SOBRE MULTIFUNCIONES *FUZZY*

Renato César Scarparo

En este trabajo se presentan y demuestran algunos resultados de D.T. Luc y C, Vargas referentes a multifunciones con dominio y blanco en espacios vectoriales topológicos de Hausdorff sobre **R**, como así mismo se explícita el concepto de multifunción *fuzzy* de acuerdo a Papageogiou, y se demuestran dos teorema de S. S. Chag, con respecto a las multifunciones *fuzzy*, proposiciones todas estas, que integran una línea de resultados necesarios para la demostración de desigualdades variacionales para multifunciones *fuzzy*, a su vez necesarias, para la extensión *fuzzy* de conocido teorema de Walras.

1. INTRODUCCIÓN

Aunque la lectura de este trabajo requiere el conocimiento previo, aunque elemental, de las teorías sobre Espacios Topológicos, y sobre Espacios Vectoriales Topológicos sobre **R**, los elementos de las mismas que se utilicen serán dados por conocidos, en el convencimiento que la dificultad que implica para el lector esta decisión, puede ser salvada por el mismo, sin mucha dificultad y satisfactoriamente, consultando algunas de las obras que integran la abundante bibliografía que trata dichas estructuras. A tal efecto se señalan en las referencia, obras adecuadas a dicho fin.

En este escrito se mantendrá la notación standard tanto para los objetos y relaciones *fuzzy* como para los no *fuzzy*, más aún toda notación que se refiera a conceptos *fuzzy* será debidamente explicitada como así también lo será, toda notación que se refiera a objetos o relaciones no *fuzzy* y que a nuestro entender puedan complicar innecesariamente la claridad del texto.

Como es usual anotaremos con **R** a los números reales, con **Q** a los números racionales, con **Z** a los números enteros, con **N** a los números naturales, con **I** al intervalo; $(0,1) = \{x \in \mathbf{R} / 0 \leq x \leq 1\}$.

DEFINICIÓN 1.1. Dado un conjunto X se llama conjunto *fuzzy* (o borroso) en X, o también, más propiamente, subconjunto *fuzzy* (o borroso) en X, a toda aplicación $A: X \rightarrow \mathbf{I}$.

Para cada $x \in A$ el valor $A(x)$ se llama el grado de pertenencia de x en el conjunto borroso A, y el conjunto $\{x \in A / A(x) > 0\}$, se llama el soporte de A y se anota sop A.

DEFINICIÓN 1.2. Sean X un conjunto no vacío, K un conjunto de índices y $(A_k)_{k \in K}$ una familia de conjuntos borrosos en X. Entonces definimos respectivamente, su unión $\cup\{A_k / k \in K\}$ y su intersección $\cap\{A_k / k \in K\}$, mediante las expresiones siguientes:

Para todo $x \in X : (\cup \{A_k / k \in K\} . x = \sup\{A_k / k \in K\}$.

Para todo $x \in X : (\cap \{A_k / k \in K\} . x = \text{ínf}\{A_k / k \in K\}$.

DEFINICIÓN 1.3. Dado un conjunto borroso A: $X \to \mathbf{I}$, y dado un valor $\alpha \in (0, 1]$, se llama α-corte de A o también subconjunto de nivel α, y se anota $(A)_\alpha$ al subconjunto definido por:

$$(A)_\alpha = \{x \in X / \; A(x) \geq \alpha\}$$

DEFINICIÓN 1.4. Una multifunción F de un conjunto X en un conjunto Y, es una aplicación F: $X \to 2^Y$, donde 2^Y es el conjunto de partes no vacías del conjunto Y.

• **Observación.** La definición de multifunción que se ha adoptado, sigue el criterio de E, Michael, excluyendo del blanco al conjunto vacío.

DEFINICIÓN 1.5. Dada una multifunción F de un espacio topológico X en un espacio topológico Y, se dice que:

1.2.1. F es semicontinua superiormente (brevemente s.c.s.) en un punto $x_0 \in X$, sii para todo subconjunto abierto V del espacio Y, tal que $F(x_0) \subset V$, existe un entorno abierto U de x_0, tal que para todo $x \in U : F(x) \subset V$.

