Lecturas Matemáticas
Volumen **27** *(2006), páginas 107–149*

El 'Commentatio', el problema de la equivalencia de las formas cuadráticas y el análisis tensorial

Victor Tapia
Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia

Abstract. The problem of the equivalence of cuadratic forms was studied in the Riemann's 'Commentatio' in 1861 as in the works by Christoffel and by Lifshitz in 1869. All these works can be considered as the origin of tensor analysis rather than a development of differential geometry.

Key words and phrases. Riemann, Commentatio, Tensor analysis
2000 AMS Mathematics Subject Classification. 15A72, 53B20, 01A55

Resumen. En el 'Commentatio' de Riemann de 1861, como también en los trabajos de Christoffel y de Lipschitz de 1869, se estudia el problema de la equivalencia de las formas cuadráticas. Estos trabajos se pueden considerar como el origen del análisis tensorial más que un desarrollo de la geometría riemanniana.

1. Introducción

En 1854 Riemann presentó ante la Facultad de Filosofía de la Universidad de Gotinga su *Habilitationsvortrag Über die Hypothesen welche der Geometrie zu grunde Liegen* (*Acerca de las Hipótesis en las cuales se basa la Geometría*) [24]. Sin embargo, la *Habilitationsvortrag* no fue publicada sino hasta 1868, dos años después de su muerte. Uno de los problemas planteados, pero no resueltos, en la *Habilitationsvortrag* era determinar las condiciones bajo las cuales el elemento de línea, una forma cuadrática, se puede transformar, bajo un cambio de coordenadas, en una forma cuadrática con coeficientes constantes. En 1869 Christoffel y Lipschitz, quienes tuvieron conocimiento de este problema gracias a la publicación de la *Habilitationsvortrag* de Riemann, publicaron algunos artículos en los cuales se abordaba y resolvía este problema.

Sin embargo, el problema ya había sido, también, estudiado y resuelto, por RIEMANN en 1861. En 1855 la Academia de Ciencias de Paris había llamado a un concurso para resolver el problema de la conducción del calor. En 1858 la pregunta fue reformulada y se dio como plazo final el 1^{ro} de Julio de 1861. RIEMANN presentó su solución al problema en el trabajo *Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quaestioni ab Ill.ma Academia Parisiense propositae: "Trouver quel doit être l'état calorifique d'un corps solide homogène indéfini pour qu'un système de courbes isothermes, à un instant donné, restent isothermes après un temps quelconque, de telle sorte que la température d'un point puisse s'exprimer en fonction du temps et de deux autres variables indépendantes."* (*Un tratado matemático en el cual se hace un intento para responder la pregunta propuesta por la muy ilustre Academia de Paris: "Determinar el estado calorífico de un cuerpo sólido, homogéneo e indefinido, tal que un sistema de curvas que son isotermas en un instante dado, sigan siendo isotermas después de un tiempo cualquiera, de manera tal que la temperatura en un punto se pueda expresar como una función del tiempo y de otras dos variables independientes."*). De ahora en adelante nos referiremos a este trabajo como el *Commentatio*. Tal como en el caso de su *Habilitationsvortrag*, el *Commentatio* se publicó sólo posteriormente, esta vez en 1876 en sus *Gesammelte mathematische Werke* (*Obras Matemáticas Completas*) editado por H. Weber. Por lo tanto, aunque la precedencia corresponde a RIEMANN, CHRISTOFFEL y LIPSHITZ obtuvieron sus resultados en forma independiente, sin conocer los desarrollos de RIEMANN.

En su respuesta a la Academia, RIEMANN reduce el problema de la conducción del calor al problema, matemáticamente equivalente, de la equivalencia de dos formas cuadráticas. El problema de la equivalencia de las formas cuadráticas consiste en determinar cuándo dos formas cuadráticas se pueden transformar una en la otra a través de cambios de coordenadas; de ahora en adelante nos referiremos a este problema como 'el problema de la equivalencia'. En el caso en que una de las formas cuadráticas tenga coeficientes constantes estamos frente al 'problema de la equivalencia restringido'. Por lo tanto, tanto RIEMANN como CHRISTOFFEL y LIPSCHITZ, lo que hacen es resolver el problema de la equivalencia restringido, y además dan los primeros pasos en el desarrollo del análisis tensorial, que alcanzaría su forma final en el 'cálculo diferencial absoluto' desarrollado por RICCI y LEVI–CIVITA [19] y por SCHOUTEN [30]. Pero, en ningún momento, ni RIEMANN ni CHRISTOFFEL ni LIPSCHITZ, desarrollan en forma explícita, o hacen alución, a lo que sería la geometría riemanniana. En este caso será necesario esperar hasta el desarrollo de la Relatividad General para que las ideas geométricas de RIEMANN sean formuladas en el lenguaje del análisis tensorial y de este modo podamos reconocer los primeros desarrollos de la geometría riemanniana.

La interpretación del significado de los trabajos de RIEMANN, de CHRISTOFFEL y de LIPSCHITZ, descrita anteriormente es debida a FARWELL y KNEE [7].

Esta interpretación ha sido posible gracias a que estos autores han realizado la primera traducción completa, al inglés, del trabajo original, en latín, de Riemann. Parte de nuestra presentación está motivada por la interpretación dada por estos autores.

En la sección 2 se presenta una descripción del *Commentatio* y de los trabajos de Christoffel y de Lipschitz. Esencialmente, se muestra que el *Commentatio*, y los trabajos de Christoffel y de Lipschitz, son los primeros pasos en el desarrollo del análisis tensorial.

A partir de 1900, con la publicación del trabajo de Ricci y Levi–Civita [19], el análisis tensorial adquiere gran importancia en el desarrollo posterior de la geometría diferencial, y sus aplicaciones tanto en física como en matemáticas, como también como lenguaje en otras áreas de la matemática. Por lo tanto, en la sección 3 presentamos algunos rudimentos del análisis tensorial. Se debe enfatizar que el análisis tensorial es un lenguaje que permite desarrollar en forma explícita muchos cálculos que en otros lenguajes más abstractos son imposibles de realizar o de visualizar en forma adecuada. El análisis tensorial comienza considerando las transformaciones de coordenadas, y los distintos objetos (geométricos) que puedan aparecer se clasifican de acuerdo con sus reglas de transformación.

Como ya hemos enfatizado, lo que el *Commentatio*, y los trabajos de Christoffel y de Lipschtiz, estudian es el problema de la equivalencia restringido. Por lo tanto, en la sección 4 presentamos una descripción de este problema en el lenguaje apenas estudiado del análisis tensorial.

En el Apéndice presentamos una traducción al español del trabajo de Riemann. Nuestra traducción está basada en la traducción al inglés de Farwell y Knee [7] consultando el texto original en latín [28].[1] La traducción no se ha limitado sólo a una traducción literal, sino que la hemos modificado, sin cambiar el sentido, cuando nos ha parecido necesario, para hacer más fluida la lectura[2].

2. El 'Commentatio'

En la época en que Riemann, Christoffel y Lipschitz estaban trabajando en el problema de la equivalencia, el término *tensor* aún no había sido

[1] Existe una traducción al inglés de la segunda parte del *Commentatio* en [31], la cual, sin embargo, no hemos utilizado.

[2] En este sentido nos parece adecuado recordar que: "Los lenguajes no se corresponden en forma completa en la manera que estos construyen sus mensajes. Dependiendo del nivel en el cual se pueda establecer la equivalencia de la traducción (palabra con palabra, frase con frase, palabra con frase, etc.) las traducciones pueden ser más *literales* (es decir, uno a uno al nivel de palabras), o *libres* (reformulación del mensaje sin importar la correspondencia formal), [18]."

inventado, menos aun el concepto de *análisis tensorial*.[3] El análisis tensorial se originó en 1900 en el artículo de Ricci y Levi–Civita [19], al cual llamaron ‘cálculo diferencial absoluto’. Fue Einstein, quien al usar esta herramienta matemática en la Relatividad General, adoptó el nombre de ‘análisis tensorial’.

Aunque el término aún no había sido inventado, una forma temprana de tensores aparece en los trabajos de Riemann, de Christoffel y de Lipschitz. Ellos estaban estudiando la forma en que transforman las formas diferenciales cuadráticas bajo un cambio de coordenadas y buscaban cantidades que no cambiaran bajo estas transformaciones. Hoy en día los tensores se definen de acuerdo con el comportamiento de sus componentes bajo una transformación de coordenadas y la invariancia es una característica esencial de las ecuaciones tensoriales.

Riemann, en su *Habilitationsvortrag*, dio una motivación para estudiar el problema de la transformación de una forma cuadrática en otra. El elemento de línea de su geometría general es un ejemplo de una forma cuadrática diferencial y la equivalencia de los elementos de línea bajo transformaciones de coordenadas es importante en su clasificación de las geometrías. Los artículos de Christoffel y de Lipschitz que tratan con formas cuadráticas diferenciales fueron publicados en 1869, es decir, antes que se publicara el *Commentatio*. Ambos atribuyen el estímulo para su trabajo a la *Habilitationsvortrag*, el cual había sido publicado sólo un año antes, en 1868.

Christoffel desarrolló las propiedades fundamentales de las formas cuadráticas diferenciales en el primero de dos artículos publicados en 1869 [3, 4]. En estos artículos Christoffel desarrolla los fundamentos del análisis tensorial en el sentido de que escribe ecuaciones que describen el comportamiento de ciertas expresiones bajo transformaciones de coordenadas, y estas ecuaciones son las que constituyen la definición de un tensor. Christoffel también adelanta la idea del análisis tensorial dado que define una nueva derivada la cual, a diferencia de la derivada usual, se comporta como una cantidad tensorial bajo cambios de coordenadas. En el primero de su dos artículos, Christoffel introduce lo que hoy conocemos como símbolos de Christoffel y también lo que hoy conocemos como el tensor de Riemann–Christoffel. Estas dos cantidades aparecen en una forma diferente en el *Commentatio*, respectivamente como $p_{\iota,\iota',\iota''}$ y como $(\iota\iota', \iota''\iota''')$.

En el mismo volumen de la revista *Crelle*, a continuación del primer trabajo de Christoffel viene un artículo de Lipschitz [14] que también considera la equivalencia de formas cuadráticas, aunque su propósito era estudiar las formas diferenciales de rango p. Lipschitz buscaba expresiones que involucraran los coeficientes que aparecen en la forma diferencial que no cambiaran bajo

[3] El término *tensor* fue usado por primera vez por el cristalógrafo W. Voigt en 1899 quien clasificó las propiedades térmicas, eléctricas y magnéticas de los cristales en tres tipos de magnitudes: *escalares*, *vectores* y *tensores*.

transformaciones de coordenadas. En su investigación Lipschitz también introduce símbolos similares a los de Christoffel. Un invariante particular, Ψ, que Lipschitz obtiene se puede identificar con el que aparece en la segunda parte del *Commentatio* como la expresión (II) y que involucra el $(\iota\iota', \iota''\iota''')$ mencionado anteriormente.

Es poco probable que Christoffel o Lipschitz hayan leido el *Commentatio*, y si lo hubieran hecho entonces lo habrían mencionado en alguno de sus artículos. Por lo tanto podemos considerar que tanto el trabajo de Christoffel como el de Lipschitz fue desarrollado en forma independiente del de Riemann.

En 1900 Ricci y Levi–Civita [19] publicaron el artículo *Méthodes du calcul différentiel absolu et leurs applications* en el cual hacen referencia a los artículos de 1869 tanto de Christoffel como de Lipschitz. En este artículo, Ricci y Levi–Civita introducen la notación de índices covariantes y contravariantes que se usa hoy en día en el análisis tensorial. También se cita el *Commentatio* debido a su tratamiento de formas cuadráticas diferenciales. Una de las cantidades que Ricci y Levi–Civita consideran y desarrollan en forma completamente tensorial es la que en el *Commentatio* aparece como $(\iota\iota', \iota''\iota''')$.

El artículo que Riemann envio como respuesta a la pregunta formulada por la Academia de Ciencias de Paris se divide en dos partes, las cuales son bastante distintas y corresponden a la división que Riemann hizo del problema original. En la primera parte, Riemann se propone "responder a una pregunta más general" que la pregunta de la Academia. A continuación, en la segunda parte, Riemann utiliza esta solución más general para abordar la pregunta de la Academia. La segunda parte es la que contiene en forma explícita ciertas expresiones matemáticas que son esenciales para la geometría diferencial. No obstante, es sólo estudiando la primera parte que se puede ver una relación entre el *Commentatio* y la *Habilitationsvortrag*. Sólo cuando el artículo se considera como un todo es que resulta claro que no contiene la explicación matemática de la *Habilitationsvortrag*. Una lectura sólo de la segunda parte induce a engaño pues la primera parte no corresponde a un desarrollo de la geometría diferencial.

Para responder a la pregunta de la Academia, las propiedades térmicas de un cuerpo deben ser tales que:

- **a.** la temperatura del cuerpo depende sólo del tiempo y de dos variables espaciales, es decir, el cuerpo tiene una cierta simetría espacial con respecto a la conducción del calor;
- **b.** el conjunto de curvas isotérmicas, es decir, las curvas que unen puntos en el cuerpo con la misma temperatura, no cambia.

Determinar las propiedades térmicas es equivalente a determinar la temperatura u, que aparece en la ecuación (I), y por lo tanto, las curvas isotérmicas. Al escribir la ecuación de la conducción del calor en la forma (I), Riemann estaba considerando una clase de cuerpos más amplia que la descrita (solicitada) por la Academia. La inclusión de los coeficientes de conductividad $a_{\iota,\iota'}$ bajo la operación de diferenciación supone que, tal como el calor específico h, éstos pueden depender de x_1, x_2, x_3, es decir, de la posición. Por lo tanto, RIEMANN no pretende considerar un cuerpo homogéneo. Al incluir los términos que involucran $a_{\iota,\iota'}$, con $\iota \neq \iota'$, se está suponiendo, además, que el cuerpo es anisotrópico, es decir, que el calor no necesariamente se difunde de la misma manera en todas las direcciones. Para la argumentación posterior de RIEMANN era importante que el cuerpo tuviera este grado de generalidad.

La ecuación (I) de la conducción del calor se expresa, tanto implícita como explícitamente, en función de las coordenadas espaciales x_1, x_2, x_3. El primer paso en la solución de RIEMANN fue hacer una transformación a un nuevo sistema de coordenadas s_1, s_2, s_3. Por lo tanto, las cantidades en la ecuación (I) transforman de manera tal que resultan ser funciones de s_1, s_2, s_3; los coeficientes $a_{\iota,\iota'}$ se transforman en $b_{\iota,\iota'}$ y el calor específico h se transforma en k. El propósito de tal transformación de coordenadas es producir una versión simplificada de la ecuación del calor por medio de una eleccción adecuada del sistema de coordenadas. En la ecuación original (I) su supone que la temperatura u es una función de x_1, x_2, x_3, también como del tiempo t. La pregunta de la Academia se refiere a cuerpos con una cierta simetría, de manera tal que, dada una elección particular del sistema de coordenadas que refleje esta simetría, la temperatura se puede expresar como una función del tiempo y de sólo dos de las tres variables espaciales. Por lo tanto, RIEMANN introduce la transformación de coordenadas para generar una situación en la cual u es una función sólo de s_1, s_2 y t.

En la sección 3 de la primera parte del *Commentatio* es en donde se puede intentar establecer una relación entre el *Commentatio* y la *Habilitationsvortrag*. Se debe enfatizar que RIEMANN no analiza el problema de la conducción del calor desde un punto de vista geométrico y que no usa la geometría para ayudar a un mejor entendimiento del problema físico. RIEMANN hace sólo una referencia casual al problema geométrico análogo en una ilustración anexa que no aclara nada acerca del mecanismo de la conducción del calor.

