Lecturas Matemáticas
Volumen **27** *(2006), páginas 29–44*

¿Cómo se construye un cuadrado? O el análisis de una síntesis euclidiana.

Clara Helena Sánchez B.
Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

Abstract. Square constructions are essential to Euclid's proof of Pythagoras's theorem. In this paper, to didactical ends and showing some related historical and philosphical aspects, an analysis is made of the proof found in tne Euclidean *Elements*.

Key words and phrases. Philosophy of Mathematics, Mathematical Education.

2000 AMS Mathematics Subject Classification. .

Resumen. La construcción de cuadrados es indispensable en la demostración del teorema de Pitágoras hecha en los *Elementos* de Euclides. En este trabajo, con fines didácticos, hacemos un análisis de la construcción hecha en los *Elementos* mostrando algunos aspectos históricos y filosóficos relacionados.

1. Construcción y geometría

Los antiguos griegos dividieron el campo de la geometría de acuerdo con los tipos de problemas y sus métodos de solución. Una primera clasificación consiste en dividir los problemas en dos tipos: los ***problemas*** propiamente dichos en los cuales se planteaba la construcción de un objeto geométrico y los ***teoremas*** que pretendían demostrar ciertas propiedades de esos objetos [13]. Aquí es necesario hacer una anotación de carácter histórico filosófico; para los antiguos griegos la existencia de un objeto matemático requería de su construcción, no bastaba tener clara su definición; antes de estudiar las propiedades de una figura geométrica, además de definirla había que construirla.

Quizás por ello, el mayor interés en la investigación en geometría estaba más en los *problemas* que en los *teoremas*; estos últimos eran "complementos" en las soluciones de los problemas planteados.

Los problemas de construcción geométrica y muy especialmente los famosos problemas de la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo son problemas que retaron y de alguna manera siguen retando el intelecto humano, aunque no tienen aplicación práctica; su interés radica en que su resolución ha generado mucha investigación matemática desde la antigüedad y de ahí su importancia. Estos problemas consisten respectivamente en construir un cubo de volumen doble del de un cubo dado, dividir un ángulo en tres partes iguales, o sea construir un ángulo la tercera parte de uno dado y por último construir un cuadrado con la misma área de un círculo dado. Cuando la construcción se intenta hacer con la restricción de la regla y el compás euclidianos resulta imposible; en otras palabras, los problemas son irresolubles. Pero los mismos griegos encontraron otras maneras, llamadas mecánicas para resolverlos. PLATÓN descalificó estas últimas y por ello las construcciones con regla y compás adquirieron tanta importancia intelectual desde la antigüedad y las otras construcciones son poco conocidas.

Las soluciones *no planas* (sin regla ni compás) de los famosos problemas de construcción fueron objeto de un trabajo publicado en mi libro *Los tres famosos problemas de la geometría griega y su historia en Colombia* [12]. Baste decir que los griegos al darse cuenta de que a pesar de sus esfuerzos no podían resolver los famosos problemas con la regla y el compás, buscaron y encontraron otros métodos para hacerlo. Clasificaron entonces las soluciones según el método utilizado; una solución era *plana* cuando se usaban la regla y el compás solamente; *sólida* cuando se requería de una o más secciones cónicas y *lineal* cuando la solución necesitaba de curvas más complicadas como espirales, concoides, cisoides, cuadratrices u otras más, sorprendentes curvas encontradas por vía de la intuición ingeniosa de ciertos movimientos mecánicos.[1] La creación de la geometría analítica por DESCARTES y FERMAT en el siglo XVII y el desarrollo del álgebra permitió asociar estos problemas con ciertas ecuaciones algebraicas de tercer grado con las que se demostró la irresolubilidad de la duplicación del cubo y la trisección del ángulo, como consecuencia de un conocido teorema que dice que solo ecuaciones cuyo grado es una potencia de dos admiten soluciones construibles con regla y compás. El avance del álgebra en el siglo XIX se da en buena medida en los intentos por resolver estos problemas y explica porqué los antiguos griegos no estaban en condiciones de "intuir" que sus numerosos intentos estaban condenados al fracaso.

