De lo infinitamente grande a lo infinitamente más grande

◆ Ivonne Pallares

La frase "lo veo y no lo creo" nos recuerda lo irritante que puede resultar la persistencia de la incredulidad propia ante lo que a uno mismo le resulta claramente irrefutable. Ante tan incómoda y poco halagadora irritación, uno siempre puede responder de manera simple pero eficaz: cerrando los ojos. Esta respuesta, además de ser poco práctica, tiene la desventaja adicional de no brindarnos nada interesante, lo cual suele ocurrir con aquello que nos resulta evidente. En este artículo intentaré mostrar que las matemáticas pueden resultar interesantes precisamente porque muchos de sus resultados constituyen ingeniosas soluciones a conflictos aparentemente irresolubles entre, por un lado, aquello que "vemos" con la razón y, por otro lado, aquello que la experiencia persiste en hacernos creer que es verdadero. Concebidos de esta manera, diversos resultados matemáticos son además útiles en el sentido de que nos muestran por qué en ocasiones vale la pena mantener abiertos los ojos y aceptar el reto de abandonar, aunque sea temporalmente, algunas de nuestras creencias más firmes. Después de todo, el aprendizaje, ya sea dentro o fuera de las matemáticas, muchas veces requiere que dejemos atrás algunas de nuestras creencias más firmes para que en su lugar podamos adoptar aquellas que aumentan nuestro conocimiento.

Uno de los ejemplos más aptos para evocar esa peculiar irritación causada por la persistencia de la incredulidad propia a pesar de lo irrefutable de la evidencia que tenemos "ante nuestros ojos", data de hace más de dos mil cuatrocientos años. Según cuenta la historia, alrededor del año 460 a.C. el filósofo griego Zenón de Elea llegó a la literalmente increíble conclusión de que ningún cuerpo (incluido el del propio Zenón) puede moverse en el espacio. El mérito que se le atribuye a Zenón no radica, por razones obvias, en el "descubrimiento" de la imposibilidad del movimiento, sino en el razonamiento mediante el cual Zenón supuestamente llegó a la conclusión de que ningún cuerpo puede moverse en el espacio.

En la primera parte de este ensayo mostraré una forma en que la aceptación de tres afirmaciones relativamente simples y hasta cierto punto incuestionables, a las cuales llamaré "principios básicos", aparentemente nos lleva sin remedio a tener que aceptar también la afirmación de que ningún cuerpo puede moverse en el espacio. Después, en la segunda y última parte del ensayo explicaré, a grandes rasgos, en qué consiste la solución matemática a la paradoja del movimiento.

Para determinar hasta qué punto nos resulta en efecto incuestionable cualquiera de los tres principios básicos que expondré a continuación, basta con que consideremos qué ocurriría si realmente no creyéramos en lo que afirma el principio básico en cuestión. Por ejemplo, en matemáticas existe un principio muy conocido según el cual ningún número es divisible entre

◆ Profesora-Investigadora, Facultad de Humanidades

cero. El siguiente argumento ilustra lo que ocurriría si por alguna razón decidiéramos no aceptar dicho principio:

Si suponemos que $x = 0$ (por ejemplo, $x = 3 - 3$), entonces, al dividir entre x (es decir, entre 0) ambos lados de la igualdad, obtenemos que $^{x}/_{x} = {}^{0}/_{x} = 0$. Como el resultado de dividir cualquier número entre sí mismo siempre es igual a 1, entonces $1 = {}^{x}/_{x} = {}^{0}/_{x} = 0$, y por lo tanto $1 = 0$.

Así que, a menos que lo que tengamos en mente sea una teoría de números distinta a la aritmética ordinaria (por ejemplo, una teoría en la cual los símbolos '0' y '1' se utilicen para denotar el mismo número, o una teoría en la cual el resultado de "dividir" un número entre sí mismo no fuese igual a uno), un argumento como el anterior debe bastarnos para aceptar como un principio de la aritmética ordinaria la afirmación de que ningún número es divisible entre 0.

El primero de los tres principios básicos que nos llevarán a concluir que el movimiento es imposible, consiste en la afirmación de que el tiempo que un cuerpo necesita para poder desplazarse de un lugar a otro siempre es una cantidad estrictamente mayor que 0. Es importante notar que este principio no afirma que de hecho siempre podremos medir la cantidad de tiempo que tarda un cuerpo dado en moverse de un lugar a otro; es posible, por ejemplo, que nunca tengamos los instrumentos de medición que se requieren para calcular velocidades que sean extremadamente rápidas. Lo único que afirma este primer principio es que ningún cuerpo se mueve en el espacio de manera instantánea o a una "velocidad infinita".

