1996). *Distribution of the possibility of risk in determining the marginal efficiency of investment in the context of uncertainty.* Procedings Internacional Conference on Intelligent Tecnologies in Human-Related Sciences, Vol 1, 311-314. León, Spain.

[5] Ferrer, J.C.; Bonet, G.; Bonet, J. (2004). *Real solutions in a second degree equation with fuzzy coefficients. Economical applications*. AMSE 2004 Conference of Minsk (Belarus), 116-120

[6] Gil Aluja, J. (1995) *Towards a new concept of economic research*. Fuzzy Economic Review, 0, 5-23.

[7] Gil Aluja, J. (1996) *Towards a new paradigm of investment selection in uncertainty*. Fuzzy Sets and Systems, Vol 84, 2.