No obstante, existe una relación entre la geometría de Riemann y el *Commentatio*. A partir de la descripción de RIEMANN en la sección 3 de cómo se propone responder a la pregunta acerca de la conducción del calor, se ve que el problema matemático de transformar una forma cuadrática en otra, a la cual se reduce el problema de la conducción del calor, es el mismo problema matemático que aparece en su clasificación de las geometrías. En la *Habilitationsvortrag* los detalles matemáticos no son explícitos, sino que implícitamente se sugiere que diferentes geometrías son equivalentes si sus elementos de línea se pueden transformar uno en el otro por medio de una transformación de coordenadas. Los elementos de línea son formas cuadráticas, y sus coeficientes $g_{\iota,\iota'}$ son lo que hoy conocemos como las componentes del tensor métrico, un tensor de segundo rango. Aunque esto nos ayuda a entender por qué algunos estudiosos del *Commentatio* relacionan el problema geométrico con el problema de la conducción del calor, no hay una evidencia explícita para esta relación.

La relación que RIEMANN establece en la sección 3 entre los dos conjuntos de coeficientes de conductividad $a_{\iota,\iota'}$ y $b_{\iota,\iota'}$ no es la relación satisfecha por las componentes de un tensor de segundo rango en diferentes sistemas de coordenadas debido a la presencia del término

$$\sum \pm \frac{\partial s_1}{\partial x_1} \frac{\partial s_2}{\partial x_2} \frac{\partial s_3}{\partial x_3}\,, \tag{1}$$

es decir, el jacobiano de la transformación desde s_1, s_2, s_3 a x_1, x_2, x_3. No obstante, RIEMANN demuestra que los cofactores $\alpha_{\iota,\iota'}$ y $\beta_{\iota,\iota'}$ de $a_{\iota,\iota'}$ y $b_{\iota,\iota'}$, respectivamente, satisfacen las relaciones de transformación correctas. Entonces, a partir de estas relaciones RIEMANN obtiene la ecuación

$$\sum_{\iota,\iota'} \alpha_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, dx_{\iota'} = \sum_{\iota,\iota'} \beta_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'}\,. \tag{2}$$

Como una consecuencia de haber obtenido esta ecuación, RIEMANN argumenta que la transformación de la ecuación (I) bajo un cambio de coordenadas es equivalente a la transformación de $\sum \alpha_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, dx_{\iota'}$ en $\sum \beta_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'}$, y viceversa.

Por lo tanto, RIEMANN sugiere una estrategia para resolver la primera parte del problema: en el contexto de un problema más general, es decir para un cuerpo no–homogéneo, considerar todos los casos en los cuales u es una función sólo de s_1, s_2 y de t; entonces, en estos casos, encontrar los coeficientes $b_{\iota,\iota'}$ y el calor específico k y por lo tanto los cofactores $\beta_{\iota,\iota'}$. Esta parte de la solución fue presentada por RIEMANN en las secciones 4 y 5. RIEMANN considera la ecuación satisfecha por la temperatura u en el caso especial en que ésta no depende de s_3 y denota esta condición por $F = 0$. Por lo tanto, los coeficientes de conductividad $b_{\iota,\iota'}$ en esta ecuación de la conducción del calor generan un conjunto de m ecuaciones independientes

$$F_1 = 0\,, \quad F_2\,, \quad \cdots\,, \quad F_m = 0\,. \tag{3}$$

Entonces, debe ser posible expresar el lado derecho F de la ecuación original como una combinación lineal de las m expresiones F_i, $i = 1, 2, \cdots, m$. Entonces, una vez que se han determinado los F_i, se puede identificar los coeficientes desconocidos $b_{\iota,\iota'}$. Por lo tanto, RIEMANN consideró cómo se puede determinar la forma de F_i sólo para los casos $m = 1$, 2, 3 y 4.

Antes de describir la segunda parte del *Commentatio*, es necesario resumir los principales detalles de la primera parte. Para responder a la pregunta de la Academia primero se debe suponer que se tiene un conjunto de coeficientes de conductividad $a_{\iota,\iota'}$ para el cuerpo en cuestión. Estos coeficientes $a_{\iota,\iota'}$ se definen con respecto a un sistema de coordenadas x_1, x_2, x_3 y son constantes, dado que el cuerpo es homogéneo. Sin embargo, en este sistema de coordenadas la temperatura u puede depender de las tres coordenadas espaciales también como del tiempo. Dado que el cuerpo posee una cierta simetría se sabe que es posible elegir un sistema de coordenadas en el cual u sea expresable en función de sólo dos coordenadas espaciales y del tiempo. Para expresar u de esta manera, RIEMANN transforma a un nuevo sistema de coordenadas, pero al hacer esto relaja la condición de homogeneidad. A continuación se presentan métodos para obtener los coeficientes de conductividad $b_{\iota,\iota'}$ y por lo tanto los cofactores $\beta_{\iota,\iota'}$ en este sistema de coordenadas.

Una vez que se han obtenido los cofactores $\beta_{\iota,\iota'}$ y por lo tanto la expresión $\sum \beta_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'}$ en el sistema de coordenadas s_1, s_2, s_3, RIEMANN anuncia al final de la primera parte que "ahora nos queda por considerar cuándo la expresión $\sum \beta_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'}$ se puede transformar en la forma dada $\sum \alpha_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, dx_{\iota'}$" en la cual los coeficientes $\alpha_{\iota,\iota'}$ son constantes. Esto nos lleva al contenido de la segunda parte del artículo. El sub–título de la segunda parte es "Con respecto a la transformación de la expresión $\sum \beta_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'}$". La notación que se utiliza en este sub–título, y en toda la segunda parte, es diferente de la notación utilizada en la primera parte, en particular en el anuncio de RIEMANN al final de la primera parte de lo que todavía queda por hacer. La segunda parte es auto–consistente, pero la notación de la primera parte no se utiliza en esta segunda parte. Para poder hacer un comentario acerca del artículo como un todo, se deben hacer los siguientes cambios a la notación de RIEMANN en la segunda parte: $b_{\iota,\iota'}$ y $\beta_{\iota,\iota'}$ se intercambian y $a_{\iota,\iota'}$ se reemplaza por $\alpha_{\iota,\iota'}$. Sin embargo, la notación que aparece en la traducción (Apéndice) es la original usada por RIEMANN.

Se supone entonces que se conocen los coeficientes de conductividad $a_{\iota,\iota'}$, y por lo tanto, que también se conocen los cofactores $\alpha_{\iota,\iota'}$, y que se ha determinado la expresión $\sum \beta_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'}$. RIEMANN entonces se pregunta cuál es la condición que debe ser satisfecha por los $\beta_{\iota,\iota'}$ para que la expresión $\sum \beta_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'}$ se pueda transformar en la forma dada $\sum \alpha_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, dx_{\iota'}$ en la cual los coeficientes $\alpha_{\iota,\iota'}$ son constantes. Por otra parte, siempre es posible transformar la forma dada $\sum \alpha_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, dx_{\iota'}$ en la forma $\sum dx_\iota^2$. Por lo tanto, la pregunta de RIEMANN es equivalente a preguntar cuándo la expresión $\sum \beta_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'}$ se puede transformar en $\sum dx_\iota^2$. Al responder esta pregunta, RIEMANN identifica los casos que son 'aparentemente' no–homogéneos; 'aparentemente' debido a que los coeficientes de conductividad $b_{\iota,\iota'}$ y por lo tanto $\beta_{\iota,\iota'}$ dependen de las coordenadas s_1, s_2, s_3, pero la dependencia es sólo una manifestación del sistema de coordenadas. Por lo tanto, el problema se ha reducido al mismo problema matemático que aquel implícito en la *Habilitationsvortrag*, en el cual la clasificación de las geometrías se reduce a identificar aquellas geometrías que son 'aparentemente' planas, es decir, geometrías con elementos de línea con coeficientes que dependen de las coordenadas, pero en las cuales esta dependencia es sólo una manifestación del sistema de coordenadas.

Las condiciones que deben ser satisfechas por las cantidades $\beta_{\iota,\iota'}$ están dadas en la ecuación (I) de la segunda parte. Las cantidades $p_{\iota,\iota',\iota''}$ que aparecen en esta ecuación están relacionadas con lo que hoy se conoce como símbolos de Christoffel [3] y la cantidad $(\iota\iota', \iota''\iota''')$ está relacionada con lo que hoy se conoce como tensor de Riemann–Christoffel. Aun cuando es posible establecer relaciones obvias entre las cantidades que aparecen en la ecuación (I) y algunas cantidades claves de la geometría diferencial, se debe enfatizar que la condición (I) aquí se obtiene en el contexto del problema de la conducción del calor. Una condición análoga a la ecuación (I) se podría obtener en un contexto geométrico y por lo tanto se podría interpretar como la condición que debe ser satisfecha por la métrica asociada con un espacio para que éste sea plano o tenga curvatura cero. En el *Commentatio*, Riemann no interpreta la condición (I) de esa manera. Sin embargo, Riemann ilustra los resultados de esta parte "por medio de un ejemplo geométrico". Pero, en el contexto de su formulación del problema de la conducción del calor la ilustración geométrica no es útil y no ofrece ninguna indicación de cómo la geometría sirve para entender el mecanismo de la conducción del calor.

Por lo tanto, al analizar el contenido del *Commentatio* se ve que la relación entre el problema de la equivalencia de las formas cuadráticas, y la geometría diferencial, no fue hecha en forma explícita por Riemann (ni por Christoffel ni por Lipschitz).

3. **El análisis tensorial**

El propósito de la presente sección es dar una visión resumida del análisis tensorial. Su forma final fue alcanzada en los trabajos de Ricci y Levi–Civita [19]. Con el desarrollo de la Relatividad General por Einstein en 1915 [6], el análisis tensorial recibió nuevos impulsos. Esto se refleja, principalmente, en los trabajos de Weyl [37], de É. Cartan [2] y de Schouten [30].

Nuestro punto de partida es un espacio $\mathcal{X}$ de dimensión d.[4] Las propiedades de este espacio, como también las relaciones que puedan existir entre distintos objetos geométricos, se pueden formular sin el uso de coordenadas. Este hecho se puede interpretar de dos maneras. Dado que los resultados no dependen de las coordenadas, entonces no es necesario usar coordenadas, que es el enfoque intrínseco preferido por los matemáticos. El segundo punto de vista es que si los resultados no dependen de las coordenadas, entonces podemos usar coordenadas dado que los resultados (es decir, las relaciones entre los distintos objetos geométricos) serán los mismos sin importar las coordenadas que hayamos utilizado. Este último punto de vista es el preferido por los físico–matemáticos y

[4] El espacio $\mathcal{X}$ se puede pensar como una variedad. Sin embargo, para los propósitos de esta exposición ésta es una abstracción innecesaria y nos podemos restringir, sin pérdida de rigor, a espacios vectoriales.

físicos teóricos donde es necesario realizar cálculos explícitos. Es este segundo punto de vista el que se utiliza en el análisis tensorial.

El análisis tensorial se puede considerar como un conjunto de reglas de cálculo. Si estas reglas se aplican en forma correcta entonces está garantizado que el resultado es válido.

3.1. **Coordenadas.** En el espacio $\mathcal{X}$ siempre es posible introducir coordenadas x^i, $i = 1, \cdots, d$, o coordenadas y^a, $a = 1, \cdots, d$.[5] Para que ambos sistemas de coordenadas sean válidos, debe existir una transformación de coordenadas $y^a = y^a(\mathbf{x})$ que sea invertible.

La matriz jacobiana de la transformación de coordenadas está dada por

$$Y^a{}_i = \frac{\partial y^a}{\partial x^i} \,. \tag{4}$$

Aquí ya aparecen algunas de las reglas básicas del análisis tensorial. Existen dos tipos de índices: los índices *contravariantes*, tal como el índice 'a' en $Y^a{}_i$, y los índices *covariantes*, tal como el índice 'i' in $Y^a{}_i$. Si consideramos la base de la línea de texto como un nivel 0 y la parte superior de la línea de texto como un nivel 1, entonces los índices contravariantes se escriben en el nivel 1 mientras que los índices covariantes se escriben en el nivel 0. Sin embargo, también existe una línea de texto inferior, tal como en las fracciones, cuyo nivel superior coincide con el nivel 0 de la línea de texto original. Por lo tanto, un índice contravariante escrito en esta línea inferior es equivalente a un índice covariante, pues queda escrito en el nivel 0, tal como ocurre en $\frac{\partial}{\partial x^i}$. Siguiendo con este juego de niveles, un índice covariante escrito en la línea inferior queda escrito en un nivel -1. En este caso la regla es que este índice corresponde a un índice contravariante, es decir, como si estuviera escrito en el nivel 1. La segunda regla que aparece en la relación (4) es que los índices que aparecen a ambos lados de una ecuación son de igual variancia.

La transformación de coordenadas de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ debe ser invertible, lo cual significa que se debe tener

$$\det\left(Y^a{}_i\right) \neq 0 \,. \tag{5}$$

Entonces, la transformación inversa está dada por

$$X^i{}_a = \frac{\partial x^i}{\partial y^a} \,. \tag{6}$$

La matriz jacobiana inversa satisface

$$\sum_i Y^a{}_i \, X^i{}_b = \delta^a_b \,, \tag{7}$$

[5] En este trabajo los índices $i, j, k, \cdots$, están asociados con las coordenadas $\mathbf{x}$ mientras que los índices $a, b, c, \cdots$, están asociados con las coordenadas $\mathbf{y}$.

y

$$\sum_a X^i{}_a\, Y^a{}_j = \delta^i_j\,, \tag{8}$$

donde δ^i_j es la delta de Kronecker definida por

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j; \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases} \tag{9}$$

Una propiedad importante de la delta de Kronecker es

$$\begin{aligned} \sum_j \delta^i_j\, t^j &= t^i\,, \\ \sum_j \delta^j_i\, v_j &= v_i\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Observemos que los índices que están sumados en (7), en (8) y en (10) aparecen en posiciones diferentes. Este hecho se puede utilizar para simplificar la notación. La convención de suma de Einstein establece que si en una expresión dos índices aparecen repetidos, con variancias diferentes (uno covariante y otro contravariante), entonces se subentiende que están sumados sobre su rango. En este caso las expresiones (7) y (8) se simplifican a

$$\begin{aligned} Y^a{}_i\, X^i{}_b &= \delta^a_b\,, \\ X^i{}_a\, Y^a{}_j &= \delta^i_j\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Mientras que las relaciones (10) se reducen a

$$\begin{aligned} \delta^i_j\, t^j &= t^i\,, \\ \delta^j_i\, v_j &= v_i\,. \end{aligned} \tag{12}$$

3.2. **Tensores.** A continuación podemos introducir funciones sobre el espacio $\mathcal{X}$, es decir, aplicaciones $f : \mathcal{X} \to \mathcal{F}$, donde $\mathcal{F}$ es un espacio de dimensión N. Tal como en el espacio $\mathcal{X}$ se pueden introducir coordenadas $\mathbf{x}$, en el espacio $\mathcal{F}$ se pueden introducir coordenadas $\mathbf{f}$, con componentes f^A, $A = 1, \cdots, N$. Entonces, la función $\mathbf{f}$ se puede representar como $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \{f^1(\mathbf{x}), \cdots, f^N(\mathbf{x})\}$. Las posibles funciones que se pueden considerar se clasifican de acuerdo con la manera en que sus componentes f^A transforman bajo una transformación de coordenadas.

Las funciones más simples son las funciones escalares, las cuales tienen una única componente ϕ. Estas funciones se caracterizan por la propiedad

$$\bar{\phi}(\mathbf{y}) = \phi(\mathbf{x})\,. \tag{13}$$

Es decir, el valor de la única componente de esta función no depende del sistema de coordenadas en el cual ésta se evalue.