Análisis y síntesis

Los *problemas* a su vez estaban asociados con dos métodos importantes: el *análisis* y la *síntesis*. En el *análisis* se suponía el problema resuelto y se

[1]En el excelente libro de W. KNORR *The Ancient Tradition of Geometric Problems* [7] encontramos la historia de las soluciones no planas a los problemas y su visión de la "interacción entre geometría y filosofía en el campo especial que tiene que ver con la naturaleza formal de la prueba, pero que, en el fondo, las dos disciplinas desarrollan autónomamente".

razonaba "hacia atrás" para llegar a un punto, ya fuera problema o teorema conocido para luego "devolverse". En la *síntesis* se partía de los principios, problemas o teoremas conocidos para probar el resultado encontrado.

Hay que anotar que el método de la síntesis, usual en matemáticas, de presentación de resultados, ya sean problemas o teoremas, dificulta el conocimiento de las técnicas usadas en la resolución de problemas, ya que este método consiste en derivar el resultado obtenido como conclusión de una cadena de deducciones de principios, problemas o teoremas conocidos y encontrados en el proceso de análisis.

La escritura de un texto es el fin de la investigación matemática solamente en el sentido en que la muerte es el final de la vida: es el último término en una sucesión pero [generalmente] no es el propósito central de la misma, dice Knorr [7]. Para matemáticos y filósofos del siglo xvii, como Descartes por ejemplo, el método de la síntesis oculta la línea de pensamiento en la obtención de los resultados. Creo que eso es claro hoy en día y de ahí muchas de las dificultades en la enseñanza de las matemáticas.

En el método axiomático, la síntesis es lo fundamental: se parte de unos axiomas, o primeros principios y de allí se obtienen a través de una rigurosa deducción lógica las demás verdades o teoremas de la teoría. El método axiomático, que se lo debemos a Euclides (c. 300 a.c.) y está expuesto de manera magistral en sus famosos *Elementos*, ha sido favorecido por la ciencia desde entonces (es el caso de Newton en sus *Principia Mathematicae*) y tomado como modelo de presentación de sus teorías por grandes filósofos como Kant en su *Crítica de la razón pura* o Spinoza en su *Ética demostrada según el orden geométrico*. Pero la síntesis es más un método de justificación, de prueba, que de descubrimiento. En cambio, el análisis es un método de resolución de problemas y éste rara vez está expuesto en la presentación de los resultados [6, pág. 185].

Análisis y síntesis son, pues, dos métodos de razonamiento que nos vienen de los griegos y son de uso cotidiano en el ejercicio de las matemáticas, así el matemático no tenga total conciencia de ello. Aunque Euclides nunca compartió su método de descubrimiento de las pruebas, en el libro xiii de los *Elementos*, se encuentra, evidentemente como una interpolación hecha posteriormente, un análisis de cada uno de los cinco primeros teoremas de este libro [4, págs. 137–138]

La mejor exposición del método de análisis se encuentra en Papo de Alejandría (290–350), considerado el último de los grandes geómetras griegos. De su obra sobresale un grupo de 8 trabajos sobre diversos tópicos de matemáticas, llamado *Colección*, y entre estos nos interesa el libro 7 titulado *Sobre el dominio del análisis*, en el cual Papo expone el método. Su definición es la siguiente:

> En el análisis suponemos lo que se busca como si ya hubiese sido hecho e investigamos esto de dónde resulta, y luego cuál es

> la causa antecedente de esto último, y así sucesivamente hasta que, siguiendo nuestros pasos en orden inversa, alcancemos algo ya conocido o que pertenece a la clase de los primeros principios; y a tal modo llamamos de análisis, como solución de atrás para adelante.
>
> Pero en la síntesis, revirtiendo el proceso, tomamos como ya hecho lo último que se tomó en el análisis, y colocándolo en su orden natural de consecuencias, llegamos finalmente a la construcción de lo que se busca; y a esto llamamos síntesis. [4, pág. 400]

Creo que una de las dificultades en la enseñanza de la geometría, por lo menos en nuestro medio, radica en qué seguimos el camino de la síntesis al escoger un texto que naturalmente presenta la geometría "en orden"; esto es, presenta algún sistema axiomático, el que se considere más adecuado para el nivel en que se enseña la geometría, que comienza con los axiomas y primeras definiciones, para continuar con los teoremas, sus demostraciones y luego unos ejercicios de aplicación de los teoremas dados. El estudiante se monta en un bus con un guía que explica cada parada; casi nunca el guía explica por qué el camino escogido fue este o aquél. Es el bus de la síntesis. El recorrido sería muy distinto si los integrantes de la excursión hubieran encontrado de antemano, a través de un análisis del objetivo final de la excursión, cuál es el camino, cuáles son las paradas que se deben hacer para llegar al destino previsto inicialmente, es el camino de la resolución de problemas. El método de análisis fue privilegiado por los antiguos pues con él se aprendían las técnicas de solución de *problemas*. En 1945, el húngaro G. Pólya, con su libro *How to solve it?*, inicia un campo en educación matemática basado en estrategias para resolver problemas en matemáticas que bien pueden aprenderse en otros campos del conocimiento.