1.2.2. F es semicontinua inferiormente (brevemente s.c.i.) en un punto $x_0 \in X$, sii para todo subconjunto abierto V del espacio Y, el conjunto $\{x \in X / \; (F(x) \cap V) \neq \emptyset\}$ es un subconjunto abierto.

1.2.3. F es continua en un punto $x_0 \in X$, sii F es s.c.s. y s.c.i. en x_0.

1.2.4. F es cerrada sii su gráfica, $\{(x, y) \in (X \text{ x } Y / \; y \in F(x)\}$, es un subconjunto cerrado.

• **Observación.** Obviamente una multifunción F de un espacio topológico X en un espacio topológico Y, se dice s.c.s. (resp. s.c.i., continua) cuando es s.c.s. (resp. s.c.i., continua) en todos sus puntos.

PROPOSICIÓN 1.6. Si F: $X \to 2^Y$, es una multifunción s.c.s. a valores compactos y ξ es una función continua de Y en **R**, entonces la multifunción ($\xi_0 F$) de X en **R**, es s.c.s. y a valores compactos.

Demostración. Obvia.

PROPOSICIÓN 1.7. Si F: $X \to 2^Y$, es una multifunción continua a valores compactos y ξ es una función continua de Y en **R**, entonces la multifunción ($\xi_0 F$) de X en **R**, continua y a valores compactos.

Demostración. Obvia.

2. MULTIFUNCIONES ENTRE ESPACIOS VECTORIALES TOPOLÓGICOS SOBRE R

DEFINICIÓN 2.1. Sean E e Y, espacios vectoriales topológicos de Hausdorff sobre **R**, X un subconjunto de E, no-vacío y convexo, K un cono convexo en Y, diferente a Y ($K \neq Y$) y F: $X \to 2^Y$, una multifunción. Entonces diremos que:

2.1.1. F es K-convexa, sii para todo $x_1, x_2 \in X$ y para todo $\lambda \in$ **I**: si $y_1 \in F(x_1)$ y $y_2 \in F(x_2)$ entonces

$$(\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2) \in F(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) + K .$$

2.1.2. F es K-cuasiconvexa sii para todo $a \in Y$, el conjunto $\{x\in X/ a \in (F(x)+ K)\}$ es convexo.

• **OBSERVACIÓN:** F es K-convexo, sii para todo $x_1, x_2 \in X$ y para todo $\lambda \in \mathbf{I}$:

$$\lambda F(x_1)+(1-\lambda)F(x_2) \subset F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)+K$$

PROPOSICIÓN 2.2. Si F: $X \rightarrow 2^Y$, es una multifunción K-convexa entonces F es K-cuasiconvexa.

Demostración: Sea $a \in Y$. Si

$$x_1, x_2 \in \{x \in X / a \in (F(x)+K)\},$$

vale decir sí

$$a \in (F(x_1)+K) \text{ y } a \in (F(x_2)+K)$$

como K es una multifunción convexa entonces

$$a \in \{\lambda(F(x_1)+K)+(1\text{-}\lambda)(F(x_2)+K)\}$$

luego como K es un cono convexo se tiene que,

$$a \in \{\lambda(F(x_1)+(1\text{-}\lambda)(F(x_2)\}+K\}$$

luego como por la K-convexidad de F tenemos que:

$$\{\lambda(F(x_1)+(1\text{-}\lambda)(F(x_2)\} \subset \{F(\lambda x_1+(1\text{-}\lambda)x_2)+K\}$$

resulta que

$$a \in \{F(\lambda x_1+(1\text{-}\lambda)x_2)+K\}$$

por lo tanto

$$(\lambda x_1 + (1\text{-}\lambda)\, x_2) \in \{x \in X \,/\, a \in (F(x)+K)\}$$

o sea la multifunción F es cuasiconvexa.