Las siguientes funciones en orden de complejidad son los vectores. Los vectores se pueden definir de varias maneras. Sin embargo, para motivar nuestra presentación lo hacemos de la manera que sigue. El diferencial de las coordenadas $\mathbf{t}$ es una función cuyas componentes t^i transforman de acuerdo con la regla

$$dy^a = Y^a{}_i \, dx^i \,. \tag{14}$$

Las funciones cuyas componentes transforman de acuerdo con la regla (14) son los *vectores contravariantes*. La definición completa es como sigue: un *vector contravariante* $\mathbf{v}$ es una función cuyas componentes t^i transforman de acuerdo con la regla

$$\bar{t}^a(\mathbf{y}) = Y^a{}_i \, t^i(\mathbf{x}) \,. \tag{15}$$

Existe un segundo tipo de vector que se obtiene considerando la derivada de la ecuación (13), es decir

$$\frac{\partial \phi}{\partial y^a} = X^i{}_a \, \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \,. \tag{16}$$

(Esto es sólo la regla de la cadena.) Las funciones cuyas componentes transforman de acuerdo con la regla (16) son los *vectores covariantes*. La definición completa es como sigue: un *vector covariante* $\mathbf{v}$ es una función cuyas componentes v_i transforman de acuerdo con la regla

$$\bar{v}_a(\mathbf{y}) = X^i{}_a \, v_i(\mathbf{x}) \,. \tag{17}$$

Consideremos a continuación la cantidad

$$\phi = v_i \, t^i \,. \tag{18}$$

Su regla de transformación se obtiene de la siguiente manera. Se tiene

$$\bar{\phi}(\mathbf{y}) = \bar{v}_a(\mathbf{y}) \, \bar{t}^a(\mathbf{y}) = X^i{}_a \, v_i(\mathbf{x}) \, Y^a{}_j \, t^j(\mathbf{x}) \,. \tag{19}$$

Observemos que los índices que están sumados tienen nombres distintos; esta es otra de las reglas de la convención de suma: un índice que está sumado aparece a lo más dos veces en cualquier expresión. De esta manera es claro cuál índice está sumado con cual otro índice. Dado que es claro cuál índice está sumado con cual otro índice, podemos escribir la expresión (19) en otro orden, por ejemplo

$$\bar{\phi}(\mathbf{y}) = X^i{}_a \, Y^a{}_j \, v_i(\mathbf{x}) \, t^j(\mathbf{x}) \,. \tag{20}$$

Utilizando (11) se tiene

$$\bar{\phi}(\mathbf{y}) = \delta^i_j \, v_i(\mathbf{x}) \, t^j(\mathbf{x}) \,, \tag{21}$$

Por lo tanto

$$\bar{\phi}(\mathbf{y}) = v_i(\mathbf{x}) \, t^i(\mathbf{x}) \,, \tag{22}$$

donde hemos utilizado (12). Finalmente

$$\bar{\phi}(\mathbf{y}) = \phi(\mathbf{x}) \,. \tag{23}$$

Por lo tanto, $v_i \, t^i$ es un escalar, el cual corresponde a una generalización del producto 'escalar' de dos vectores.

Hasta el momento tenemos tres tipos de objetos: escalares, que transforman como en (13); vectores contravariantes, que transforman como en (15); y vectores covariantes, que transforman como en (17).

El siguiente tipo de función, en orden de complejidad, son los tensores. Los tensores se definen de acuerdo con una extensión directa de las reglas de transformación (13), (15) y (17). Por ejemplo, un tensor covariante de segundo rango **g** es una función con componentes g_{ij} que transforman de acuerdo con la regla

$$\bar{g}_{ab}(\mathbf{y}) = X^i{}_a\, X^j{}_b\, g_{ij}(\mathbf{x})\,. \tag{24}$$

En forma similar, un ‘tensor de segundo rango contravariante’ **h** es un objeto con componentes h^{ij} que transforman como

$$\bar{h}^{ab}(\mathbf{y}) = Y^a{}_i\, Y^b{}_j\, h^{ij}(\mathbf{x})\,. \tag{25}$$

También es posible definir tensores con covariancia mixta, por ejemplo

$$\bar{k}^a{}_b(\mathbf{y}) = Y^a{}_i\, X^j{}_b\, k^i{}_j(\mathbf{x})\,. \tag{26}$$

Observemos que

$$\bar{k}^a{}_a(\mathbf{y}) = Y^a{}_i\, X^j{}_a\, k^i{}_j(\mathbf{x}) = \delta^j_i\, k^i{}_j(\mathbf{x}) = k^i{}_i(\mathbf{x})\,. \tag{27}$$

Por lo tanto, la suma de las componentes con índices iguales de un tensor mixto, es decir la suma de las componentes de la diagonal, es decir la traza, es un escalar.

El concepto de tensor fue posteriormente generalizado al de objeto geométrico por Schouten [30]. Un objeto geométrico **A** es una función (tal como se definió al comienzo de esta sub–sección) cuyas componentes transforman bajo alguna representación del grupo de difeomorfismos (las transformaciones de coordenadas), es decir

$$\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{y}) = F(\mathbf{\Lambda})\, \mathbf{A}(\mathbf{x})\,, \tag{28}$$

donde $\mathbf{\Lambda} = (\partial y/\partial x)$.

3.3. **Simetrías de los tensores.** La clasificación de los tensores admite un refinamiento adicional si consideramos las propiedades algebraicas de simetría de sus componentes.

Un tensor de segundo rango es simétrico si sus componentes no cambian bajo un intercambio de sus índices, es decir, si

$$S_{ji} = S_{ij}\,. \tag{29}$$

Un tensor es anti–simétrico si sus componentes cambian de signo cuando se intercambian sus índices, es decir, si

$$A_{ji} = -A_{ij}\,. \tag{30}$$

Como una consecuencia directa de la forma de las leyes de transformación de los tensores, las ecuaciones (29) y (30) se cumplen en cualquier sistema de coordenadas. Por lo tanto, las propiedades de simetría de los tensores son independientes del sistema de coordenadas.

Sea $\mathbf{T}$ un tensor covariante de segundo rango, es decir, con componentes T_{ij}. A partir de este tensor es siempre posible construir un tensor simétrico $\mathbf{S}$ y un tensor anti–simétrico $\mathbf{A}$. En efecto, basta con definir

$$\begin{aligned} S_{ij} &= T_{(ij)} = \frac{1}{2}\,(T_{ij} + T_{ji})\,, \\ A_{ij} &= T_{[ij]} = \frac{1}{2}\,(T_{ij} - T_{ji})\,, \end{aligned} \tag{31}$$

donde los paréntesis redondos '$(\cdot)$' y cuadrados '$[\cdot]$' denotan las operaciones de simetrización y anti–simetrización.

El número de componentes de un tensor simétrico se obtiene como sigue. En el caso en que ambos índices son diferentes el primer índice puede tomar n valores mientras que el segundo puede tomar $(n-1)$ valores; por lo tanto, se tiene $n\,(n-1)$ posibilidades; pero, dado que el orden de los índices es irrelevante, se está contando 2 veces la misma pareja de índices; para evitar este doble conteo el resultado anterior se debe dividir por 2 para obtener $n\,(n-1)/2$. En el caso en el cual ambos índices son iguales el número de términos es sólo n. Finalmente se tiene

$$S_{n,2} = \frac{1}{2}\,n\,(n-1) + n = \frac{1}{2}\,n\,(n+1)\,. \tag{32}$$

El número de componentes de un tensor anti–simétrico se obtiene como sigue. En este caso necesariamente ambos índices son diferentes; entonces, el primer índice puede tomar n valores mientras que el segundo puede tomar sólo $(n-1)$ valores; por lo tanto, se tienen $n\,(n-1)$ posibilidades; pero, dado que el orden de los índices es irrelevante, se está contando 2 veces la misma pareja de índices; por lo tanto, el resultado anterior se debe dividir por 2, y se obtiene

$$A_{n,2} = \frac{1}{2}\,n\,(n-1)\,. \tag{33}$$

Por otra parte, cualquier tensor de segundo rango se puede escribir como la suma de su parte simétrica y de su parte anti–simétrica, a saber

$$T_{ij} = \frac{1}{2}\,(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}\,(T_{ij} - T_{ji})\,, \tag{34}$$

Dado que un tensor $\mathbf{T}$ de segundo rango se puede escribir como la suma de su parte simétrica y de su parte anti–simétrica, se debe tener que la suma de las componentes de la parte simétrica y de las componentes de la parte anti–simétrica es el número total de componentes del tensor. En efecto

$$S_{n,2} + A_{n,2} = \frac{1}{2}\,n\,(n+1) + \frac{1}{2}\,n\,(n-1) = n^2 = T_{n,2}\,. \tag{35}$$

Una consecuencia trivial de lo anterior es que si un tensor, de segundo rango, es simétrico, entonces su parte anti–simétrica es cero, y si un tensor, de segundo rango, es anti–simétrico, entonces su parte simétrica es cero.

También se puede introducir propiedades de simetría para tensores de rango superior. Sin embargo, la descomposición en partes simétrica y anti–simétrica no es suficiente, y la descomposición completa de un tensor involucra componentes adicionales y esto no es una tarea sencilla. En ese caso es conveniente recurrir a los diagramas de Young y a otras herramientas combinatorias que no consideraremos aquí.

También es posible definir partes completamente simétrica y completamente anti–simétrica para tensores de rango superior. Particularmente interesante es la expresión para el número de componentes independiente de tensores completamente anti–simétricos de rango r. Se tiene

$$A_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}\,. \tag{36}$$

Los tensores, y los escalares y vectores como casos particulares, son los preferidos por matemáticos y físicos para expresar propiedades geométricas dado que las relaciones entre ellos no dependen del sistema de coordenadas en que se escriban. Esta afirmación requiere una aclaración; las componentes de los tensores sí dependen del sistema de coordenadas en que se evaluen. Sin embargo, dado que la matriz jacobiana es una matriz regular, ecuación (5), cuando un tensor es nulo en un sistema de coordenadas también lo es en cualquier otro sistema de coordenadas. Es en este sentido en que se debe entender que los resultados, aun cuando se obtienen con el uso de coordenadas, no dependen del sistema de coordenadas particular que se haya utilizado en su obtención.

A continuación estudiamos dos situaciones que involucran leyes de transformación no–tensoriales.

3.4. **El símbolo de Levi–Civita.** El número de componentes algebraicamente independientes de un tensor completamente anti–simétrico está dado por (36). Un caso particularmente interesante es

$$A_{n,n} = 1\,. \tag{37}$$

Por lo tanto, un tensor completamente anti–simétrico, de rango igual a la dimensión del espacio base, posee sólo una componente algebraicamente independiente, y por lo tanto el tensor se puede escribir como

$$A^{i_1\cdots i_n} = A\,\epsilon^{i_1\cdots i_n}\,, \tag{38}$$

donde

$$\epsilon^{i_1\cdots i_n} = \begin{cases} 1 & \text{si } i_1\cdots i_n \text{ es una permutación par de } 1\cdots n; \\ -1 & \text{si } i_1\cdots i_n \text{ es una permutación impar de } 1\cdots n; \\ 0 & \text{en caso contrario;} \end{cases} \tag{39}$$

es el símbolo de Levi–Civita.

Las leyes de transformación de $\epsilon^{i_1\cdots i_n}$ se determinan estudiando las leyes de transformación de $A^{i_1\cdots i_n}$. Se puede mostrar que A transforma como

$$\bar{A}(\mathbf{y}) = J(\mathbf{y},\,\mathbf{x})\,A(\mathbf{x})\,. \tag{40}$$

La función A no tiene índices y por lo tanto se podría pensar que es un escalar. Pero no lo es, dado que su regla de transformación es (40) y no (13). Las cantidades que transforman de acuerdo con (40) son densidades escalares de peso 1. Esto significa que el símbolo $\epsilon^{i_1\cdots i_n}$ no es un tensor y que transforma como

$$\bar{\epsilon}^{a_1\cdots a_n}(\mathbf{y}) = J^{-1}(\mathbf{y},\, \mathbf{x})\, \epsilon^{i_1\cdots i_n}(\mathbf{x})\,. \tag{41}$$

Las cantidades que transforman de esta manera son densidades tensoriales de peso -1.

3.5. **La conexión.** Comencemos recordando que un vector covariante $\mathbf{v}$ es un objeto con componentes v_i que transforman como

$$\bar{v}_a(\mathbf{y}) = \frac{\partial x^i}{\partial y^a}\, v_i(\mathbf{x})\,. \tag{42}$$

Sin embargo, las componentes de la derivada de $\mathbf{v}$ transforman de acuerdo con,

$$\frac{\partial \bar{v}_a}{\partial y^b}(\mathbf{y}) = \frac{\partial x^j}{\partial y^b}\, \frac{\partial x^i}{\partial y^a}\, \frac{\partial v_i}{\partial x^j}(\mathbf{x}) + \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^a \partial y^b}\, v_i(\mathbf{x})\,. \tag{43}$$

El primer término contiene la regla de transformación correcta para las componentes de un tensor, sin embargo, el segundo término contiene derivadas de segundo orden de la transformación de coordenadas, y esto no corresponde a la ley de transformación para las componentes de un tensor.

La derivada ordinaria de un vector no transforma como un tensor y por lo tanto no es un tensor. La relación anterior se podría considerar como un nuevo tipo de transformación, sin embargo aun con esta buena voluntad o disposición, es de poca utilidad. Si las componentes de un objeto geométrico, que transforman de acuerdo con (43), se anulan en un cierto sistema de coordenadas, entonces no necesariamente se anulan en cualquier otro sistema de coordenadas.

Una consecuencia más grave que se obtiene a partir de las relaciones (43) es que la derivada ordinaria no es una operación de caracter tensorial (es decir, que conserve la tensorialidad, que mapee tensores en tensores). Es decir, su valor dependerá del sistema de coordenadas en el cual se evalúa. Lo anterior no es aceptable ni desde un punto de vista matemático ni físico. Para corregir esta situación es necesario definir una operación de derivación que sí garantice que el objeto obtenido tiene carácter tensorial, es decir una nueva operación de derivación ∇.

Para que la operación de derivación pueda tener un significado que no cambie es necesario definir un nuevo tipo de derivada. Observemos que en (43) el último término, lineal en $\mathbf{v}$, es el que rompe la ley de transformación tensorial. Por lo tanto, una definición conveniente de una derivada covariante debería considerar un término lineal en $\mathbf{v}$, para compensar el término no deseado. Definamos por lo tanto, la derivada covariante $\nabla\mathbf{v}$ como el objeto con componentes

$$\nabla_j v_i = \frac{\partial v_i}{\partial x^j} - \Gamma^k{}_{ji}\, v_k\,, \tag{44}$$

donde $\mathbf{\Gamma}$ es un nuevo objeto geométrico que se conoce como la *conexión*.

Para que (44) sean las componentes de un tensor estas deben transformar como

$$\bar{\nabla}_b \bar{v}_a(\mathbf{y}) = \frac{\partial x^i}{\partial y^a}\,\frac{\partial x^j}{\partial y^b}\,\nabla_j v_i(\mathbf{x})\,. \tag{45}$$

Usando las reglas de transformación para $\mathbf{v}$ y sus derivadas, ecuaciones (42) y (43), se obtiene la regla de transformación para las componentes de la conexión

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}^c_{ab}(\mathbf{y}) &= \frac{\partial x^i}{\partial y^a}\,\frac{\partial x^j}{\partial y^b}\left[\Gamma^k{}_{ij}(\mathbf{x})\,\frac{\partial y^c}{\partial x^k} - \frac{\partial^2 y^c}{\partial x^i \partial x^j}\right]\\ &= \frac{\partial y^c}{\partial x^k}\left[\Gamma^k{}_{ij}(\mathbf{x})\,\frac{\partial x^i}{\partial y^a}\,\frac{\partial x^j}{\partial y^b} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial y^a \partial y^b}\right].\end{aligned} \tag{46}$$

Por lo tanto, la conexión no es un tensor. Esto no es sorprendente dado que se necesita algo que no sea un tensor para compensar el carácter no tensorial de la derivada ordinaria, y de manera tal que la combinación resultante sea un tensor.