El segundo principio básico afirma simplemente que "el todo es igual a la suma de sus partes". En su versión matemática este segundo principio implica, entre otras, igualdades como las siguientes:
$^{1}/_{2} + {}^{1}/_{2} = {}^{5}/_{7} + {}^{2}/_{7} = {}^{3}/_{4} + {}^{1}/_{12} + {}^{1}/_{6} = 1$.

En el caso particular del movimiento, el segundo principio tiene también implicaciones como la siguiente. Supongamos que un cuerpo se mueve, sin detenerse, de la siguiente manera: en 1 hora el cuerpo recorre 3 kilómetros, en las siguientes 2 horas recorre 7 kilómetros y, finalmente, la distancia que recorre en las siguientes 3 horas es de 10 kilómetros. El segundo principio nos dice que la distancia total recorrida es por lo tanto igual al resultado de la suma $3 + 7 + 10$, y que el tiempo total en que el cuerpo tardó en recorrer dicha distancia es igual al resultado de la suma $1 + 2 + 3$.

El tercer y último principio básico es simplemente una consecuencia de ciertas propiedades que tiene la multiplicación con respecto a la relación de orden que existe entre los números. Pero antes de presentar este último principio básico, es útil que recordemos que el resultado de dividir un número cualquiera p, entre cualquier número n (¡pero que no sea cero!) lo podemos expresar de distintas maneras: en notación decimal o bien como $p \div n$, $^{p}/_{n}$, o como $p \times {}^{1}/_{n}$. Tanto la notación decimal como estas tres últimas expresiones son, en otras palabras, formas alternativas que hemos establecido para denotar uno y el mismo número, a saber, aquel que resulte de dividir p entre el número n. Así, por ejemplo, si $p = 3$ y $n = 5$, entonces $0.6 = 3 \div 5 = {}^{3}/_{5} = 3 \times {}^{1}/_{5}$.

El tercer principio básico afirma, pues, lo siguiente. Dados tres números cualesquiera pero estrictamente mayores que 0, digamos p, q y r, si p es estrictamente menor que q, entonces tanto $p \times r$ como $q \times r$ son también estrictamente mayores que cero, y $p \times r$ es estrictamente menor que $q \times r$. Si utilizamos el símbolo ‘<’ en lugar de la expresión “es estrictamente mayor que”, lo anterior lo podemos expresar más concisamente, de la siguiente manera: si $0 < r$ y si $0 < p < q$, entonces $0 < p \times r < q \times r$. Por ejemplo, es claro que $0 < 2$ y que $0 < {}^1/_2 < 3$; el tercer principio nos dice entonces que por lo tanto también es cierto que $0 < {}^1/_2 \times 2 < 3 \times 2$, es decir, que 0 es menor que uno y que uno es menor que 6. Este ejemplo sirve también para ilustrar algunas de las consecuencias que tendría el que rechazáramos el tercer principio básico. Si no adoptamos este principio, necesariamente tendríamos que aceptar que al menos uno de los números 1, ${}^1/_2$, 2, 3 y 6, no es estrictamente mayor que 0, es decir, que al menos uno de ellos no es un número positivo.

Imaginemos ahora a Aquiles, el corredor más veloz de Atenas, a punto de iniciar una carrera de un kilómetro contra una tortuga, a la cual, por razones obvias, se le ha dado una ventaja de, digamos, medio kilómetro. Veamos entonces cómo, a partir de estas hipótesis y de los tres principios básicos, la conclusión aparentemente necesaria es que Aquiles no puede moverse de su punto de partida (y que, por lo tanto, nunca podrá alcanzar a la tortuga, independientemente de que ésta pueda o no moverse).