DEFINICIÓN 2.3. Sea ξ: $Y \rightarrow$ **R**, una aplicación con dominio en un espacio vectorial topológico de Hausdorff sobre **R**. Se dice que:

2.3.1. ξ es monótona creciente respecto a un cono convexo K, en Y; si $a \in (b+K)$ entonces $\xi(a) \geq \xi(b)$.

2.3.2. ξ es estrictamente monótona creciente respecto a un cono convexo K, en Y; si $a \in (b+K)$ entonces $\xi(a) > \xi(b)$.

LEMA 2.4. Sean; E e Y, dos espacios vectoriales topológicos de Hausdorff sobre **R**, X una parte de E no vacía y convexa, F: $X \rightarrow 2^Y$ una multifunción K-convexa, y ξ: $Y \rightarrow$ **R** una función convexa y monótona creciente respecto al cono K en Y, entonces la composición $(\xi \circ F)$: $X \rightarrow 2^R$ es $\mathbf{R}^+$-convexa.

Demostración: Sean $x_1, x_2 \in X$, $\lambda \in$ **I**, $z_1 \in \xi(F(x_1))$ y $z_2 \in \xi(F(x_2))$. Obviamente existen

$y_1 \in F(x_1)$ y $y_2 \in F(x_2)$, tales que $z_1 \in \xi(y_1)$ y $z_2 \in \xi(y_2)$

Como F es una multifunción K-convexa, existe $y_3 \in F(\lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2)$, tal que $(\lambda y_1 + (1-\lambda)\, y_2) \in (y_3 + K)$ luego como ξ es una función monótona creciente respecto al cono K, se tiene que:

$$\xi(\lambda y_1 + (1\text{-}\lambda)\, y_2) \geq \xi(y_2)$$

y como ξ también es convexa, se tiene además que:

$$(\lambda\xi(y_1)+(1\text{-}\lambda)\,\xi(y_2))\geq\,\xi\,(\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)$$

en consecuencia:

$$(\lambda\xi(y_1)+(1\text{-}\lambda)\,\xi(y_2))\geq\,\xi\,(y_3)$$

o sea

$$(\lambda\xi(y_1)+(1\text{-}\lambda)\,\xi(y_2))\in(\,\xi\,(y_3)+\mathbf{R}^{+})$$

por lo tanto si $z_3=\xi(y_3)$, tenemos finalmente que existe $z_3\in\mathbf{R}$ tal que

$$(\lambda z_1+(1-\lambda)z_2)\in(z_3)+\mathbf{R}^{+})$$

o sea que $\xi \circ F$, es $\mathbf{R}^{+}$-convexa.

LEMA 2.5. Sean Y un espacio vectorial topológico de Hausdorff sobre **R**, K un cono convexo en Y tal que $K-\{0\}$, es un subconjunto abierto. Entonces:

2.5.1. Dados un punto $e\in K^{\circ}$, y un punto $a\in Y$, la función ξ definida por la siguiente expresión:

$$(y)=\text{ínf}\,\{t\in\ \mathbf{R}\ /\ y\in\,(a+te-K^{-}\}$$

es continua y estrictamente monótona creciente respecto a K.

2.5.2. Si la multifunción F: $X\rightarrow 2^{Y}$ es a valores compactos y K-cuasiconvexa, entonces la composición $(\xi \circ F)$: $X\rightarrow 2^{R}$ es $\mathbf{R}^{+}$-cuasiconvexa.