En (46) tenemos una nueva regla de transformación. Una función $\mathbf{\Gamma}$ cuyas componentes $\Gamma^k{}_{ij}$ transforman de acuerdo con (46) es una *conexión*.

A continuación, se debe imponer que la derivada covariante ∇ satisfaga las reglas necesarias para que podamos considerarla una diferenciación. La propiedad más importante es la regla de Leibniz:

$$\nabla(\mathbf{A}\,\mathbf{B}) = (\nabla\mathbf{A})\,\mathbf{B} + \mathbf{A}\,(\nabla\mathbf{B})\,, \tag{47}$$

donde $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son objetos geométricos cualesquiera: escalares, vectores, tensores, etc.

La regla de Leibniz (47) nos permite obtener la derivada covariante de otros objetos. Comencemos considerando el vector covariante $\mathbf{V} = \phi\,\mathbf{v}$, donde ϕ es una función escalar (se puede verificar que si $\mathbf{v}$ es un vector covariante y ϕ es un escalar, entonces $\mathbf{V}$ es un vector covariante). Las componentes de su derivada covariante están dadas por

$$\begin{aligned}\nabla_i(\phi\, v_j) &= \frac{\partial(\phi\, v_j)}{\partial x^i} - \Gamma^k{}_{ij}\,\phi\, v_k\,,\\ \phi\,\nabla_i v_j + v_j\,\nabla_i\phi &= \phi\,\nabla_i v_j + v_j\,\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\,.\end{aligned} \tag{48}$$

Por lo tanto se obtiene:

$$\nabla_i\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^i}\,. \tag{49}$$

Es decir, la derivada covariante de una función escalar es la derivada ordinaria.

Consideremos la función escalar particular $\phi = v_i\, t^i$, donde v_i son las componentes de un vector covariante $\mathbf{v}$ y t^i son las componentes de un vector contravariante $\mathbf{t}$. Entonces se tiene

$$\begin{aligned}
\nabla_i (v_k\, t^k) &= \frac{\partial (v_k\, t^k)}{\partial x^i} \,, \\
v_k\, \nabla_i t^k + t^k\, \nabla_k v_k &= v_k\, \frac{\partial t^k}{\partial x^i} + t^k\, \frac{\partial v_k}{\partial x^i} \,.
\end{aligned} \tag{50}$$

Reemplazando la expresión para la derivada de un vector covariante, (44), se obtienen las componentes de la derivada covariante de un vector contravariante:

$$\nabla_i t^k = \frac{\partial t^k}{\partial x^i} + \Gamma^k{}_{ij}\, t^j \,. \tag{51}$$

La derivada covariante de un tensor de rango superior arbitrario se obtiene considerando la derivada ordinaria y un número de términos que contienen a la conexión $\mathbf{\Gamma}$ igual al rango del tensor. Para índices covariantes se usa el signo negativo, y para índices contravariantes un signo positivo, es decir

$$\begin{aligned}
\nabla_k T^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} &= \frac{\partial T^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}}{\partial x^k} \\
&\quad + \Gamma^{i_1}{}_{ki}\, T^{i i_2\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} + \cdots + \Gamma^{i_r}{}_{ki}\, T^{i_1\cdots i_{(r-1)} i}_{j_1\cdots j_s} \\
&\quad - \Gamma^{j}{}_{kj_1}\, T^{i_1\cdots i_r}_{j j_2\cdots j_s} - \cdots - \Gamma^{j}{}_{kj_s}\, T^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_{(s-1)} j} \,.
\end{aligned} \tag{52}$$

Una propiedad interesante y útil de la conexión es que si $\mathbf{\Gamma}_1$ y $\mathbf{\Gamma}_2$ son dos conexiones, entonces las leyes de transformación de sus componentes respectivas son

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_1{}^c{}_{ab}(\mathbf{y}) &= \frac{\partial x^i}{\partial y^a}\, \frac{\partial x^j}{\partial y^b} \left[\Gamma_1{}^k{}_{ij}(\mathbf{x})\, \frac{\partial y^c}{\partial x^k} - \frac{\partial^2 y^c}{\partial x^i \partial x^j} \right] , \\
\bar{\Gamma}_2{}^c{}_{ab}(\mathbf{y}) &= \frac{\partial x^i}{\partial y^a}\, \frac{\partial x^j}{\partial y^b} \left[\Gamma_2{}^k{}_{ij}(\mathbf{x})\, \frac{\partial y^c}{\partial x^k} - \frac{\partial^2 y^c}{\partial x^i \partial x^j} \right] .
\end{aligned} \tag{53}$$

Considerando la diferencia de estas relaciones se obtiene

$$\Delta \bar{\Gamma}^c_{ab}(\mathbf{y}) = \frac{\partial x^i}{\partial y^a}\, \frac{\partial x^j}{\partial y^b}\, \frac{\partial y^c}{\partial x^k}\, \Delta \Gamma^k{}_{ij}(\mathbf{x}) \,, \tag{54}$$

donde

$$\Delta \Gamma^k{}_{ij} = \Gamma_2{}^k{}_{ij} - \Gamma_1{}^k{}_{ij} \,. \tag{55}$$

Por lo tanto, la diferencia de dos conexiones es un tensor. Por otra parte, a partir de una conexión dada se puede construir una segunda conexión sumándole un tensor.

Para terminar esta sección evaluemos algunas combinaciones de derivadas importantes. La primera expresión interesante es la contracción de la ecuación (51). Se obtiene

$$\nabla_i t^i = \frac{\partial t^i}{\partial x^i} + \Gamma^i{}_{ij}\, t^j \,. \tag{56}$$

Esta expresión se puede considerar como la forma covariante de la divergencia de un vector. Por otra parte, la segunda derivada de una función escalar se obtiene reemplazando $\mathbf{v} = \nabla\phi = (\partial\phi/\partial x)$ en la ecuación (44) y se obtiene

$$\nabla_j \nabla_i \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^k{}_{ji}\, \frac{\partial \phi}{\partial x^k}\,. \tag{57}$$

3.6. **El tensor de Riemann.** Anteriormente vimos que la derivada ordinaria de un vector produce un objeto que no es un tensor. Al considerar las reglas de transformación de la conexión, nos encontramos frente a una situación algo similar, es decir, frente a una regla de transformación no tensorial. La pregunta que surje en forma natural es si la derivada ordinaria (que no es una operación tensorial) de un objeto que no es un tensor (la conexión) puede ser un tensor. La respuesta es afirmativa y el tensor en cuestión es el tensor de Riemann.

Las segundas derivadas ordinarias de cualquier objeto conmutan. Sin embargo, esta propiedad ya no se cumple para la derivada covariante, es decir, las segundas derivada covariantes no conmutan. Además, dado que la derivada covariante es una operación tensorial, la diferencia de dos derivadas covariantes debe ser un tensor. Se obtiene

$$\nabla_i \nabla_j v_k - \nabla_j \nabla_i v_k = R^l{}_{kij}(\mathbf{\Gamma})\, v_l + T^l{}_{ij}(\mathbf{\Gamma})\, \nabla_k v_l\,, \tag{58}$$

donde

$$R^k{}_{lij}(\mathbf{\Gamma}) = \frac{\partial \Gamma^k{}_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^k{}_{il}}{\partial x^j} + \Gamma^k{}_{im}\, \Gamma^m{}_{jl} - \Gamma^k{}_{jm}\, \Gamma^m{}_{il}\,, \tag{59}$$

son las componentes del *tensor de Riemann* **Rie**, y

$$T^k{}_{ij}(\mathbf{\Gamma}) = \Gamma^k{}_{ij} - \Gamma^k{}_{ji}\,, \tag{60}$$

son las componentes de la *torsión* **T**.

La fórmula (58) se puede extender a tensores de rango superior y de otra covariancia, por ejemplo:

$$\nabla_i \nabla_j t^k - \nabla_j \nabla_i t^k = R^k{}_{lij}(\mathbf{\Gamma})\, t^l - T^l{}_{ij}(\mathbf{\Gamma})\, \nabla_l\, t^k\,. \tag{61}$$

A partir de contracciones del tensor de Riemann solamente, que no involucren ningún tensor adicional, se pueden obtener dos tensores de segundo rango, a saber, el tensor de Ricci **Ric** con componentes

$$R_{ij}(\mathbf{\Gamma}) = R^k{}_{ikj}(\mathbf{\Gamma}) = \frac{\partial \Gamma^k{}_{ji}}{\partial x^k} - \frac{\partial \tilde{\Gamma}_i}{\partial x^j} + \tilde{\Gamma}_m\, \Gamma^m{}_{ji} - \Gamma^k{}_{jm}\, \Gamma^m{}_{ki}\,, \tag{62}$$

con $\tilde{\Gamma}_i = \Gamma^k{}_{ki}$, y el tensor de Riemann–Ricci **H** con componentes

$$H_{ij}(\mathbf{\Gamma}) = R^k{}_{kij}(\mathbf{\Gamma}) = \frac{\partial \Gamma_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_i}{\partial x^j}\,, \tag{63}$$

donde $\Gamma_i = \Gamma^k{}_{ik}$. El tensor **H** es anti–simétrico y el tensor de Ricci no tiene simetrías. Distintos tipos de espacios se pueden obtener considerando los posibles valores de **Rie**, **T**, **Ric** y **H**.

4. **Formas cuadráticas — Geometría riemanniana**

Ahora estamos listos para reconsiderar el problema de la equivalencia de las formas cuadráticas. La primera pregunta que se intenta responder es cuándo un tensor de segundo rango $\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{y})$ se puede transformar en otro $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ con componentes constantes por medio de una transformación de coordenadas. La condición se puede establecer en forma sencilla, sin embargo, es necesario satisfacer ciertas condiciones de integrabilidad para que exista la transformación de coordenadas necesaria. Esto implica considerar derivadas de la relación original. Entonces, la condición de integrabilidad es que se anulen ciertas combinaciones de derivadas (tensoriales), las componentes del tensor de Riemann–Christoffel.

Esta situación es un caso particular de una situación más general que consiste en la construcción de concomitantes. Un concomitante es un objeto geométrico que se construye exclusivamente a partir de otro objeto geométrico. Los concomitantes pueden ser tensoriales o no–tensoriales. Para que dos objetos geométricos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}'$ sean equivalentes es necesario que sus concomitantes tensoriales estén relacionados en forma tensorial.

Un concomitante no–tensorial para un tensor de segundo rango es el símbolo de Christoffel. Los concomitantes tensoriales de un tensor de segundo rango son el tensor de Riemann–Christoffel y sus derivadas covariantes. Para un tensor de segundo rango con componentes constantes se tiene que todos sus concomitantes tensoriales se anulan. Por lo tanto, para que un tensor de segundo rango sea equivalente a uno con componentes constantes, es necesario que también se anulen todos sus concomitantes.

Comenzaremos con una descripción de la teoría de los concomitantes, la que luego aplicaremos a la descripción del problema de la equivalencia. Finalmente damos una breve descripción de la geometría riemanniana.

4.1. **Concomitantes.** Desde la aparición de la noción de tensor, es decir, de un objeto con ciertas reglas de transformación, y del concepto más general de objeto geométrico introducido por SCHOUTEN [30], ha aparecido el problema de la construcción a partir de un conjunto dado de objetos geométricos $\mathbf{A}$ de otros objetos geométricos $\mathbf{B}$, es decir, de objetos geométricos concomitantes. En breve, un objeto geométrico $\mathbf{B}$ es concomitante de otro objeto geométrico $\mathbf{A}$ cuando sus componentes se pueden escribir en función de las componentes de $\mathbf{A}$, y de sus derivadas, y tal que la relación funcional resultante entre estos es la misma en todos los sistemas de coordenadas. Uno de los problemas de la teoría de los concomitantes es la determinación de todos los concomitantes $\mathbf{B}$ que se puedan construir a partir de un objeto geométrico dado $\mathbf{A}$. Tal como las trazas de una matriz son invariantes que ayudan a caracterizar la matriz y sus propiedades, los concomitantes son importantes debido a que también ayudan a caracterizar un objeto geométrico y sus propiedades.

Veamos algunos ejemplos:

(1) El tensor más sencillo que es un concomitante de una conexión es el tensor de Riemann.

(2) La conexión más sencilla que es concomitante de un tensor de segundo rango $\mathbf{g}$ es de la forma

$$\Gamma^k{}_{ij} = \left\{ {k \atop ij} \right\}(\mathbf{g}) \,, \tag{64}$$

donde

$$\left\{ {k \atop ij} \right\}(\mathbf{g}) = \frac{1}{2}\, g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) , \tag{65}$$

es el símbolo de Christoffel. El símbolo de Christoffel fue introducido en 1868 [3] y el concepto de conexión fue introducido sólo en 1917 por LEVI–CIVITA [12]. En la sección 3.5 nos hemos adelantado a la historia pues, desde un punto de vista expositivo y pedagógico, resulta más conveniente introducir el concepto de conexión antes que el concepto de símbolo de Christoffel, el cual es sólo un caso especial de una conexión.

La unicidad del símbolo de Christoffel como la única conexión que es un concomitante diferencial de un tensor de segundo rango fue establecida por NORIEGA [17] y redescubierta en [32].

(3) Otro ejemplo simple es el de un vector $\mathbf{A}$. Las reglas de transformación de sus componentes son

$$\bar{A}_a(\mathbf{y}) = X^i{}_a\, A_i(\mathbf{x}) \,. \tag{66}$$

Las derivadas están dadas por

$$\frac{\partial \bar{A}_b}{\partial y^a}(\mathbf{y}) = X^i{}_a\, X^j{}_b\, \frac{\partial A_j}{\partial x^i}(\mathbf{x}) + X^i{}_{ab}\, A_i(\mathbf{x}) \,. \tag{67}$$

Esta relación no corresponde a las reglas de transformación de un tensor. El número de ecuaciones en (67) es n^2, mientras que el número de términos ilegales, $(\partial^2 x/\partial y^2)$, es $n\,(n+1)/2$. Dado que este es un sistema de ecuaciones algebraicas lineales, debe existir un número $n^2 - n\,(n+1)/2 = n\,(n-1)/2$ de relaciones que no involucran los términos ilegales $(\partial^2 x/\partial y^2)$. Se obtiene

$$\bar{F}_{ab}(\mathbf{y}) = X^i{}_a\, X^j{}_b\, F_{ij}(\mathbf{x}) \,, \tag{68}$$

donde

$$F_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j} \,. \tag{69}$$

(4) Los concomitantes diferenciales de un tensor de segundo rango tienen una historia más larga. El primer resultado en este sentido fue obtenido por GAUSS [8] para $d = 2$. El siguiente resultado es el *Commentatio* [28] y los resultados de CHRISTOFFEL [3, 4] y de LIPSCHITZ [14]. La construcción de concomitantes de orden superior fue considerada por HASKINS [11]. Este método fue redescubierto por MUÑOZ–MASQUÉ y VALDÉS [15, 16] y en [34]. Este es el tema de la siguiente subsección.