Los métodos de análisis y síntesis han sido objeto de serias reflexiones filosóficas a través de la historia; en el siglo xx, pensadores como Hintikka y Lakatos[2] tienen valiosos escritos sobre el tema. Es relevante anotar que Petrus Ramus, uno de los más importantes lógicos del siglo xvi, tenía claro que el método de análisis y síntesis es una excelente ayuda pedagógica:

> El análisis lógico es el proceso por el cual un ejemplo dado de un discurso ya compuesto es examinado en términos de las leyes del arte, la pregunta es extractada, luego el invento (descubrimiento) es estudiado, y el lugar del cual el argumento es obtenido es buscado. Éste es el análisis del descubrimiento (invención). (Petrus Ramus, citado por Ong [8, pág. 264].)

[2]Por ejemplo, recomiendo la lectura de *El método de análisis y síntesis en matemáticas, ciencia y epistemología*, Imre Lakatos, 1981, Alianza Editorial, págs. 103–144. Allí encontramos además interesante bibliografía sobre el tema.

> El análisis para Ramus, está así en la raíz de la forma en que se debe operar didácticamente sobre un texto. Pertenece no a un arte sino a los usos o ejercicios, y está complementado por la génesis o composición, pues, una vez el niño ha roto una muestra del discurso –discurso escrito, pues el análisis aquí surge del acercamiento humano al lenguaje a través de la palabra escrita– el puede rehacer las partes en configuraciones propias, las cuales según Ramus, es lo que uno hace al componer [8, pág. 264].

Sin entrar en más detalles sobre esas reflexiones, me propongo en este trabajo usar elementos de la historia de la geometría como herramienta pedagógica. Inspirada en los trabajos de (Pólya [9], [10]), expondré cómo entiendo el análisis y la síntesis griega como herramienta heurística en la resolución de problemas, a través del problema de la construcción de un cuadrado dado uno de sus lados. Más precisamente me propongo hacer un análisis de la síntesis de Euclides en la proposición 46 de los *Elementos*: *Construir un cuadrado sobre una línea dada.*

Con el análisis de la síntesis de la proposición 46 pretendo descubrir y entender el por qué del orden de las proposiciones en el libro i y la necesidad de los cinco postulados y cinco nociones comunes con que comienza el famoso libro. A través del recorrido veremos algunas fortalezas y deficiencias de la axiomatización euclidiana.

Los *Elementos* y el teorema de Pitágoras

El libro i de los *Elementos*[3] de Euclides tiene un claro objetivo, demostrar el *teorema de Pitágoras* y su recíproco; teorema que en la época se consideraba uno de los más significativos resultados de la geometría por sus múltiples aplicaciones, pero que, irónicamente justamente por una de ellas como lo es la demostración de la inconmensurabilidad de la diagonal de un cuadrado con respecto a su lado, que trae como consecuencia la irracionalidad de $\sqrt{2}$, acabó con el postulado filosófico central de los pitagóricos: Todo es número. Por número se entendía lo que hoy llamamos números naturales a partir del número 2 (véase, por ejemplo, [1]).

En el caso de Euclides las construcciones, como hemos anotado, debían hacerse con regla y compás: un compás que se cierra al levantarlo del papel y una regla sin marcas; son los instrumentos que permiten la aplicación de los tres primeros postulados:

1. Postúlese el trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera.
2. Y el prolongar continuamente una recta finita en línea recta.

[3] Recordemos que la obra está constituida por trece libros.

3. Y el describir un círculo con cualquier centro y distancia. [3, pág. 197]

A su vez el teorema de Pitágoras (teorema 47 del libro I de los *Elementos*) está enunciado como sigue:

> En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende al ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden al ángulo recto.