Para llegar al final de la carrera, es evidente que Aquiles tiene que recorrer primero la mitad de un kilómetro. Denotemos con la letra ‘t’ seguida del número 1, t_1, la cantidad total de tiempo que le lleva a Aquiles recorrer estos primeros 500 metros. Si suponemos (como evidentemente debemos hacerlo) que 1 kilómetro es una longitud estrictamente mayor que 0, entonces el tercer principio básico implica que la mitad de 1 kilómetro necesariamente es también una cantidad estrictamente mayor que 0. Entonces, por el primer principio básico, es claro que por más rápido que Aquiles corra, t_1 necesariamente es una cantidad mayor que 0. Por el segundo principio básico, también es claro que la cantidad total de tiempo que le lleva a Aquiles recorrer el kilómetro completo, es entonces igual a t_1 más el tiempo que le lleve recorrer los últimos 500 metros. Como ya antes concluimos (por el tercer principio básico) que 500 es una cantidad estrictamente mayor que 0, es claro entonces que por un razonamiento completamente similar al anterior, llegaremos a la conclusión de que la cantidad total de tiempo que le lleva a Aquiles recorrer el kilómetro completo, necesariamente es igual a t_1 más el tiempo que Aquiles tarde en recorrer la mitad de los siguientes 500 metros, más el tiempo que le lleve recorrer los restantes 250 metros.

Como el tercer principio básico es totalmente general, a partir de éste, y de la muy razonable hipótesis de que $0 < {}^1/_2 < 1$, lo que obtenemos es en realidad una cantidad infinita de consecuencias:

$0 < {}^1/_2 < 1$ implica que $0 < {}^1/_2 \times {}^1/_2 < 1 \times {}^1/_2$,
y por lo tanto $0 < {}^1/_4 \times {}^1/_2 < {}^1/_2 \times {}^1/_2$,
y por lo tanto $0 < {}^1/_8 \times {}^1/_2 < {}^1/_4 \times {}^1/_2$,
y por lo tanto $0 < {}^1/_{16} \times {}^1/_2 < {}^1/_8 \times {}^1/_2$,
etcétera.

Más brevemente, el tercer principio básico y la hipótesis de que $0 < {}^1/_2 < 1$, tienen como consecuencia lo siguiente: no importa cuántas veces multipliquemos ${}^1/_2$ por sí mismo, el resultado siempre es estrictamente mayor que 0. Por lo tanto, el número de veces en que podemos dividir entre 2 la longitud de un kilómetro, es infinito:

${}^1/_2$, ${}^1/_4$, ${}^1/_8$, ${}^1/_{16}$,…, ${}^1/_{512}$, …, ${}^1/_{16384}$, …

Por el primer principio, el tiempo que necesita Aquiles para poder recorrer absolutamente cualquiera de estas distancias siempre es estrictamente mayor que 0.

Al igual que antes, por cada mitad sucesiva de un kilómetro, denotaremos con la letra t seguida del número que corresponda, el tiempo que le lleva a Aquiles recorrer dicha distancia:

t_1 = tiempo para recorrer el primer $^1/_2$ km

t_2 = tiempo para recorrer el siguiente $^1/_4$ km

t_2 = tiempo para recorrer el siguiente $^1/_8$ km, etc.

Lo que ahora tenemos es entonces una correspondencia entre dos secuencias de números:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} ^1/_2 & > & ^1/_4 & > & ^1/_8 & > & ^1/_{16} & > \ldots > & ^1/_{32} & > & ^1/_{64} & > & ^1/_{128} & > & ^1/_{256} & \ldots \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & \ldots & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & \ldots \\ t_1 & & t_2 & & t_3 & & t_4 & \ldots & t_7 & & t_8 & & t_9 & & t_{10} & \ldots \end{array}$$

Como la primera de estas dos secuencias tiene un número infinito de términos, entonces la segunda secuencia también tiene un número infinito de términos. Es importante mencionar aquí que esto último no es consecuencia de ninguno de los tres principios básicos; sin embargo, se puede demostrar rigurosamente que siempre que existe una correspondencia como la anterior de una a otra secuencia de números, la cantidad (ya sea ésta finita o infinita) de términos de la primera secuencia, es menor o igual a la cantidad de términos de la segunda. La razón principal por la cual no incluí a este resultado entre los principios básicos, es simplemente porque a diferencia de éstos, es necesario utilizarlo sólo una vez.

Por el segundo principio básico, la cantidad total de tiempo que tarda Aquiles en recorrer el kilómetro completo, es entonces igual a la suma $t_1 + t_2 + t_3 + \ldots$ Como esta suma tiene una cantidad infinita de términos, y como cada uno de ellos es estrictamente mayor que 0, el resultado de la suma total es una cantidad infinita. Por lo tanto, para poder alcanzar el final de la carrera Aquiles necesitaría una cantidad infinita de tiempo. Como evidentemente Aquiles no puede disponer de tal cantidad de tiempo, es claro entonces que nunca podrá alcanzar el final de la carrera.