4.2. **El problema de la equivalencia de las formas cuadráticas.** Ahora ya podemos considerar en forma completa el problema de la equivalencia de las formas cuadráticas. Para que dos formas cuadráticas sean equivalentes debe ser posible escribir

$$\bar{g}_{ab}(\mathbf{y})\, dy^a\, dy^b = g_{ij}(\mathbf{x})\, dx^i\, dx^j\,. \tag{70}$$

El tensor $\mathbf{g}$ es simétrico y tiene un número de componentes $n\,(n+1)/2$. Bajo un cambio de coordenadas los coeficientes $\mathbf{g}$ transforman como

$$\bar{g}_{ab}(\mathbf{y}) = X^i{}_a\, X^j{}_b\, g_{ij}(\mathbf{x})\,. \tag{71}$$

Para construir los concomitantes debemos considerar derivadas de esta relación. Se obtiene

$$\frac{\partial \bar{g}_{ab}}{\partial y^c} = X^i{}_a\, X^j{}_b\, X^k{}_c\, \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \left(X^i{}_{ac}\, X^j{}_b + X^i{}_a\, X^j{}_{bc}\right)\, g_{ij}\,. \tag{72}$$

El número de ecuaciones es $n \cdot n\,(n+1)/2$ mientras que el número de términos ilegales, $(\partial^2 x/\partial y^2)$, es también $n{\cdot}n\,(n{+}1)/2$. Por lo tanto, no existen relaciones que no involucren los términos ilegales. Dado que el número de incógnitas y el número de ecuaciones es el mismo podemos obtener una expresión para los términos ilegales. Sin embargo, al intentar hacer esto llegamos a la relación

$$\overline{\left\{ {c \atop ab} \right\}}(\mathbf{y}) = \frac{\partial y^c}{\partial x^k}\, \left[\frac{\partial x^i}{\partial y^a}\, \frac{\partial x^j}{\partial y^b}\, \left\{ {k \atop ij} \right\}(\mathbf{x}) + \frac{\partial^2 x^k}{\partial y^a \partial y^b}\right]\,, \tag{73}$$

donde $\left\{ {k \atop ij} \right\}$ es el símbolo de Christoffel definido en (65). Este objeto satisface las reglas de transformación para una conexión, a saber (46), y, por lo tanto, es una conexión.

Por lo tanto, las primeras derivadas de la relación (71) no son útiles en la resolución de nuestro problema. En vez de abandonar esta línea de ataque insistamos y consideremos una derivada más de esta relación. Se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \bar{g}_{ab}}{\partial x^c \partial x^d} \quad = \quad & X^i{}_a\, X^j{}_b\, X^k{}_c\, X^l{}_d\, \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l} \\
& + \big[\left(X^i{}_{ca}\, X^j{}_b + X^i{}_a\, X^j{}_{cb}\right)\, X^k{}_d \\
& \quad + \left(X^i{}_{da}\, X^j{}_b + X^i{}_a\, X^j{}_{db}\right)\, X^k{}_c + X^i{}_a\, X^j{}_b\, X^k{}_{dc}\big]\, \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\,. \\
& + \left[X^i{}_{dca}\, X^j{}_b + X^i{}_a\, X^j{}_{dcb} + X^i{}_{ca}\, X^j{}_{db} + X^i{}_{da}\, X^j{}_{cb}\right]\, g_{ij}
\end{aligned} \tag{74}$$

Ahora, el número de ecuaciones es $[n\,(n+1)/2]^2$ mientras que los términos ilegales, $(\partial^3 x/\partial y^3)$, son $n{\cdot}n\,(n{+}1)\,(n{+}2)/6$. Esta vez el número de ecuaciones es mayor que el número de términos ilegales. Por lo tanto, debe ser posible encontrar combinaciones de estas ecuaciones que no involucren los términos ilegales. El número de estas ecuaciones está dado por

$$R(n) = \left[\frac{1}{2}\, n\,(n+1)\right]^2 - n\, \cdot\, \frac{1}{6}\, n\,(n+1)\,(n+2) = \frac{1}{12}\, n^2\,(n^2-1)\,. \tag{75}$$

Por lo tanto, ya sabemos que existe un concomitante diferencial de segundo orden cuyo número de componentes es $n^2\,(n^2-1)/12$. El siguiente paso es construir este concomitante en forma explícita. Para esto sólo es necesario obtener relaciones que no involucren los términos ilegales. El resultado es

$$\bar{R}_{abcd}(\mathbf{y}) = X^i{}_a\, X^j{}_b\, X^k{}_c\, X^l{}_d\, R_{ijkl}(\mathbf{x})\,, \tag{76}$$

donde

$$\begin{aligned} R_{ijkl}(\mathbf{g}) \quad &= \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l}\right) \\ &\quad - g_{mn}\left[\left\{ {m \atop jk} \right\}\left\{ {n \atop il} \right\} - \left\{ {m \atop ik} \right\}\left\{ {n \atop jl} \right\}\right]\,, \end{aligned} \tag{77}$$

es el tensor de Riemann–Christoffel.

En la actualidad, el problema de la equivalencia se formula de una manera más general como el problema de determinar cuándo dos formas cuadráticas se pueden transformar una en la otra. Este problema generalizado fue resuelto por É. Cartan (1923) y requiere la evaluación de las derivadas covariantes hasta orden décimo. La demostración fue simplificada por Karlhede [10] usando el formalismo de tétradas de manera tal que sólo es necesario evaluar derivadas hasta orden séptimo. Sin embargo, en varias situaciones comunes, las derivadas covariantes de primer y segundo orden son suficientes para dar una respuesta a la pregunta.

Las complicaciones que aparecen en el problema general desaparecen en el caso del problema de la equivalencia original. En este caso $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \eta$ y los términos que contienen derivadas de $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ desaparecen. Una de las ventajas de esta situación es que sólo debemos preocuparnos por la mitad de términos en comparación con la situación general descrita anteriormente. Además, en este caso, el problema de la equivalencia queda resuelto considerando derivadas sólo hasta el segundo orden. En este caso la ecuación (71) se reduce a

$$\bar{g}_{ab}(\mathbf{y}) = X^i{}_a\, X^j{}_b\, \eta_{ij}\,, \tag{78}$$

donde las componentes de η son constantes. Las derivadas de esta relación son

$$\partial_c \bar{g}_{ab} = \left(X^i{}_{ac}\, X^j{}_b + X^i{}_a\, X^j{}_{bc}\right)\, \eta_{ij}\,. \tag{79}$$

Por lo tanto, la relación (73) se reduce a

$$\overline{\left\{ {c \atop ab} \right\}}(\mathbf{y}) = \frac{\partial y^c}{\partial x^k}\,\frac{\partial^2 x^k}{\partial y^a \partial y^b}\,, \tag{80}$$

lo cual se conoce como la 'conexión natural'. Una derivada más de la relación (79) da

$$\partial_{dc}\bar{g}_{ab} = \left[X^i{}_{dca}\, X^j{}_b + X^i{}_a\, X^j{}_{dcb} + X^i{}_{ca}\, X^j{}_{db} + X^i{}_{da}\, X^j{}_{cb}\right]\, \eta_{ij}\,. \tag{81}$$

A partir de aquí se obtiene la relación

$$\bar{R}_{abcd}(\mathbf{y}) = 0\,. \tag{82}$$

Por lo tanto, la condición necesaria para que una forma cuadrática se pueda transformar en otra forma cuadrática con coeficientes constantes es que se anule el tensor de Riemann–Christoffel. Esta condición también es suficiente.

4.3. **Geometría riemanniana.** El punto de partida de la geometría riemanniana son las propiedades métricas del espacio, las cuales están caracterizadas por una forma cuadrática

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j\,. \tag{83}$$

La forma cuadrática (83) es matemáticamente equivalente a las formas cuadráticas consideradas en el problema de la equivalencia. Sin embargo, en la geometría riemanniana la relación (83) se interpreta como el 'elemento de línea' o distancia infinitesimal. Es esta interpretación la que diferencia la geometría riemanniana del problema puramente matemático de la caracterización de las formas cuadráticas. En este caso los coeficientes g_{ij} son las componentes del tensor métrico $\mathbf{g}$.

El determinante del tensor métrico está dado por

$$g = \frac{1}{d!}\, \epsilon^{i_1 \cdots i_d}\, \epsilon^{j_1 \cdots j_d}\, g_{i_1 j_1}\, \cdots\, g_{i_d j_d}\,, \tag{84}$$

donde ϵ es el símbolo de Levi–Civita definido en (39). Si $g \neq 0$, entonces existe un tensor contravariante $\mathbf{g}^{-1}$ con componentes g^{ij} definidas por

$$g^{ij} = \frac{1}{(d-1)!}\, \frac{1}{g}\, \epsilon^{i i_1 \cdots i_{d-1}}\, \epsilon^{j j_1 \cdots j_{d-1}}\, g_{i_1 j_1}\, \cdots\, g_{i_{d-1} j_{d-1}}\,, \tag{85}$$

que satisfacen

$$g^{ik}\, g_{jk} = \delta^i_j\,. \tag{86}$$

El tensor métrico, aparte de medir distancias, juega un rol similar al de la identidad multiplicativa en el álgebra matricial y también del producto matricial. De este modo se esperaría que las operaciones de multiplicación con el tensor métrico no se vieran afectadas por otro tipo de operaciones, en particular por la derivación (covariante). Para que esto sea así es necesario que se cumpla una relación de la forma

$$\nabla_k g_{ij} \equiv 0\,. \tag{87}$$

Para que se cumpla esta relación es necesario que la conexión tenga una forma particular, y esta forma es precisamente el símbolo de Christoffel definido anteriormente.

En el caso en que la conexión es de la forma particular de un símbolo de Christoffel varias de las fórmulas expuestas anteriormente adoptan formas particularmente simples e interesantes. Comenzemos observando que

$$\Gamma^j{}_{ij} = \frac{1}{g^{1/2}}\, \frac{\partial g^{1/2}}{\partial x^i}\,. \tag{88}$$

Por lo tanto, la ecuación (56) adopta la forma

$$\nabla_i t^i = \frac{1}{g^{1/2}} \frac{\partial (g^{1/2}\, t^i)}{\partial x^i}\,. \tag{89}$$

La segunda relación interesante se obtiene a partir de la ecuación (57). Contrayendo esta relación con g^{ij} se obtiene

$$\nabla^2 \phi = g^{ij}\, \nabla_i \nabla_j \phi = \frac{1}{g^{1/2}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(g^{1/2}\, g^{ij}\, \frac{\partial \phi}{\partial x^j} \right)\,. \tag{90}$$

Esta combinación de derivadas es el laplaciano usual. La expresión (90) es de gran ayuda para evaluar en forma explícita el laplaciano en distintos sistemas de coordenadas.

El símbolo de Christoffel es una conexión. Por lo tanto, se puede obtener un tensor de Riemann reemplazando la expresión particular del símbolo de Christoffel y se obtiene el tensor de Riemann–Christoffel (77). Se debe enfatizar la distinción entre un tensor de Riemann para una conexión genérica, y un tensor de Riemann–Christoffel en el cual la conexión es un símbolo de Christoffel. Además, dado que el símbolo de Christoffel es simétrico la torsión es cero. Por otra parte, a partir de (88) se tiene que Γ_i en (63) es de la forma $(\partial \ln(g^{1/2})/\partial x^i)$. Por lo tanto, el tensor de Riemann–Ricci también es cero.

5. **Conclusiones**

Siguiendo las propuestas de trabajos recientes, hemos mostrado que se debe considerar que la contribución más importante del *Commentatio* es al análisis tensorial más que a la geometría diferencial. Esto nos sirve de excusa para presentar un resumen del análisis tensorial y en una parte final estudiar el problema de la equivalencia del *Commentatio* en este nuevo lenguaje.

Por lo tanto, la supuesta relación entre el *Commentatio* y la geometría riemanniana es un ejemplo más de un mito histórico bien establecido a fuerza de repetición.

Un tratado matemático en el cual se hace un intento para responder la pregunta propuesta por la muy ilustre Academia de Paris:

Determinar el estado calorífico de un cuerpo sólido, homogéneo e indefinido, tal que un sistema de curvas que son isotermas para un instante dado, sigan siendo isotermas después de un tiempo cualquiera, de manera tal que la temperatura en un punto se pueda expresar como una función del tiempo y de otras dos variables independientes.

Et his principiis via sternitur ad majora.[6]

1

Consideraremos la pregunta propuesta por la Academia de una manera tal que primero responderemos una pregunta más general:

las propiedades de un cuerpo que determinan la conducción del calor y la distribución de calor dentro de éste de manera tal que existe un sistema de líneas que siguen siendo isotermas.

Entonces:

a partir de la solución general de este problema distinguiremos aquellos casos en los cuales las propiedades varían de aquellos casos en los cuales las propiedades permanecen constantes, es decir, los casos en los cuales el cuerpo es homogéneo.

Primera Parte

2

Para abordar la primera pregunta, debemos considerar la conducción del calor en cualquier cuerpo. Si u denota la temperatura en un punto (x_1, x_2, x_3) en un instante dado t, entonces la ecuación general que satisface u es de la forma:[7]

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_1}\left(a_{1,1}\,\frac{\partial u}{\partial x_1}+a_{1,2}\,\frac{\partial u}{\partial x_2}+a_{1,3}\,\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)\\
&+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(a_{2,1}\,\frac{\partial u}{\partial x_1}+a_{2,2}\,\frac{\partial u}{\partial x_2}+a_{2,3}\,\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)\\
&+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(a_{3,1}\,\frac{\partial u}{\partial x_1}+a_{3,2}\,\frac{\partial u}{\partial x_2}+a_{3,3}\,\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)=h\,\frac{\partial u}{\partial t}\,. \qquad \text{(I)}
\end{aligned}$$

En la ecuación (I), las cantidades a representan los coeficientes de conductividad, h el calor específico para el volumen total, es decir, el producto de la

[6] Y a partir de estos comienzos un camino se abre a cosas mayores.

[7] El lado derecho de esta ecuación es el laplaciano (90). Por lo tanto, se obtiene la forma familiar de la ecuación del calor, a saber, $\nabla^2 u = h\,(\partial u/\partial t)$.

densidad de calor específico y algunas funciones dadas de x que, por ejemplo, involucran x_1, x_2, x_3. Restringiremos nuestra investigación al caso en que la conductividad en direcciones opuestas es la misma, de manera tal que la relación entre las cantidades a es

$$a_{\iota,\iota'} = a_{\iota',\iota}\,.$$

Además, dado que el calor fluye desde las regiones más caliente hacia las más frías, la forma cuadrática

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,2} & a_{3,3} \\ a_{2,3} & a_{3,1} & a_{1,2} \end{pmatrix},$$

es positiva.

3

En la ecuación (I) introduzcamos, en lugar de las coordenadas rectangulares x_1, x_2, x_3, tres nuevas variables independientes cualesquiera s_1, s_2, s_3.