En la demostración de EUCLIDES, el primer paso es la construcción de cuadrados sobre los lados del triángulo rectángulo. El cuadrado es el segundo polígono regular más simple; el primero es, naturalmente, el triángulo equilátero. La solución del problema de la construcción de un triángulo equilátero está dada en el primer teorema del primer libro de los *Elementos*, y es bastante sencilla. En cambio la solución al problema de la construcción de un cuadrado la encontramos en el teorema número 46. Una distancia significativa, que nos obliga a preguntarnos dónde radica su dificultad.

Más sorprendente aún es la solución al problema de la construcción del pentágono regular, que se encuentra en el teorema 11 del libro IV de los *Elementos*. Es bien conocido que el problema de la construcción de los polígonos regulares, fue un tema de interés en geometría, que apenas con el desarrollo del álgebra se aclaró en el siglo XIX. Y se pudo apreciar dónde radicaba la dificultad para responder a la pregunta, ¿para qué valores de n es posible construir un $n-$ágono regular?

Con el preámbulo anterior podemos ahora expresar más claramente el objetivo del trabajo: hacer un análisis de la síntesis de EUCLIDES en su teorema 46 del libro I de los *Elementos*, trazar un cuadrado a partir de una recta dada. Escogimos el camino de los *Elementos*, a pesar de sus deficiencias lógicas, porque lo consideramos el mejor para el objetivo didáctico que nos proponemos; para ello usaremos la traducción publicada por la editorial Gredos [1991].

Cómo se construye un cuadrado

Para resolver el problema de cómo se construye un cuadrado, lo primero que debemos saber muy bien es, qué es un cuadrado, y para ello debemos tener una [buena, adecuada] definición de cuadrado; naturalmente usaremos la de los *Elementos*, fuente de nuestro análisis:

> *Cuadrado* es una figura cuadrilátera (figura rectilínea comprendida por cuatro rectas), equilátera y equiangular.[4]

Esto significa que para resolver nuestro problema, dado un lado debemos construir los otros tres lados iguales y de tal manera que formen cuatro ángulos iguales.

[4] Adaptado de las definiciones 19 y 22 del libro I de los *Elementos*.

Aunque la definición anterior no lo dice explícitamente, se sabe (¿cómo?) que los ángulos de un cuadrado deben ser ángulos rectos. Teniendo esto presente hagamos un primer intento.

Primer análisis

Supongamos resuelto el problema de la siguiente manera:[5]

Sea AB el lado dado; sobre el extremo A trazamos una perpendicular y sobre ella marcamos un punto C de tal manera que $AC = AB$; de igual manera, sobre el extremo B trazamos una perpendicular y sobre ella marcamos un punto D de tal manera que $BD = AB$. Como dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí, tenemos que $AB = AC = BD$. Hemos obtenido tres lados y dos ángulos del cuadrado; parece ahora obvio unir C con D. Pero,

(1) ¿Qué nos garantiza que $CD = AB$? y

(2) ¿qué nos garantiza que los ángulos en C y en D sean rectos?

Esta es la construcción que nos lleva directamente a los cuadriláteros de Saccheri, y sus tres famosas hipótesis: la del ángulo agudo, la del ángulo recto y la del ángulo obtuso [1], [11].

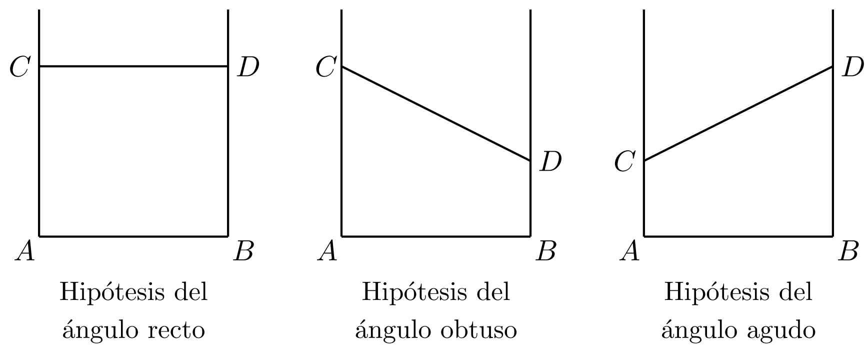


Figura 1

Una demostración requiere la justificación de cada una de las afirmaciones que la componen. Así que el intento de demostración anterior obliga a responder además las siguientes preguntas:

(3) ¿Qué es un lado?
(4) ¿Qué es un ángulo?
(5) ¿Qué es un ángulo recto?
(6) ¿Cómo se construye un lado igual a otro?
(7) ¿Cómo se construye un ángulo igual a otro?
(8) ¿Cómo se construye una perpendicular a una recta dada?
(9) ¿Cómo supimos que los ángulos de un cuadrado deben ser rectos?