Demostración:

La función ξ se puede expresar de la siguiente forma:

$$(y) = \text{ínf } \{t \in \mathbf{R} / \ te = y - a + k, \text{ para algún } k \in K^{-}\}$$

Como $y + K$, admite la existencia de un punto interior de la forma te, puesto que si V es un entorno abierto y discado del vector 0, tal que $((e+V) \subset K°)$, y $t´$ es un valor real tal que; $t' > 0, y\ (t'(y - a)) \in V$, se tiene que;

$$(e - t'(y - a)) \in K°,$$

luego si; $t = (1/t')$, se tiene que: $(te - (y - a)) \in K°$, o sea se tiene que $(te \in ((y - a) + K°))$, por lo tanto $(te \in (y + K)°)$. Teniendo en cuenta además, que el punto $\xi(y)e$, es el punto de intersección de la recta que contiene al vector e, con la frontera del conjunto $((y - a) + K))$, se demuestra que la función ξ es continua. En efecto dado $\varepsilon > 0$, si U es un abierto discado tal que:

$$((\xi(y) - \varepsilon)e + U) \in C((y - a) + K^{-}) \quad \text{y} \quad ((\xi(y) + \varepsilon)e + U) \in ((y - a) + K°)$$

se tiene que para todo $v \in U$;

$$((\xi(y) - \varepsilon)e) \notin (v + F_r((y - a) + K)) \quad \text{y} \quad ((\xi(y) + \varepsilon)e) \notin (v + F_r((y - a) + K))$$

por lo tanto;

$$(\xi(y) - \varepsilon) < \xi(y + v) < (\xi(y) + \varepsilon)$$

vale decir ξ es continua. A continuación demostraremos que ξ es estrictamente monótona creciente respecto a K. En efecto si

$$z \in (y + (K - \{0\}))$$

como el subconjunto $(K - \{0\})$ es abierto, se tiene que $z \in (y + K^{\circ})$, por lo tanto $(z - a) \in ((y - a) + K^{\circ})$, como $((y - a) + K^{\circ}) = ((y - a) + K^{-})^{\circ}$, se tiene que:

$$((z - a) + K^{-}) \subset ((y - a) + K^{\circ})$$

por lo tanto $(\xi(z)e) \in ((y - a) + K^{-})^{\circ}$, luego $\xi(z) > \xi(y)$, y por lo tanto la función ξ es estrictamente monótona creciente.

Sea $s \in \mathbf{R}^{+}$, y sean $x_1, x_2 \in X$, $r_1 \in \xi(F(x_1))$, y $r_2 \in \xi(F(x_2))$, tales que:

$$s \in r_1 + \mathbf{R}^{+} \quad \text{y} \quad s \in r_2 + \mathbf{R}^{+}$$

por lo tanto obviamente existen; $y_1 \in F(x_1)$, e $y_2 \in F(x_2)$, tales que:

$$r_1 \in \xi(y_1) \text{ y } r_2 \in \xi(y_2)$$

luego podemos considerar dos alternativas.

a) Si $r_1 \le r_2 < s$, entonces el punto *s*, es interior $a(y_1 - a) + K$, y $a(y_2 - a) + K$, en consecuencia; si $y_0 \in Y$, es un punto tal que $(y_0 - a)$ pertenece a la generatriz del hipercono $(y_2 - a) + K$, que interseca a la recta *te*, en el punto *se*, se tiene que $\xi(y_0) = s$, además como:

$$(y_0 - a) \in ((y_1 - a) + K) \quad \text{y} \quad (y_0 - a) \in ((y_2 - a) + K)$$

se tiene que:

$$y_0 \in (y_1 + K) \quad \text{y} \quad y_0 \in (y_2 + K)$$

por lo tanto

$$y_0 \in (F(x_1)+K) \quad \text{y} \quad y_0 \in (F(x_2)+K)$$

luego como F es k-cuasiconvexo, para todo $\lambda \in \mathbf{I}$;

$$y_0 \in (F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)+K)$$

o sea existe

$$z \in (F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)+K)$$

tal que; $y_0 \in (z+K)$, por lo tanto existe $k \in K$, tal que; $y_0 = (z+K)$, luego como ξ es estrictamente monótona creciente se tiene que:

$$\xi(y_0) > \xi(z)$$

por lo tanto

$$\xi(y_0) \in (\xi(z)+\mathbf{R}^{+})$$

en consecuencia

$$s \in (\xi(F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)) + \mathbf{R}^{+})$$

por lo tanto ($\xi \circ F$) es una multifunción K-cuasiconvexa.