La nueva forma de la ecuación (I) se puede deducir debido a que es una condición necesaria y suficiente que si δu es una variación, no importa que tan infinitesimalmente pequeña de u, entonces la variación de la integral

$$\delta \int\int\int \sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'} \frac{\partial u}{\partial x_\iota} \frac{\partial u}{\partial x_{\iota'}} dx_1\, dx_2\, dx_3 + \int\int\int 2\, h \frac{\partial u}{\partial t} \delta u\, dx_1\, dx_2\, dx_3\,, \tag{A}$$

en el volumen del cuerpo sólo depende del valor de δu sobre la superficie. Cuando se introducen las nuevas variables, la expresión (A) se transforma en

$$\delta \int\int\int \sum_{\iota,\iota'} b_{\iota,\iota'} \frac{\partial u}{\partial s_\iota} \frac{\partial u}{\partial s_{\iota'}} ds_1\, ds_2\, ds_3 + \int\int\int 2\, k \frac{\partial u}{\partial t} \delta u\, ds_1\, ds_2\, ds_3\,, \tag{B}$$

donde, por brevedad,

$$\frac{\sum_{\iota,\iota'} \frac{\partial s_\mu}{\partial x_\iota} \frac{\partial s_\nu}{\partial x_{\iota'}}}{\sum \frac{\partial s_1}{\partial x_1} \frac{\partial s_2}{\partial x_2} \frac{\partial s_3}{\partial x_3}} = b_{\mu,\nu}\,,$$

$$\frac{h}{\sum \frac{\partial s_1}{\partial x_1} \frac{\partial s_2}{\partial x_2} \frac{\partial s_3}{\partial x_3}} = k\,.$$

Introduciendo las formas

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,2} & a_{3,3} \\ a_{2,3} & a_{3,1} & a_{1,2} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{2,2} & b_{3,3} \\ b_{2,3} & b_{3,1} & b_{1,2} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

cuyos determinantes llamamos A y B, y las formas adjuntas

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{3,3} \\ \alpha_{2,3} & \alpha_{3,1} & \alpha_{1,2} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$\begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{2,2} & \beta_{3,3} \\ \beta_{2,3} & \beta_{3,1} & \beta_{1,2} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

se encontrará que

$$A = B \sum \pm \frac{\partial s_1}{\partial x_1} \frac{\partial s_2}{\partial x_2} \frac{\partial s_3}{\partial x_3},$$

y

$$\beta_{\mu,\nu} = \sum_{\iota,\iota'} \alpha_{\iota,\iota'} \frac{\partial x_\iota}{\partial s_\mu} \frac{\partial x_{\iota'}}{\partial s_\nu},$$

y por lo tanto

$$\sum_{\iota,\iota'} \alpha_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, dx_{\iota'} = \sum_{\iota,\iota'} \beta_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'},$$

y

$$\frac{h}{A} = \frac{k}{B},$$

de donde se puede ver que la transformación de la ecuación (I) se puede reducir a la transformación de la expresión $\sum_{\iota,\iota'} \alpha_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, dx_{\iota'}$.

De esta manera podemos resolver nuestro problema general, en primer lugar determinando cuáles deben ser las funciones $b_{\iota,\iota'}$ y k de s_1, s_2, s_3, tal que u es independiente de alguna de estas tres variables, y en segundo lugar, una vez que se ha resuelto este problema, construyendo la expresión $\sum \beta_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'}$. Dados los valores para las cantidades $a_{\iota,\iota'}$ y h, entonces, para determinar si u puede ser una función del tiempo y de sólo otras dos variables, y en qué casos esto es así, es necesario encontrar cuándo $\sum \beta_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'}$ se puede transformar en una forma dada $\sum \alpha_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, dx_{\iota'}$; y veremos más adelante que esta pregunta se puede examinar usando un método similar al empleado por Gauss en la teoría de curvas sobre superficies.

4

En primer lugar, por lo tanto, determinemos las funciones $\beta_{\iota,\iota'}$ y k de s_1, s_2, s_3, tal que u es independiente de alguna de estas tres variables. Para simplificar la notación, denotemos las variables s_1, s_2, s_3, por α, β, γ, y la forma (2) por

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, si u no depende de γ, entonces la ecuación diferencial satisfecha por u es de la forma

$$a\,\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} + 2\,c'\,\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta} + b\,\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2} + e\,\frac{\partial u}{\partial\alpha} + f\,\frac{\partial u}{\partial\beta} - k\,\frac{\partial u}{\partial t} = 0\,, \tag{II}$$

donde

$$\begin{aligned}\frac{\partial a}{\partial\alpha} + \frac{\partial c'}{\partial\beta} + \frac{\partial b'}{\partial\gamma} &= e\,,\\ \frac{\partial b}{\partial\beta} + \frac{\partial c'}{\partial\alpha} + \frac{\partial a'}{\partial\gamma} &= f\,.\end{aligned}$$

Dando distintos valores a γ en la ecuación (II), se obtendrán diferentes ecuaciones para las seis derivadas de u con coeficientes que son independientes de γ. Pero si las m ecuaciones

$$F_1 = 0\,, F_2 = 0\,, \cdots\,, F_m = 0\,,$$

son independientes, es decir, todas las otras se pueden escribir en términos de éstas, entonces, para cualquier valor de γ, la ecuación $F = 0$ se sigue a partir de estas m ecuaciones, de donde se sigue que F debe ser de la forma

$$c_1\,F_1 + c_2\,F_2 + \cdots + c_m\,F_m\,,$$

expresión en la cual sólo las cantidades c dependen de γ.

Examinemos en forma más detallada los casos particulares $m = 1, 2, 3, 4$, y, al mismo tiempo, simplifiquemos las ecuaciones independientes de γ en función de las cuales se expresa la ecuación $F = 0$.

Primer caso: en el cual $m = 1$. Si $m = 1$, entonces los coeficientes en la ecuación (II) no pueden depender de γ. Siempre es posible reemplazar γ por una nueva variable $\int k\,d\gamma$, y operando de este modo hacer que $k = 1$ y que todos los coeficientes sean independientes de γ. Además, reemplazando α y β por nuevas variables adecuadas, se puede hacer que a y b se anulen. Esto sucederá si la expresión $b\,d\alpha^2 - 2\,c'\,d\alpha d\beta + a\,d\beta^2$ (que no puede ser el cuadrado de una expresión diferencial lineal si (2) es una forma positiva) es reducible a la forma $m\,d\alpha'\,d\beta'$ en la cual las nuevas variables α' y β' se toman como independientes.

Por lo tanto, en este caso, la ecuación diferencial (II) se reducirá a

$$2\,c'\,\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta} + e\,\frac{\partial u}{\partial\alpha} + f\,\frac{\partial u}{\partial\beta} = \frac{\partial u}{\partial t}\,,$$

y entonces, en la forma (2), a y b serán iguales a cero, a' y b' serán funciones lineales de γ, y c' será independiente de γ. En este caso, si la temperatura inicial es una función sólo de α y β, entonces la temperatura seguirá siendo independiente de γ. *Segundo caso: en el cual $m = 2$.* La ecuación (II) se puede escribir en función de dos ecuaciones independientes de γ y si $\partial u/\partial t$ se usa en una ecuación, no necesita aparecer en la otra. Por brevedad, la última ecuación se escribirá como

$$\Delta u = 0\,, \tag{1}$$

y la primera como

$$\Lambda\, u = \frac{\partial u}{\partial t}\,, \tag{2}$$

donde Δ y Λ son expresiones características que involucran ∂_α y ∂_β.

Es posible elegir variables independientes de manera tal que la ecuación (1) se pueda cambiar en una con Δ dado por

$$\begin{aligned}
\Delta &= \partial_\alpha\partial_\beta + e\,\partial_\alpha + f\,\partial_\beta\,,\\
\Delta &= \partial_\alpha^2 + e\,\partial_\alpha + f\,\partial_\beta\,,\\
\Delta &= \partial_\alpha\,,
\end{aligned}$$

en las cuales no se excluyen los valores $e = 0$ y $f = 0$.

Dado que a partir de (1) $\partial_t\Delta u = 0$, y a partir de (2) $\Delta\partial_t u = \Delta\Lambda u$, y $\partial_t\Delta u = \Delta\partial_t u$, se sigue que

$$\Delta\,\Lambda\, u = 0\,. \tag{3}$$

Se pueden distinguir dos casos dependiendo de si la ecuación (3) (caso (α)) se sigue de la ecuación (1), es decir,

$$\Delta\,\Lambda = \Theta\,\Delta\,,$$

donde Θ representa una nueva expresión característica, o (caso (β)) no se sigue de la ecuación (1) y resulta una nueva ecuación independiente de Δu.

Para examinar el caso (α), supongamos que

$$\Delta = \partial_\alpha\partial_\beta + e\,\partial_\alpha + f\,\partial_\beta\,.$$

Entonces usando la ecuación $\Delta u = 0$, $\Delta\Lambda u$ se puede reducir a una expresión que involucra sólo las derivadas con respecto a una u otra variable y en la cual todos los coeficientes son iguales a cero. Dado que el término que contiene $\partial_\alpha\partial_\beta$ se puede eliminar usando la ecuación $\Delta u = 0$, supongamos que

$$\Lambda = a\,\partial_\alpha^2 + b\,\partial_\beta^2 + c\,\partial_\alpha + d\,\partial_\beta\,,$$

y consideremos la expresión

$$\Delta\,\Lambda - \Lambda\,\Delta\,.$$

En esta expresión, dado que los coeficientes de ∂_α^3, ∂_β^3, se deben anular, entonces $\partial a/\partial\beta = 0$, $\partial b/\partial\alpha = 0$. Por lo tanto, si se excluyen los casos especiales $a = 0$, $b = 0$, entonces es posible cambiar las variables independientes para hacer $a = b = 1$. Por lo tanto, si los coeficientes de ∂_α^2, ∂_β^2, se hacen iguales a cero en la expresión reducida para $\Delta\Lambda - \Lambda\Delta$, entonces se encuentra que

$$\frac{\partial c}{\partial \beta} = 2\,\frac{\partial e}{\partial \alpha}\,,$$
$$\frac{\partial d}{\partial \alpha} = 2\,\frac{\partial f}{\partial \beta}\,,$$

a partir de lo cual se deduce que

$$\Delta = \partial_\alpha \partial_\beta + \frac{\partial m}{\partial \beta}\,\partial_\alpha + \frac{\partial n}{\partial \alpha}\,\partial_\beta\,,$$
$$\Lambda = \partial_\alpha^2 + \partial_\beta^2 + 2\,\frac{\partial m}{\partial \alpha}\,\partial_\alpha + 2\,\frac{\partial n}{\partial \beta}\,\partial_\beta\,,$$

donde m y n denotan funciones de α y β. Estas expresiones para Δ y Λ usadas en las dos ecuaciones diferenciales (1) y (2) deben ser suficientes para asegurar que se anulan los coeficientes de ∂_α y ∂_β, en la expresión reducida $\Delta\Lambda$. Usando un método similar para las formas alternativas de Λ, se pueden encontrar las expresiones más simples para Δ y Λ que satisfacen la condición

$$\Delta\,\Lambda = \Theta\,\Delta\,.$$

Pero no nos extenderemos en esta investigación que es más tediosa que difícil.

Este caso demuestra que si la temperatura inicial es alguna función de α y β que satisface la ecuación $\Delta u = 0$, entonces la temperatura siempre sigue siendo independiente de γ. A partir de las ecuaciones

$$\Delta u = 0\,,$$
$$\Lambda u = \frac{\partial u}{\partial t}\,,$$

se sigue que

$$0 = \Theta\,\Delta u = \Delta\,\Lambda\,u = \Delta\,\partial_t u = \frac{\partial \Delta u}{\partial t}\,.$$

y por lo tanto, si inicialmente u es positivo y su variación está dada por la segunda ecuación $\Lambda u = \partial u/\partial t$, entonces la ecuación $\Delta u = 0$ es la única que necesita ser considerada. Por lo tanto, u satisface la ley de la conducción del calor, es decir, la ecuación $F = 0$.

5

Queda el otro caso especial (β), en el cual $\Delta\Lambda u = 0$ es independiente de $\Delta u = 0$. Para que podamos también incluir los casos $m = 3$ y $m = 4$, consideremos la hipótesis más general de que, además de la ecuación $\Delta u = 0$, existe una ecuación diferencial lineal $\Theta u = 0$, que no contiene $\partial u/\partial t$ y es independiente de $\Delta u = 0$.

Si Δ es de la forma $\partial_\alpha\partial_\beta + e\,\partial_\alpha + f\,\partial_\beta$, entonces, usando la ecuación $\Delta u = 0$, la derivada con respecto a ambas variables se puede eliminar de la expresión Θ.

Se deben distinguir dos casos.

Si, a partir de la expresión Θ, se eliminan simultáneamente todas las derivadas con respecto a una u otra variable, por ejemplo, β, entonces se obtiene una ecuación diferencial que contiene sólo derivadas con respecto a α

$$\sum_{\nu} a_\nu \frac{\partial^\nu u}{\partial \alpha^\nu} = 0 \,, \tag{1}$$

o se obtiene una ecuación diferencial que contiene sólo derivadas con respecto a t

$$\sum_{\nu} a_\nu \frac{\partial^\nu u}{\partial t^\nu} = 0 \,. \tag{2}$$

Dado que en este caso, las expresiones $\Lambda u, \Lambda^2 u, \Lambda^3 u, \cdots$, que son iguales a las derivadas de u con respecto a t, se pueden transformar, usando las ecuaciones $\Delta u = 0$, $\Theta u = 0$, en expresiones que contienen sólo derivadas con respecto a una u otra variable y que no son mayores que Θu. Dado que el número de derivadas es finito, es claro que la eliminación produce una ecuación de la forma (2). Los coeficientes a_ν en ambas ecuaciones son funciones de α y β.

Es pertinente observar que estas dos ecuaciones son siempre positivas, aun si Δ no es de la forma $\partial_\alpha \partial_\beta + e\,\partial_\alpha + f\,\partial_\beta$. El caso especial en el cual $\Delta = \partial_\alpha^2 + e\,\partial_\alpha + f\,\partial_\beta$ se puede considerar bajo cualquiera de los otros casos dado que, usando la ecuación $\Delta u = 0$, todas las derivadas con respecto a β se pueden eliminar usando Θu y Λu a la vez, y por lo tanto se obtiene una ecuación de alguna de estas formas. El caso en el cual $f = 0$, como aquel en el cual $\Delta = \partial_\alpha$, se puede considerar bajo el primer caso.

Examinaremos el segundo caso en forma más detallada.

La solución general de la ecuación

$$\sum_{\nu} a_\nu \frac{\partial^\nu u}{\partial t^\nu} = 0 \,,$$

consiste de términos de la forma $f(t)\, e^{\lambda t}$, donde $f(t)$ es una función entera de t, y λ es independiente de t, y se ve que cada una de estas funciones debe satisfacer la ecuación (I). Ahora demostraremos que λ no puede ser una función de x_1, x_2, x_3.

Sea $k\, t^n$ el término de mayor orden en la función $f(t)$ y distingamos dos casos.

1. Cuando λ es real, o de la forma $\mu + i\,\nu$, y μ, ν, son funciones de una variable real α de x_1, x_2, x_3, entonces, reemplazando $u = f(t)\, e^{\lambda t}$ en el lado izquierdo de la ecuación (I), el coeficiente de $t^{n+2}\, e^{\lambda t}$ será

$$k \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} \right)^2 \sum_{\iota, \iota'} \frac{\partial \alpha}{\partial x_\iota} \frac{\partial \alpha}{\partial x_{\iota'}} \,.$$

Pero esta cantidad no puede desaparecer a menos que

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} = \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} = \frac{\partial \alpha}{\partial x_3} = 0\,,$$

es decir, a menos que α sea una constante, dado que, como se mostró anteriormente, la forma

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,2} & a_{3,3} \\ a_{2,3} & a_{3,1} & a_{1,2} \end{pmatrix}$$

es positiva.

2. Cuando λ es de la forma $\mu + i\,\nu$, y μ, ν, son variables independientes de x_1, x_2, x_3, entonces se pueden usar las cantidades $\mu + i\,\nu$ y $\mu - i\,\nu$ en vez de las variables independientes α y β, y u consistirá del término complejo conjugado $\varphi(t)\, e^{\beta t}$ como también de $f(t)\, e^{\alpha t}$. Pero si

$$\Delta u = a\,\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + b\,\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + c\,\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + e\,\frac{\partial u}{\partial \alpha} + f\,\frac{\partial u}{\partial \beta}\,,$$

entonces, reemplazando $u = f(t)\, e^{\alpha t}$ en la ecuación $\Delta u = 0$ y colocando el coeficiente de $t^{n+2}\, e^{\alpha t}$ igual a cero, se obtiene $a = 0$ y además $c = 0$ por sustitución en $u = \varphi(t)\, e^{\beta t}$. De donde, usando $\Delta u = 0$, la ecuación $\Lambda u = \partial u / \partial t$ se puede transformar de modo tal que contenga sólo derivadas con respecto a una u otra variable. Pero reemplazando alguna de las expresiones

$$u = f(t)\, e^{\alpha t}\,,$$
$$u = \varphi(t)\, e^{\beta t}\,,$$

se encuentra que el coeficiente de la suma de estas derivadas es igual a 0, y por lo tanto las derivadas en la ecuación $\Lambda u = \partial u / \partial t$ deben todos desaparecer también, como ha sido propuesto, cuando u, de acuerdo con nuestra suposición, no es constante. Por lo tanto, en este segundo caso, la función u consiste de un número finito de términos de la forma $f(t)\, e^{\lambda t}$, donde λ es constante y $f(t)$ es una función entera de t.