La situación de Aquiles no mejora en absoluto si en lugar de 1 kilómetro consideramos una longitud más pequeña, ni tampoco si, en lugar de mitades, consideramos terceras o cuartas partes, o millonésimas de parte, o cualquier otra parte de la unidad tan pequeña como queramos. El tercer principio tiene como consecuencia algo totalmente catastrófico. Consideremos una distancia cuya longitud d sea tan pequeña como podamos imaginar, pero estrictamente mayor que 0. Si dividimos d en un número cualquiera, digamos n, de partes (2, 50, un trillón, etc.), el tercer principio implica, por un lado, que no importa cuántas veces multipliquemos $^1/_n$ por d, el resultado siempre es estrictamente mayor que 0; y, por otro lado, que cuantas más veces multipliquemos $^1/_n$ por d, menor es el resultado:

$$d > {}^d/_n > {}^d/_{n\times n} > {}^d/_{n^3} > \ldots > {}^d/_{n^{22}} > \ldots > {}^d/_{n^{975}} > \ldots > 0$$

En consecuencia, cualquiera que sea la longitud de la carrera, y cualquiera que sea el número de partes (2, 3, 4, etc.) en que sucesivamente dividamos dicha longitud, el tiempo total que necesitará Aquiles para llegar al final de la carrera, siempre será igual a la suma de una cantidad infinita de términos, cada uno de los cuales es estrictamente mayor que 0. Más generalmente, cualquier cuerpo para el cual sea razonable suponer que tiene capacidad de movimiento (ya sea Aquiles, la tortuga, Zenón o nosotros mismos), éste siempre necesitará una cantidad infinita de tiempo para poder recorrer absolutamente cualquier distancia cuya longitud sea estrictamente mayor que 0. Por lo tanto, a menos que aceptemos la posibilidad del movimiento instantáneo, o que firmemente creamos que los números positivos son en realidad menores que 0, o que creamos, por ejemplo, que un medio más un medio realmente no es igual a 1, entonces no nos queda más remedio que aceptar que absolutamente ningún cuerpo puede moverse de cualquiera que sea el lugar en el que se encuentre. La inevitable conclusión es entonces que no hay absolutamente nada que esté en movimiento.

En resumen, es evidente que para no tener que aceptar como verdadera la inverosímil conclusión de que no existe el movimiento, es suficiente con que rechacemos cualquiera de los tres principios básicos. Gran parte del valor que tiene la historia de Aquiles y la tortuga, radica precisamente en cómo ésta nos puede llevar a descubrir algo interesante, a saber, lo que no es evidente. A continuación veremos por qué, si insistimos (como al parecer debemos hacerlo) en creer firmemente que al menos algunos cuerpos (los nuestros, por ejemplo) sí tienen la capacidad de desplazarse de un lugar a otro, no es necesario que dejemos de creer en lo que afirma cualquiera de los tres principios básicos.

Como hemos visto, los tres principios básicos nos llevaron a la conclusión de que el tiempo que tardaría Aquiles en recorrer un kilómetro es igual a una suma con una cantidad infinita de términos, cada uno de los cuales es estrictamente mayor que cero: $t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_8 + t_9 + t_{10} + \ldots$ Y a partir de esto último llegamos a la afirmación de que el tiempo que necesitaría Aquiles para llegar al final de la carrera es por lo tanto una cantidad infinita. Es precisamente este último "por lo tanto", el paso que no se sigue como consecuencia de ninguno de los tres principios básicos. ¿Cuál es entonces el "principio" que sí tiene como consecuencia la afirmación de que la suma de un número infinito de términos estrictamente mayores que 0, es una cantidad infinita? La respuesta a esta pregunta está, a mi parecer, íntimamente relacionada con la siguiente propiedad de la suma. Dados dos números positivos cualesquiera p y q (ya sean distintos o iguales entre sí), el resultado de la suma $p + q$ siempre es estrictamente mayor que p y que q. Más brevemente, $p > 0$ y $r > 0$, implica que $p < p + q$ y $q < p + q$. Por ejemplo, y como todos sabemos, $1 < 1 + 1$, $2 < 2 + 1$, $3 < 3 + 1$, etc.