b) Si $r_1 \le r_2 = s$, entonces si $(s_n)_{n\in N}$, es una sucesión decreciente y convergente a s, se tiene que para cada $n \in \mathbf{N}$, existe

$$y_{0,n} \in (F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)+K)$$

o sea existe

$$z_n \in F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$$

tal que

$$y_{0,n} = z_n + K$$

por lo tanto

$$\xi(y_{0,n}) > \xi(z_n)$$

luego como $F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$ es compacto, podemos suponer sin pérdida de generalidad que la sucesión $(z_n)_{n\in N}$, converge a un punto $z \in F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$, por lo tanto debido a la continuidad de ξ, la sucesión $(\xi(z_n))_{n\in N}$, converge a $\xi(z)$. Como además para todo $n \in \mathbf{N}$,

$$\xi(y_{0,n}) = s$$

se tiene que $(s > \xi(z))$, por lo tanto

$$s \in (\xi(z) + \mathbf{R}^{+})$$

luego

$$s \in (\xi(F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)) + \mathbf{R}^{+})$$

por lo tanto en este segundo caso b) también $(\xi \circ F)$ resulta una multifunción K-cuasiconvexa.

3. MULTIFUNCIONES *FUZZY* (BORROSAS)

DEFINICIÓN 3.1. Dados un conjunto X y un conjunto Y, se llama multifunción *fuzzy* (resp. multifunción borrosa) de X en Y, a toda aplicación F de X en $\mathbf{I}^{Y}$.

• **Observación:** En lo que sigue, para todo $x \in X$, anotaremos frecuentemente el conjunto *fuzzy* $F(x)$ con F_x.

DEFINICIÓN 3.2. Una multifunción *fuzzy* $F: X \to \mathbf{I}^Y$, de un conjunto X en un subconjunto Y, de un espacio vectorial topológico de Hausdorff Z sobre $\mathbf{R}$, se dice convexa sii Y es convexo y para todo:
$x \in X$; $y, z \in Y$; $\lambda \in [0, 1]$:

$$F_x(\lambda y + (1-\lambda)z) \geq \text{mín}\,\{F_x(y), F_x(z)\}$$

DEFINICIÓN 3.3. Un conjunto *fuzzy* A definido en un espacio topológico X, se dice compacto, sii para cada $\alpha \in (0, 1]$, el corte $(A)_\alpha$ es un subconjunto de X, compacto.

DEFINICIÓN 3.4. Dada una multifunción *fuzzy* $F: X \to \mathbf{I}^Y$, de un espacio topológico X en un espacio topológico Y, se dice que:

3.4.1. F es topológicamente abierta sii para cada $x_0 \in X$, y para cada subconjunto abierto V, de Y, tal que admite la existencia de un punto $y \in V$ y un valor $\gamma \in (0, 1]$ tales que: $Fx_0(y) \geq \gamma$, existe un entorno U de x_0 tal que para cada $x \in U$, existe $y' \in V$ tal que $F_x(y) \geq \gamma$.

3.4.2. F es topológicamente cerrada sii para cada $x_0 \in X$, para cada $\gamma \in (0, 1]$, y para cada subconjunto abierto V, de Y, tal que si: $Fx_0(y) \geq \gamma$, entonces $y \in V$; existe un entorno U de x_0 tal que para cada $x \in U$: si $F_x(y) \geq \gamma$, entonces $y \in V$.

3.4.3. F es continua sii F es topológicamente abierta y topológicamente cerrada.

3.4.4. F es cerrada sii la función de X x Y en **I** definida por la asignación $(x, y) \rightarrow F_x(y)$, es s.c.s.

PROPOSICIÓN 3.5. Dada una multifunción *fuzzy* F: $X \rightarrow \mathbf{I}^Y$, de un espacio topológico X en un espacio topológico Y, se verifica que:

3.5.1. F es topológicamente abierta sii para todo $\gamma \in (0, 1]$ la multifunción de X en Y definida por la asignación $x \rightarrow F_x(y)$, es s.c.i.