En el primer caso, dado que la ecuación es de la forma

$$\sum_{\nu} a_\nu \,\frac{\partial^\nu u}{\partial \alpha^\nu} = 0\,, \tag{1}$$

la función u será de la forma

$$u = \sum_{\nu} q_\nu\, p_\nu\,,$$

donde $p_1, p_2, \cdots$, denotan soluciones particulares de la ecuación (1), y $q_1, q_2, \cdots$, denotan constantes arbitrarias, es decir, funciones sólo de β y t. Pero si esta expresión se reemplaza en la ecuación

$$\Lambda\, u = \frac{\partial u}{\partial t}\,,$$

entonces se obtendrá una ecuación de la forma

$$\sum P\,Q = 0\,,$$

donde las cantidades Q son coeficientes diferenciales de q y por lo tanto funciones sólo de β y t, y las cantidades P son funciones sólo de α y β. Pero hemos visto anteriormente que si la ecuación consiste de n términos, entonces existen μ ecuaciones lineales que involucran a las funciones Q, y $n-\mu$ ecuaciones que involucran a las funciones P en las cuales los coeficientes son funciones sólo de β, donde μ denota cualquier número $0, 1, 2, \cdots, n$. Por lo tanto, se obtendrán expresiones para $\partial q/\partial t$ en función de las derivadas de q con respecto a β pero no con respecto a α.

Examinemos ahora ejemplos individuales de nuestro problema relacionados con este caso.

Cuando $m = 2$ y Δ es de la forma $\partial_\alpha\partial_\beta + e\,\partial_\alpha + f\,\partial_\beta$, y si la ecuación resultante $\Delta\Lambda u = 0$ es independiente de las derivadas con respecto a β, entonces tendrá la forma

$$\frac{\partial^3 u}{\partial\alpha^3} + r\,\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} + s\,\frac{\partial u}{\partial\alpha} = 0\,.$$

De donde u será de la forma

$$a\,p + b\,q + c\,,$$

donde a, b, c, denotan funciones sólo de β y t, y p y q denotan funciones sólo de α y β. Ahora se puede introducir la variable independiente α en lugar de q, lo cual dará

$$u = a\,p + b\,\alpha + c\,,$$

donde p es ahora la única función de ambas variables α y β. Reemplazando esta expresión en las ecuaciones

$$\Delta u = 0\,,$$
$$\Lambda u = \frac{\partial u}{\partial t}\,,$$

se pueden determinar los coeficientes.

Todavía no hemos considerado el caso en el cual una de las ecuaciones en las cuales se separó la ecuación $F = 0$ tenga la forma (1) y, por lo tanto, la forma

$$r\,\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} + s\,\frac{\partial u}{\partial\alpha} = 0\,.$$

Entonces, será el caso en que $u = a\,p + b$ donde a y b denotan funciones sólo de β y t, y p una función sólo de α y β. Si p se reemplaza por la variable independiente α entonces se sigue que

$$u = a\,\alpha + b\,,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} = 0\,.$$

Por lo tanto, si $m = 2$, es decir, en el caso en el cual la ecuación $F = 0$ se separa en dos ecuaciones

$$\Delta u = 0\,,$$
$$\Lambda u = \frac{\partial u}{\partial t}\,,$$

entonces se encuentra que existen tres posibilidades: $\Delta\Lambda = \Theta\Lambda$, o que la función u consiste de un número finito de términos de la forma $f(t)\,e^{\lambda t}$, donde λ es una constante y $f(t)$ una función entera de t, o que toma la forma

$$\varphi(\beta,\, t)\,\chi(\alpha,\, \beta) + \alpha\,\varphi_1(\beta,\, t) + \beta\,\varphi_2(\beta,\, t)\,.$$

Si $m = 3$, entonces la función u consiste de un número finito de términos de la forma $f(t)\,e^{\lambda t}$, o es de la forma

$$\varphi(\beta,\, t)\,\alpha + \varphi_1(\beta,\, t)\,.$$

Y así el caso $m = 4$ se puede resolver sin esfuerzo adicional.

Si, junto con la ecuación $\Lambda u = \partial u/\partial t$, se consideran otras tres ecuaciones que involucren

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}\,,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}\,,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}\,,\quad \frac{\partial u}{\partial\alpha}\,,\quad \frac{\partial u}{\partial\beta}\,,$$

entonces se obtiene una ecuación de la forma

$$r\,\frac{\partial u}{\partial\alpha} + s\,\frac{\partial u}{\partial\beta} = 0\,,$$

en cuyo caso será posible elegir las variables independientes de modo tal que u sea una función sólo de una de ellas. Si las tres ecuaciones involucran

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}\,,\ \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}\,,\ \frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}\,,$$

entonces $\Lambda u, \Lambda^2 u, \Lambda^3 u$, se pueden expresar en función de $\partial u/\partial\alpha$, $\partial u/\partial\beta$, y entonces se obtiene una ecuación de la forma

$$a\,\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + b\,\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta} + c\,\frac{\partial u}{\partial t} = 0\,,$$

de donde u será

$$p\,e^{\lambda t} + q\,e^{\mu t} + r\,,$$

o

$$(p + q\,t)\,e^{\lambda t} + r\,,$$

donde hemos mostrado anteriormente que λ y μ son constantes.

Reeemplazando p en lugar de la variable independiente α y reemplazando en la ecuación $\Lambda u = \partial u/\partial t$, se encuentra que q no puede ser una función de α, aun cuando λ y μ no sean iguales. Por lo tanto, p y q se pueden usar como variables independientes. Además, a partir de la ecuación $\Lambda u = \partial u/\partial t$, se deduce que $r =$ constante.

Por lo tanto, en este caso, u es una función de t y de una de las otras variables, o toma una de las formas

$$\alpha\, e^{\lambda t} + \beta\, e^{\mu t} + \text{constante}\,,$$
$$(\alpha + \beta\, t)\, e^{\lambda t} + \text{constante}\,,$$

donde no se excluye el valor $\mu = 0$.

Una vez que se han encontrado las varias formas para la función u, se puede encontrar las ecuaciones $F_\nu = 0$; sin embargo, por brevedad no las escribiremos en detalle. Por lo tanto, en cada caso particular, se puede determinar la forma

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{2,2} & b_{3,3} \\ b_{2,3} & b_{3,1} & b_{1,2} \end{pmatrix}$$

y la forma adjunta

$$\begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{2,2} & \beta_{3,3} \\ \beta_{2,3} & \beta_{3,1} & \beta_{1,2} \end{pmatrix}\,.$$

Si en las expresiones $\sum \beta_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'}$, en lugar de las cantidades s_1, s_2, s_3, se reemplaza cualquier función de x_1, x_2, x_3, entonces claramente se obtendrán todos los casos en los cuales u es una función del tiempo y de otras dos variables. Por lo tanto la primera pregunta está resuelta.

Ahora nos queda por considerar cuándo la expresión $\sum \beta_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'}$ se puede transformar en una forma dada $\sum \alpha_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, dx_{\iota'}$.

Segunda Parte

Con respecto a la transformación de la expresión $\sum_{\iota,\iota'} \beta_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'}$ en una forma dada $\sum_{\iota,\iota'} a_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, dx_{\iota'}$:

En el caso en el cual la pregunta de la muy Ilustre Academia se restringe a cuerpos homogéneos en los cuales los coeficientes de conductividad son constantes, consideremos las condiciones bajo las cuales la expresión $\sum b_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'}$ se puede transformar, colocando las cantidades s iguales a funciones de x, en la forma $\sum a_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, dx_{\iota'}$ con coeficientes constantes $a_{\iota,\iota'}$. Una vez hecho esto, consideremos entonces brevemente la transformación a cualquier otra forma.

La expresión $\sum a_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, dx_{\iota'}$ siempre se puede transformar en $\sum dx_\iota^2$ si es una forma positiva en los dx. Así, si $\sum b_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'}$ se puede transformar en $\sum a_{\iota,\iota'}\, dx_\iota\, dx_{\iota'}$, entonces también se puede transformar en $\sum dx_i^2$ y viceversa. Por lo tanto, determinemos cuándo se puede transformar en $\sum dx_i^2$.

Sea $\sum \pm b_{1,1}\, b_{2,2}\, \cdots\, b_{n,n} = B$ el determinante, y sea $\beta_{\iota,\iota'}$ el cofactor; por lo tanto, $\sum \beta_{\iota,\iota'}\, b_{\iota,\iota'} = B$ y $\sum \beta_{\iota,\iota'}\, b_{\iota,\iota''} = 0$ para $\iota' \neq \iota''$.

Si $\sum b_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'} = \sum dx_\iota^2$ para cualquier valor de los dx, entonces, reemplazando $d+\delta$ por d se puede también mostrar que $\sum b_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, \delta s_{\iota'} = \sum dx_\iota\, \delta x_\iota$ para todos los valores de dx y δx. Por lo tanto, si todas las cantidades ds_ι se expresan en función de dx_ι y las cantidades δx_ι en función de δs_ι, entonces se sigue que

$$\frac{\partial x_{\nu'}}{\partial s_\nu} = \sum_\iota b_{\nu,\iota} \frac{\partial s_\nu}{\partial x_{\nu'}}\,, \tag{1}$$

y a partir de esto

$$\frac{\partial s_\iota}{\partial x_{\nu'}} = \sum_\iota \frac{\beta_{\nu,\iota}}{B} \frac{\partial x_{\nu'}}{\partial s_\nu}\,. \tag{2}$$

Dado que

$$\sum_\nu \frac{\partial s_\iota}{\partial x_\nu} \frac{\partial x_\nu}{\partial s_\iota} = 1\,,$$

y

$$\sum_\nu \frac{\partial s_\iota}{\partial x_\nu} \frac{\partial x_\nu}{\partial s_{\iota'}} = 0\,,$$

para $\iota \neq \iota'$, y usando (1) y (2), se puede además establecer que

$$\sum_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial s_\iota} \frac{\partial x_\nu}{\partial s_{\iota'}} = b_{\iota,\iota'}\,, \tag{3}$$

y

$$\sum_\nu \frac{\partial s_\iota}{\partial x_\nu} \frac{\partial s_{\iota'}}{\partial x_\nu} = \frac{\beta_{\iota,\iota'}}{B}\,, \tag{4}$$

y diferenciando

$$\sum_\nu \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial s_\iota \partial s_{\iota''}} \frac{\partial x_\nu}{\partial s_{\iota'}} + \sum_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial s_\iota} \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial s_{\iota'} \partial s_{\iota''}} = \frac{\partial b_{\iota,\iota'}}{\partial s_{\iota''}}\,.$$

Una vez que se han encontrado expresiones para cada uno de los

$$\frac{\partial b_{\iota,\iota'}}{\partial s_{\iota''}}\,,\ \frac{\partial b_{\iota',\iota''}}{\partial s_\iota}\,,\ \frac{\partial b_{\iota'',\iota}}{\partial s_{\iota'}}\,,$$

se obtiene

$$2\sum_\nu \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial s_{\iota'} \partial s_{\iota''}} \frac{\partial x_\nu}{\partial s_\iota} = \frac{\partial b_{\iota,\iota'}}{\partial s_{\iota''}} + \frac{\partial b_{\iota,\iota''}}{\partial s_{\iota'}} - \frac{\partial b_{\iota',\iota''}}{\partial s_\iota}\,, \tag{5}$$

y si el lado derecho de (5) se denota por $p_{\iota,\iota',\iota''}$, entonces se encuentra que[8]

$$2\,\frac{\partial^2 x_\nu}{\partial s_{\iota'} \partial s_{\iota''}} = \sum_\nu \frac{\partial s_\iota}{\partial x_\nu}\, p_{\iota,\iota',\iota''}\,. \tag{6}$$

Diferenciando las cantidades $p_{\iota,\iota',\iota''}$ se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_{\iota,\iota',\iota''}}{\partial s_{\iota'''}} - \frac{\partial p_{\iota,\iota',\iota'''}}{\partial s_{\iota''}} \quad = \quad & 2\sum_\nu \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial s_{\iota'} \partial s_{\iota''}} \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial s_\iota \partial s_{\iota'''}} \\ & -2\sum_\nu \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial s_{\iota'} \partial s_{\iota'''}} \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial s_\iota \partial s_{\iota''}}\,.\end{aligned}$$

[8] Compárese con (80).

Finalmente, reemplazando los valores encontrados en (6) y (4), se encuentra que[9]

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 b_{\iota,\iota''}}{\partial s_{\iota'}\partial s_{\iota'''}}+\frac{\partial^2 b_{\iota',\iota'''}}{\partial s_{\iota'}\partial s_{\iota''}}-\frac{\partial^2 b_{\iota,\iota'''}}{\partial s_{\iota'}\partial s_{\iota''}}-\frac{\partial^2 b_{\iota',\iota''}}{\partial s_{\iota}\partial s_{\iota'''}}\\ &+\frac{1}{2}\sum_{\nu,\nu'}\left(p_{\nu,\iota',\iota'''}\,p_{\nu',\iota,\iota''}-p_{\nu,\iota,\iota'''}\,p_{\nu',\iota',\iota''}\right)\frac{\beta_{\nu,\nu'}}{B}=0\,. \qquad \text{(I)}\end{aligned}$$

Por lo tanto, si las funciones b satisfacen la ecuación (I), entonces $\sum b_{\iota,\iota'}\,ds_\iota\,ds_{\iota'}$ se puede transformar en la forma $\sum dx_\iota^2$. Denotemos el lado izquierdo de las ecuaciones (I) por

$$(\iota\iota',\,\iota''\iota''')\,.$$

Para que se pueda examinar en forma más detallada la naturaleza de las ecuaciones (I), consideremos la expresión

$$\delta\,\delta\sum b_{\iota,\iota'}\,ds_\iota\,ds_{\iota'}-2\,d\,\delta\sum b_{\iota,\iota'}\,ds_\iota\,\delta s_{\iota'}+d\,d\sum b_{\iota,\iota'}\,\delta s_\iota\,\delta s_{\iota'}\,,$$

que involucra las variaciones de segundo orden d^2, $d\,\delta$, δ^2, que satisface

$$\begin{aligned}\delta'\sum b_{\iota,\iota'}\,ds_\iota\,ds_{\iota'}-\delta\sum b_{\iota,\iota'}\,ds_\iota\,\delta' s_{\iota'}-d\sum b_{\iota,\iota'}\,\delta s_\iota\,\delta' s_{\iota'}&=0\,,\\ \delta'\sum b_{\iota,\iota'}\,ds_\iota\,ds_{\iota'}-2\,d\sum b_{\iota,\iota'}\,ds_\iota\,\delta' s_{\iota'}&=0\,,\\ \delta'\sum b_{\iota,\iota'}\,\delta s_\iota\,\delta' s_{\iota'}-2\,\delta\sum b_{\iota,\iota'}\,\delta s_\iota\,\delta' s_{\iota'}&=0\,,\end{aligned}$$

donde δ' denota cualquier variación. Con estas condiciones la expresión anterior se transforma en

$$\sum(\iota\iota',\,\iota''\iota''')\,(ds_\iota\,\delta s_{\iota'}-ds_{\iota'}\,\delta s_\iota)\,(ds_{\iota''}\,\delta s_{\iota'''}-ds_{\iota'''}\,\delta s_{\iota''})\,. \qquad \text{(II)}$$

Una vez que se ha obtenido la expresión en esta forma, es evidente que la forma de la expresión no cambiará aun cuando $\sum b_{\iota,\iota'}\,ds_\iota\,ds_{\iota'}$ se transforme cambiando las variables independientes. Pero si las cantidades b son constantes, entonces todos los coeficientes en la expresión (II) resultan ser iguales a cero. Por lo tanto, si $\sum b_{\iota,\iota'}\,ds_\iota\,ds_{\iota'}$ se puede transformar en una expresión similar con coeficientes constantes, entonces la expresión (II) se debe anular en forma idéntica.