Una de las consecuencias que tiene esta propiedad de la suma es, evidentemente, que cuantos más términos estrictamente mayores que cero tenga una suma, mayor será el resultado. En particular, la existencia de cualquier secuencia infinita de números estrictamente mayores que cero, digamos p_1, p_2, p_3, etc., implicará siempre que existe otra secuencia de números, la cual, además de ser también infinita, es "infinitamente creciente":

$$p_1 > p_1 + p_2 > p_1 + p_2 + p_3 > p_1 + p_2 + p_3 + p_4 > \ldots$$

Un principio que sí tendría como consecuencia la afirmación de que el tiempo que necesitaría Aquiles para alcanzar los 100 metros es infinito, sería entonces un principio que afirmara que el resultado de una suma infinita y cuyos términos son "infinitamente crecientes", nunca es igual a una cantidad finita. O, equivalentemente, que el resultado de una suma infinita cuyos términos son "infinitamente crecientes", siempre es distinto de cualquier cantidad finita. Si encontráramos alguna buena razón para rechazar esto último, podríamos entonces adoptarla como otro principio más, con lo cual nuestra razón y sentido común volverían a convivir en armonía. Sin embargo, la situación

a la que hasta aquí hemos llegado es, al parecer, igual o quizás peor que la del propio Aquiles, ya que lo que necesitaríamos es encontrar algo que sustente lo que parece ser otra paradoja más: ¿qué sentido puede tener la afirmación de que al menos ciertas cantidades "infinitamente crecientes" son, de hecho, iguales a una cantidad finita? Afortunadamente, existen muchos ejemplos que ilustran que de hecho sí tiene sentido afirmar que ciertas cantidades, a pesar de ser "infinitamente grandes", son a fin de cuentas iguales a una cantidad finita.

Consideremos la secuencia de números "infinitamente crecientes" que se obtienen de la fórmula $1 - {}^1/_2{}^n$ mediante la sustitución sucesiva de los valores 1, 2, 3, etc. en lugar de la letra n:

$^1/_2 < {}^3/_4 < {}^7/_8 < {}^{15}/_{16} < {}^{31}/_{32} < \ldots < {}^{127}/_{128} < \ldots < {}^{511}/_{512} < \ldots$

A pesar de ser "infinitamente creciente", esta secuencia tiene además unas características muy peculiares que la hacen radicalmente distinta de otras secuencias infinitamente crecientes como, por ejemplo, la de los números naturales. Una de estas características consiste en que, no importa cuál sea el valor que le asignemos a n, el valor de $1 - 1/2^n$ siempre es estrictamente menor que uno.

La otra característica es que, cuanto mayor sea el valor de n, más se aproximará al número 1 el valor de $1-1/2^n$. En resumen, la fórmula $1 - 1/2^n$ es una especie de "receta" mediante la cual nunca obtendremos el número 1 como resultado, pero sí podremos obtener resultados que sean tan próximos al número 1 como queramos. Si elegimos, por ejemplo, n = 10, la fórmula anterior nos dará como resultado el número 1023/1024, al cual claramente sólo "le falta" la pequeñísima cantidad de 1/1024 para ser igual a 1: 1023/1024 + 1/1024 = 1024/1024 = 1. O bien, si elegimos n = 15, entonces $1 - {}^1/_2{}^{15} = 1 - {}^1/_{32768} = {}^{32767}/_{32768}$; y este último número difiere de uno en $^1/_{32768}$, la cual es una cantidad muchísimo menor que $^1/_{1024}$. No importa qué tan pequeña sea una cantidad dada x, absolutamente siempre existe algún número de la secuencia infinita anterior que difiere de uno en una cantidad menor que x.

Todo lo anterior se describe, en lenguaje matemático, diciendo que el límite de la secuencia infinita 1/2, 3/4, 7/8, 15/16,… es igual al número uno. Es importante mencionar que la definición formal de límite implica, por un lado, que ninguna secuencia puede tener más de un límite. Y, por otro lado, que para calcular el límite de una secuencia infinita dada, no es necesario sumar ninguna cantidad infinita de términos; la noción de límite únicamente expresa la idea de que ciertas cantidades finitas dadas constituyen (o no, según sea el caso) aproximaciones cada vez mejores a cierta cantidad finita. Cuando todos los términos de una secuencia infinita no son aproximaciones cada vez mejores a una y solamente a una cantidad finita, se dice entonces que dicha secuencia no tiene límite, que es lo que ocurre, por ejemplo, con la secuencia de todos los números los números naturales: 1, 2, 3, …

Regresemos por última vez a la historia de Aquiles y la tortuga y consideremos la distancia total que el primero tiene que recorrer para llegar al final de la carrera. De acuerdo al segundo principio básico, la longitud de esta distancia es igual a la siguiente suma infinita:

$^1/_2 + {}^1/_4 + {}^1/_8 + {}^1/_{16} + {}^1/_{32} + \ldots + {}^1/_{128} + \ldots + {}^1/_{512} + \ldots$ (*).