3.5.2. F es topológicamente cerrada sii para todo $\gamma \in (0, 1]$ la multifunción de X en Y definida por la asignación $x \rightarrow F_x(y)$, es s.c.s.

3.5.3. F es continua sii para todo $\gamma \in (0, 1]$ la multifunción de X en Y definida por la asignación $x \rightarrow F_x(y)$, es s.c.i. y s.c.s.

Demostración. Obvia.

TEOREMA 3.6. Sean X un subconjunto cerrado, convexo y no vacío de un espacio vectorial topológico E sobre **R**, C un subconjunto convexo y no vacío de un espacio vectorial topológico Z sobre **R**, y α: $X \rightarrow (0, 1]$, una función s.c.i. Si F: $X \rightarrow \mathbf{I}^C$, es una multifunción *fuzzy* tal que para cada $x \in X; (F_x)_{\alpha(x)} \neq \varnothing$, y si $F^{\sim}$: $X \rightarrow 2^C$ es la multifunción definida por: $F^{\sim}(x) = (F_x)_{\alpha(x)}$, se tiene que:

3.6.1. Si F es una multifunción *fuzzy* convexa entonces $F^{\sim}$ es una multifunción a valores convexos.

3.6.2. Si F es una multifunción *fuzzy* cerrada y convexa, entonces $F^{\sim}$ es una multifunción cerrada a valores cerrados y convexos.

Demostración:

3.6.1. Para cada $x \in X$, si $a, b \in F^{\sim}(x)$ entonces:

$$F_x(a) \geq \alpha(x) \text{ y } F_x(b) \geq \alpha(x)$$

Como por hipótesis F_x es una multifunción convexa se tiene que

$$F_x((1-\lambda)a + \lambda b) \geq \text{mín}\,\{F_x(a),\ F_x(b)\} \geq \alpha(x)$$

por lo tanto

$$((1-\lambda)a + \lambda b) \in \ (F_x)_{\alpha(x)}$$

lo cual implica que la multifunción $F^{\sim}$ es a valores convexos.

3.6.2. Como por hipótesis $F^{\sim}: X \to 2^C$, es la multifunción definida por la expresión: $F^{\sim}(x) = (F_x)_{\alpha(x)}$, se tiene que:

$$\text{Graf } F^{\sim} = \{(x, y) \in (X\ x\ C) / y \in F^{\sim}(x)\}$$

por lo tanto

$(x, y) \notin \text{Graf}\, F^{\sim}$,sii y $\notin (F_x)_{\alpha(x)}$, o sea sii $F_x(y) < \alpha(x)$.

Sea entonces $(x, y) \notin$ Graf $F^{\sim}$, veremos que (x, y) es un punto interior de C (Graf $F^{\sim}$). En efecto, como α es una función s.c.i., existe un entorno U de x, tal que para todo $x' \in U$;

$$F_x(y) < \alpha(x')$$

además como por hipótesis F es una multifunción *fuzzy* cerrada, vale decir la multifunción $F_x(y)$, es s.c.s., existe un entorno $(U'\ x\ V')$ de (x, y) tal que; $U' \subset U$ y para todo $(x', y') \in (U' x\ V')$:

$$F_x(y') < \alpha(x)$$

luego para todo $(x', y') \in (U' \text{x } V')$: $(x', y') \notin$ Graf $F^{\sim}$, por lo tanto el subconjunto Graf $F^{\sim}$, es cerrado y en consecuencia $F^{\sim}$, es una multifunción cerrada. Además por lo demostrado previamente tanto en el punto 2.6.1 y en este, resulta obviamente que para todo $x \in X$; $(F_x)_{\alpha(x)}$ es cerrado y convexo.