Es claro que si la expresión (II) no se anula, entonces la expresión

$$\frac{\frac{1}{2}\sum(\iota\iota',\iota''\iota''')(ds_\iota\delta s_{\iota'}-ds_{\iota'}\delta s_\iota)(ds_{\iota''}\delta s_{\iota'''}-ds_{\iota'''}\delta s_{\iota''})}{\sum b_{\iota,\iota'}ds_\iota ds_{\iota'}\sum b_{\iota,\iota'}\delta s_\iota\delta s_{\iota'}-(\sum b_{\iota,\iota'}ds_\iota\delta s_{\iota'})^2}\,, \qquad \text{(III)}$$

no cambia, aun cuando se cambien las variables independientes, y que además no cambia si se reemplazan expresiones lineales independientes cualesquiera $\alpha\,ds_\iota+\beta\,\delta s_\iota$, $\gamma\,ds_\iota+\delta\,\delta s_\iota$ en lugar de ds_ι y δs_ι. Sin embargo, los valores máximos y mínimos de la expresión (III) que involucran ds_ι, δs_ι no dependen de la forma de $\sum b_{\iota,\iota'}\,ds_\iota\,ds_{\iota'}$ ni de los valores de ds_ι, δs_ι. Por lo tanto, los

[9] Compárese con (82) y (77).

valores máximo y mínimo se pueden usar para determinar si las dos formas se pueden transformar una en la otra.

Estas investigaciones se pueden ilustrar a través de un ejemplo geométrico el cual, aunque poco usual, será una adición útil.

La expresión $\sqrt{\sum b_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'}}$ se puede considerar como un elemento de línea en un espacio más general de n dimensiones que se extiende más allá de los límites de nuestra intuición. Pero si en este espacio se dibujan todas las posibles líneas más cortas[10] desde el punto $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ con variaciones de primer orden de s dadas por $\alpha\, ds_1 + \beta\, \delta s_1$; $\alpha\, ds_2 + \beta\, \delta s_2$; $\cdots$; $\alpha\, ds_n + \beta\, \delta s_n$, donde α y β denotan cantidades cualesquiera, entonces estas líneas formarán una superficie que se puede visualizar en el espacio de nuestra intuición común. Por lo tanto, la expresión (III) será una medida de la curvatura de esta superficie en el punto $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$.

En el caso específico de $n = 3$, la expresión (II) involucra términos de segundo orden de la forma

$$ds_1\, \delta s_2 - ds_2\, \delta s_1\,,\; ds_2\, \delta s_3 - ds_3\, \delta s_2\,,\; ds_3\, \delta s_1 - ds_1\, \delta s_3\,,$$

a partir de lo cual se obtienen seis ecuaciones que deben satisfacer las funciones b para que la forma $\sum b_{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'}$ se pueda transformar en una con coeficientes constantes. Tampoco es difícil establecer, usando métodos bien conocidos, que estas seis condiciones son suficientes. Sin embargo, se debe observar que sólo tres son independientes.

Para finalmente responder la pregunta propuesta por la muy Ilustre Academia, debemos reemplazar en estas seis ecuaciones expresiones para las funciones b encontradas a través del método desarrollado anteriormente. A través de este método, se encontrarán todos los casos en los cuales la temperatura u en cuerpos homogéneos, es una función del tiempo y de otras dos variables.

La falta de tiempo no nos permite presentar estos cálculos en su totalidad. Por lo tanto, debemos darnos por satisfechos enumerarando soluciones particulares de la pregunta habiendo ya desarrollado el método a ser usado.

Por brevedad, miremos sólo el caso más simple en el cual la temperatura u varía de acuerdo con la regla

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = a\, a\, \frac{\partial u}{\partial t}\,, \tag{I}$$

y a la cual hemos mostrado que se pueden reducir los restantes casos: el caso $m = 1$ se puede resolver haciendo u constante sobre líneas rectas paralelas o sobre espirales circulares, y si se elijen coordenadas rectangulares

[10] *lineae brevissimae* en el original; conceptualmente la traducción más adecuada sería 'geodésicas'. Sin embargo, el uso de la palabra 'geodésica' para denotar la línea más corta se adoptó sólo en 1883.

$z, r\cos\varphi, r\sin\varphi$, en forma apropiada, entonces $\alpha = r$ y $\beta = z + K\,\varphi$, donde K es una constante.

El caso $m = 2$ se puede resolver si $u = f(\alpha) + \varphi(\beta)$; el caso $m = 3$ se puede resolver si $u = \alpha\, e^{\lambda t} + f(\beta)$, donde λ denota una constante real; el caso $m = 4$ se puede resolver, como hemos visto anteriormente, si $u = \alpha\, e^{\lambda t} + \beta\, e^{\mu t} + K$, o $u = (\alpha + \beta\, t)\, e^{\lambda t} + K$, o $u = f(\alpha)$.

Para saber más acerca de la forma de la función u, necesitamos sólo observar que la temperatura u, si no es de la forma $\alpha\, e^{\lambda t}$, entonces sólo puede ser una función del tiempo y de otra variable cuando es constante sobre planos paralelos, o sobres cilindros coaxiales, o sobre esferas concéntricas. Si u es de la forma $\alpha\, e^{\lambda t}$, entonces, a partir de la ecuación diferencial (I), se sigue que

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial x_3^2} = \lambda\, a\, a\, \alpha\,,$$

y por lo tanto, reemplazando los valores de u en la ecuación diferencial (I) en el cuarto caso. Si se observa que, en este caso, $\alpha\, e^{\lambda t}$ y $\beta\, e^{\mu t}$ pueden ser cantidades complejas conjugadas una de la otra, entonces es posible determinar las funciones α y β.

* * *

Bibliografía

[1] P. L. BUTZER, *An outline of the life and work of E. B. Christoffel (1829–1900)*, Hist. Math. **8**, 243 (1981).

[2] É. CARTAN, *La géométrie des espaces de Riemann*, (Gauthier– Villars, Paris, 1926).

[3] E. B. CHRISTOFFEL, *Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades*, J. reine ang. Math. **70**, 46 (1869).

[4] E. B. CHRISTOFFEL, *Über ein die Transformation homogener Differentialausdrücke zweiten Grades betreffendes Theorem*, J. reine ang. Math. **70**, 241 (1869).

[5] J. EHLERS, *Christoffel's work on the equivalence problem for Riemann spaces and its importance for modern field theories of physics*, in *E. B. Christoffel: The influence of his work on mathematics and the physical sciences*, ed. P. L. Butzer and F. Feher (Birkhäuser, Basel, 1981).

[6] A. EINSTEIN, *Zur allgemeinen Relativitätstheorie*, Sitzunsber. Preuss. Akad. Wiss. **44**, 2, 778 (1915).

[7] R. FARWELL AND C. KNEE, *The missing link: Riemann's "Commentatio," differential geometry and tensor analysis*, Hist. Math. **17**, 223 (1990).

[8] C. F. GAUSS, *Disquititiones generales circa superficies curvas*, Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores **6**, 99 (1827). Reimpreso en [9]

[9] C. F. GAUSS, Werke (Königliche Gesellschaft der Wissenschaften Göttingen, Göttingen, 1863–1933).

[10] A. KARLHEDE, *A review of the geometrical equivalence of metrics in general relativity*, Gen. Rel. Grav. **12**, 693 (1980).

[11] C. N. HASKINS, *On the invariants of quadratic differential forms*, Trans. Am. Math. Soc. **3**, 71 (1902).

[12] T. LEVI–CIVITA, *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e consequente specificazione geometrica della curvatura Riemanniana*, Rend. Palermo **42**, 173 (1917).

[13] T. LEVI–CIVITA, *Opere Mathematiche* (Zanichelli, Bologna, 1954).

[14] R. LIPSCHITZ, *Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Funktionen von n Differentialen*, J. reine angew. Math. **70**, 71 (1869).

[15] J. MUÑOZ MASQUÉ AND A. VALDÉS MORALES, *The number of functionally independent invariants of a pseudo–Riemannian metric*, J. Phys. A: Math. Gen. **27**, 7843 (1994).

[16] J. MUÑOZ MASQUÉ AND A. VALDÉS MORALES, *A report on functorial connections and differential invariants*, Rend. Mat. Roma **17**, 549 (1997).

[17] R. J. NORIEGA, *Conexiones concomitantes de objetos geométricos*, Math. Notae **26**, 51 (1977).

[18] *The Oxford Companion to the English Language*, ed. by T. McArthur (Oxford University Press, Oxford, 1992).

[19] G. RICCI AND T. LEVI–CIVITA, *Méthodes du calcul différentiel absolu et leurs applications*, Math. Ann. **54**, 125 (1900). Reimpreso en [13].

[20] B. RIEMANN, *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (1868). Esta *Habilitationsvortrag* fue presentada el 10 de Junio de 1854 en la Facultad de Filosofía de Göttingen. Fue publicada en:

- *Abhandlungen der Königlichen Geselschaft der Wissenschaften zu Göttingen* **13**, 133 (1868).

  A este trabajo generalmente se le asigna esta última fecha para no crear confusión con respecto a la tardía influencia del trabajo de Riemann sobre la geometría del siglo XIX. Esta consideración es importante como puede colegirse del texto principal. Este trabajo ha sido reimpreso en [29]. Existen varias traducciones al inglés que se pueden encontrar en:

- W. K. Clifford, *Nature* **7**, 14–17, 36, 37, 183–184 (1873).

Esta traducción fue publicada en forma completa en:
- W. K. Clifford, *Mathematical Papers* (MacMillan, London, 1882).
- H. S. White, in *A Source Book of Mathematics* (McGraw–Hill, New York, 1929).

Otra traducción al inglés se pueden encontrar en [31].
Traducciones al español se pueden encontrar en [36] y [33].

[21] B. Riemann, *Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quaestioni ab Ill.ma Academia Parisiense propositae: "Trouver quel doit être l'état calorifique d'un corps solide homogène indéfini pour qu'un système de courbes isothermes, à un instant donné, restent isothermes après un temps quelconque, de telle sorte que la température d'un point puisse s'exprimer en fonction du temps et de deux autres variables indépendantes."* (1876).
Publicado sólo en 1876 en [29].

[22] B. Riemann, *Bernhard Riemann's Gesammelte mathematische Werke und wissentschaftlicher Nachlass*, H. Weber y R. Dedekind (Teubner, Lepizig, 1876).
La segunda edición incluye un suplemento preparado por M. Noether y W. Wirtinger (1892), la cual ha sido reimpresa por Dover en 1902 y 1953.

[23] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry* (Publish or Perish, Boston, 1970).
La traducción de la *Habilitationsvortrag* se encuentra en el volumen 2, capítulo 4, sección A.
La traducción parcial del *Commentatio* se encuentra en el volumen 2, capítulo 4, sección C.

[24] B. Riemann, *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (1868).
Esta *Habilitationsvortrag* fue presentada el 10 de Junio de 1854 en la Facultad de Filosofía de Göttingen. Fue publicada en:
- *Abhandlungen der Königlichen Geselschaft der Wissenschaften zu Göttingen* **13**, 133 (1868).

A este trabajo generalmente se le asigna esta última fecha para no crear confusión con respecto a la tardía influencia del trabajo de Riemann sobre la geometría del siglo XIX. Esta consideración es importante como puede colegirse del texto principal. Este trabajo ha sido reimpreso en [29]. Existen varias traducciones al inglés que se pueden encontrar en:
- W. K. Clifford, *Nature* **7**, 14–17, 36, 37, 183–184 (1873).

Esta traducción fue publicada en forma completa en:
- W. K. Clifford, *Mathematical Papers* (MacMillan, London, 1882).
- H. S. White, in *A Source Book of Mathematics* (McGraw–Hill, New York, 1929).

Otra traducción al inglés se pueden encontrar en [31].
Traducciones al español se pueden encontrar en [36] y [33].

[25] B. Riemann, *Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quaestioni ab Ill.ma Academia Parisiense propositae: "Trouver quel doit être l'état calorifique d'un corps solide homogène indéfini pour qu'un système de courbes isothermes, à un instant donné, restent isothermes après un temps quelconque, de telle sorte que la température d'un point puisse s'exprimer en fonction du temps et de deux autres variables indépendantes."* (1876).
Publicado sólo en 1876 en [29].

[26] B. Riemann, *Bernhard Riemann's Gesammelte mathematische Werke und wissentschaftlicher Nachlass*, H. Weber y R. Dedekind (Teubner, Lepizig, 1876).
La segunda edición incluye un suplemento preparado por M. Noether y W. Wirtinger (1892), la cual ha sido reimpresa por Dover en 1902 y 1953.
pagina 112, referencia [24] Spivak, no cambiar el formato de los parrafos, debe quedar como

[27] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry* (Publish or Perish, Boston, 1970).
La traducción de la *Habilitationsvortrag* se encuentra en el volumen 2, capítulo 4, sección A.
La traducción parcial del *Commentatio* se encuentra en el volumen 2, capítulo 4, sección C.

[28] B. Riemann, *Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quaestioni ab Ill.ma Academia Parisiense propositae: "Trouver quel doit être l'état calorifique d'un corps solide homogène indéfini pour qu'un système de courbes isothermes, à un instant donné, restent isothermes après un temps quelconque, de telle sorte que la température d'un point puisse s'exprimer en fonction du temps et de deux autres variables indépendantes."* (1876). Publicado sólo en 1876 en [29].

[29] B. Riemann, *Bernhard Riemann's Gesammelte mathematische Werke und wissentschaftlicher Nachlass*, H. Weber y R. Dedekind (Teubner, Lepizig, 1876). La segunda edición incluye un suplemento preparado por M. Noether y W. Wirtinger (1892), la cual ha sido reimpresa por Dover en 1902 y 1953.

[30] J. A. Schouten, *Ricci Calculus* (Springer, Berlin, 1954).

[31] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry* (Publish or Perish, Boston, 1970). La traducción de la *Habilitationsvortrag* se encuentra en el volumen 2, capítulo 4, sección A. La traducción parcial del *Commentatio* se encuentra en el volumen 2, capítulo 4, sección C.

[32] V. Tapia, *A constructive demonstration of the uniqueness of the Christoffel synmbol*, math.DG/0101114 (2001).

[33] V. Tapia, *Riemann y los fundamentos de la geometría*, Misc. Mat. **36**, 83 (2002).

[34] V. Tapia, *The number of tensor differential invariants of a Riemannian metric*, gr–qc/0203043 (2002).

[35] R. Tazzioli, *Rudolf Lipschitz's work on differential geometry and mechanics*, Hist. Mod. Math. **3**, 113 (Academic Press, New York, 1994).

[36] E. Vidal A., *Estado actual, métodos y problemas de la geometría diferencial*, Revista de Matemática Hispano Americana **18**, 28 (1958).

[37] H. Weyl, *Raum–Zeit–Materie* (Springer, Berlin, 1922). Traducción al inglés, *Space–Time–Matter* (Methuen, London, 1922).

(Recibido en abril de 2006. Aceptado en septiembre de 2006)

Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, Colombia
e-mail: `tapiens@gmail.com`