No es difícil comprobar que el resultado de sumar los primeros n términos de esta suma infinita, es exactamente igual al "n-ésimo" término de la secuencia cuyo límite es igual a uno, es decir, de la secuencia infinita:

$^1/_2 , {}^3/_4 , {}^7/_8 , {}^{15}/_{16} , \ldots$ (**).

Por ejemplo, la suma de los dos primeros términos de la suma (*) es $^1/_2 + {}^1/_4$, la cual da como resultado $^3/_4$, y esta fracción es precisamente el segundo término de la secuencia infinita (**). De manera similar, podemos comprobar que 1/2 + 1/4 + 1/8 = 7/8 es el tercer término de la secuencia (**). En matemáticas, al resultado de la suma de los primeros n términos de cualquier suma infinita, se le llama la "n-ésima" suma parcial. En el caso particular de estos dos ejemplos, tenemos entonces que la secuencia infinita (**) es exactamente la misma que la secuencia de todas las sumas parciales de la suma infinita (*). Es precisamente este vínculo entre la secuencia (**) y la secuencia de todas las sumas parciales de (*), lo que constituye la clave de la solución matemática a la paradoja del movimiento: a pesar de que el resultado de cualquier suma de la forma

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 +\ldots + 1/2^n$$

nunca es igual a 1, cuantos más términos tenga ésta (es decir, cuanto mayor sea n), más próximo al número uno será el resultado. La idea es que las aproximaciones al valor uno que nos da la fórmula anterior son "infinitamente" mejores, por lo que "en el infinito" obtendríamos la mejor de absolutamente todas las aproximaciones finitas: 1.

Aunque ciertamente no tan "básico" como los otros tres, el principio que hemos estado buscando es, pues, el siguiente:

Dada una suma infinita cualquiera $p_1 + p_2 + p_3 +\ldots$, si la secuencia de *todas* sus sumas parciales p_1, $p_1 + p_2$, $p_1 + p_2 + p_3$, etc., tiene límite, entonces el resultado de la suma infinita *es* igual a dicho límite.

Si adoptamos este cuarto principio es claro que, como bien nos dictan el sentido común y la experiencia, la distancia total que Aquiles tiene que recorrer para llegar al final de la carrera es ni más ni menos que igual a 1 kilómetro. Como evidentemente ésta no es una longitud infinita, ya no podemos concluir, como lo hicimos antes, que Aquiles necesitaría una cantidad infinita de tiempo para recorrer esta distancia.

Esta solución matemática a la paradoja del movimiento ciertamente no "demuestra" que el movimiento sí es posible, ni tampoco que algunas sumas infinitas "realmente" dan como resultado una cantidad finita. Lo que esta solución sí demuestra es, entre otras cosas, que a pesar de que las operaciones aritméticas están definidas únicamente para un número finito de términos, utilizando estas mismas operaciones se le puede dar un significado coherente y preciso a la idea de sumar una cantidad infinita de términos. La solución matemática consiste en adoptar este significado como la *definición* de "suma infinita".

Quizá en un futuro otras paradojas den lugar a otras definiciones, pero hasta el momento una de las más fructíferas herramientas para estudiar ciertas propiedades de lo que no es finito, continúa siendo el concepto matemático de límite. Uno de los principales retos a los que este concepto nos enfrenta radica en que si lo utilizamos (como al parecer debemos hacerlo) para definir qué es lo que entendemos por "suma infinita", necesariamente tendremos que abandonar algunas de nuestras creencias más comunes y arraigadas acerca del infinito; por ejemplo, que lo infinito "es" lo que no tiene límite o lo que no se puede contar. En cierto sentido podemos decir que la solución matemática a la paradoja del movimiento es a su vez un tanto paradójica, ya que nos muestra que no es absurdo afirmar que al menos algunas cantidades "infinitamente grandes" sí tienen límite y sí se pueden contar. Uno de los siguientes retos en el desarrollo de las matemáticas es precisamente el de la historia de una secuencia de cantidades *infinitas* e infinitamente grandes.

Más allá de la gran ciudad, 2004