[5] En ejercicios en clase ésta es la solución más frecuente que presentan los estudiantes.

Las definiciones 4 y 8 del libro I de los *Elementos* nos resuelven las preguntas (3) y (4).[6] Son definiciones bastante deficientes en las cuales no nos vamos a detener. En cambio las demás las consideramos fundamentales para el desarrollo de este trabajo. Por ahora veamos la definición de ángulo recto:

> *Ángulos rectos* son los que se forman cuando se levanta una recta sobre otra y se obtienen dos ángulos adyacentes iguales. La recta levantada se llama **perpendicular** a aquella sobre la que está.

Por lo tanto, la construcción de perpendiculares nos resuelve el problema de la construcción de ángulos rectos y recíprocamente. La respuesta a las preguntas 1. y 2., sabemos hoy en día dependen de la opción que se tome para el quinto postulado. Por lo tanto, intentamos un segundo análisis.

Segundo análisis

Sea AB el lado dado; sobre el extremo A trazamos una perpendicular y sobre ella marcamos un punto C de tal manera que $AC = AB$; de igual manera, sobre el extremo B trazamos una perpendicular y sobre ella marcamos un punto D de tal manera que $BD = AB$. Como dos cosas iguales a una tercera son iguales entre si tenemos que $AB = AC = BD$. Trazamos a partir de C un lado perpendicular a AC. Esto nos garantiza tres ángulos rectos; pero, ¿qué nos asegura que el punto de corte de esa perpendicular con BD es exactamente D? Y si así fuera ¿por qué $CD = AB$? Y ¿por qué el ángulo en D es recto? Preguntas sin respuesta que nos llevan a buscar otro camino.

Tercer análisis

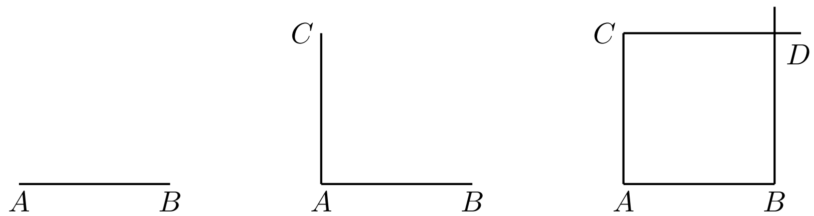


Figura 2

Sea AB el lado dado. Tracemos AC de tal manera que sea igual y perpendicular a AB.

(10) A partir de C trazamos una paralela a AB y a partir de B trazamos una paralela a AC de tal manera que se corten en D.

(11) Hemos obtenido un **paralelogramo** que es equilátero y que tiene por

[6]**Definición 4.** Una línea recta (lado) es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella. **Definición 8.** Un ángulo plano es la inclinación mutua de las líneas que se encuentran una a otra en un plano y no están en línea recta.

lo menos un ángulo recto en A.

(12) Entonces el ángulo opuesto D también es recto y como AB y CD son paralelas cortadas por CD,

(13) el ángulo en C es recto;

(14) de la misma manera se prueba que el ángulo en B es recto.

Esta, si es una solución del problema, es la de Euclides. Obsérvese que en la solución se usa que un cuadrado es un paralelogramo equilátero y equiángular. Ahora bien un paralelogramo es un cuadrilátero que tiene sus lados y sus ángulos opuestos respectivamente iguales, y las diagonales lo dividen en dos partes iguales. Solo que Euclides nunca dio la definición explícita de paralelogramo, aunque hace uso de una implícita: *un paralelogramo es un cuadrilátero que tiene sus lados opuestos paralelos.*

¿Cómo es el camino que escoge Euclides? Para verlo, es necesario primero resolver algunas cuestiones antes de dar la solución al problema que nos interesa. Estas cuestiones son:

(15) ¿Cómo se trazan paralelas?