TEOREMA 3.7. Sean: X e Y dos espacios topológicos, $\gamma \in (0, 1]$ y $F: X \to \mathbf{I}^Y$, una multifunción *fuzzy* tal que para cada $x \in X$; el conjunto de nivel $(F_x)_y$ es no vacío, y sea $F^{\sim}: X \to 2^Y$ la multifunción definida por: $F^{\sim}(x) = (F_x)_y$, entonces:

3.7.1. Si F es una multifunción *fuzzy* topológicamente abierta entonces $F^{\sim}$ es una multifunción s.c.i.

3.7.2. Si F es una multifunción *fuzzy* topológicamente cerrada entonces $F^{\sim}$ es una multifunción s.c.s.

3.7.3. Si F es una multifunción *fuzzy* continua entonces $F^{\sim}$ es una multifunción continua.

Demostración:

3.7.1. Sea $x_0 \in X$, y sea V_0 un subconjunto abierto de Y tal que:

$$(F^{\sim}(x_0) \cap V_0) \neq \varnothing \quad \text{o sea} \quad ((F_{x_0})_y \cap V_0) \neq \varnothing$$

Como F es topológicamente abierta

si $y_0 \in ((F_{x_0})_y \cap V_0)$ entonces existe un entorno U de x_0, tal que:

para todo $x \in U$, existe $y \in V$, tal que $F_x(y) \geq \gamma$

o sea tal que $((F_x)_y \cap V_0) \neq \varnothing$

En consecuencia para todo $x_0 \in X$, y para todo subconjunto V_0 abierto de Y tales que:

$$(F^{\sim}(x_0) \cap V_0) \neq \varnothing$$

existe un entorno U de x_0 tal que para todo $x \in U$:

$$(F^{\sim}(x_0) \cap V_0) \neq \varnothing$$

en consecuencia $F^{\sim}$ es s.c.i.

3.7.2. Si F es una multifunción *fuzzy* topológicamente cerrada entonces para cada $x_0 \in X$ y para cada subconjunto V_0 abierto de Y tales que $(F_{x_0})_y \subset V_0$, existe un entorno U de x_0, tal que para todo $x \in U : (F_x)_y \subset V_0$, como $(F_x)_y = F^{\sim}(x)$, obviamente $F^{\sim}$ es s.c.s.

3.7.3. Si F es una multifunción *fuzzy* continua entonces F es topológicamente abierta y topológicamente cerrada, por lo tanto por 3.7.1. y 3.7.2. $F^{\sim}$ es s.c.i. y s.c.s. o sea $F^{\sim}$ es continua.

BIBLIOGRAFIA

[1] Berge C., *Espaces topologiques, fonctions multivoques.* Dunod, Paris 1966.

[2] Dubois, D. y Prade, H. *An Introduction to Fuzzy Logic Applications in Intelligent Systems*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1991.

[3] Bourbaki N., *Espaces vectoriels topologiques*, chapitres 1 et 2, Hermann, Paris 1966.

[4] Kelley, J. L. *Topología General*, Eudeba, Buenos Aires, 1963.

[5] Luc D. T. and Vargas C., Theory of Vector Optimization. Lecture Notes in *Economics and Mathematical Systems*, Vol 319, Springer, Berlin 1989.

[6] Luc D. T. and Vargas C., A saddle point theorem for set-valued maps. Nonlinear Anal, *Throry Methods Appl*. 18, 1992, 1-7.

[7] Papageorgiou, N. S., *Fuzzy* topology and *fuzzy* multifunctions, J. *Math. Anal. Appl*. 109, 397-425, (1985).

[8] Chang S. S., Lee G. M. and Lee B. S., Vector quasivariational inequalities for *fuzzy* mappings I. *Fuzzy Sets and Systems* 87, 1997, 307-315.

[9] Scarparo, R. C. Elementos de espacios topológicos borrosos. CIMBAGE, *CUADERNO Nº 2: Aplicaciones de Metodologías Borrosa a Temas de Gestión y Economía*, Facultad de Ciencias Económicas de la UBA, Buenos. Aires, 1999.

[10] Zadeh, L. A. *Fuzzy Sets. Information and Control* 8, 1965.