(16) ¿Cómo justificamos las afirmaciones (10) a (14)?

Recapitulando, para construir un cuadrado necesitamos saber por lo menos cómo se construyen perpendiculares, paralelas y un segmento igual a otro dado. Además debemos conocer algunas propiedades de las paralelas y de los paralelogramos. El análisis de este problema nos llevó a la resolución de por lo menos diez preguntas más. Cada una de éstas es un nuevo problema por resolver.

Construcción de un cuadrado [46][7]

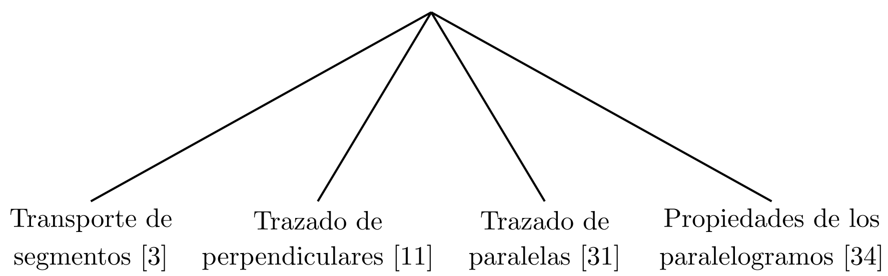


Figura 3

Con una regla con marcas o un compás corriente se resuelve inmediatamente el problema del transporte de segmentos. Pero, como ya anotamos, Euclides restringió todavía más sus herramientas y escogió una regla sin marcas, sólo sirve para trazar líneas rectas y un compás que sirve para trazar círculos y que se cierra inmediatamente cuando se levantan sus puntas del papel. Esto

[7] Los números entre paréntesis cuadrados son los números de los teoremas correspondientes en los *Elementos*.

significa que ninguno de los dos instrumentos sirve para hacer mediciones. Con estas restricciones este problema es un poco mas difícil de resolver. EUCLIDES lo hace en los teoremas 2 y 3,[8] y nosotros no nos detendremos en ellos, aunque invitamos al lector a estudiarlos.

Resuelto el problema de la construcción de rectas iguales, continuamos con el de la construcción de perpendiculares: *dada una recta AB debemos levantar sobre ella una perpendicular; esto es, según la definición dada anteriormente, trazar una línea recta sobre AB que forme ángulos adyacentes iguales.*

Trazado de perpendiculares

Supongamos resuelto el problema.

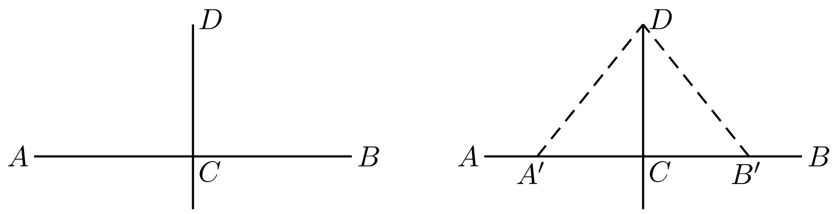


FIGURA 4

Sobre un punto C en AB, trazamos CD perpendicular a AB. Esto implica que si tomamos los puntos A' en AC y B' en CB de tal manera que $A'C = CB'$, los triángulos $A'CD$ y $B'CD$, son iguales pues tienen dos lados iguales y el ángulo comprendido (17). Como tienen un lado común serían mitades del triángulo $A'DB'$ que resulta ser isósceles.

De aquí partimos para la síntesis.

Sea AB la recta dada. Sobre ella escogemos un punto C y sobre AC un punto A' cualquiera; luego escogemos B' sobre CB de tal manera que $A'C = CB'$. Sobre $A'B'$ construimos un triángulo equilátero $A'DB'$.[9] Unimos D con C. Los triángulos $A'DC$ y $B'DC$ son iguales pues tienen sus tres lados iguales (18); por lo tanto, los ángulos $A'CD$ y $B'CD$ son iguales y, por ser adyacentes, son rectos[10] y la línea DC es perpendicular a AB como había que hacer.

En el análisis y la síntesis anteriores se ve claramente la necesidad de estudiar la igualdad de triángulos, que son las preguntas (17) y (18) por resolver y que EUCLIDES resuelve en los teoremas 4 y 8 del Libro I.

[8]**Teorema 2.** *Poner en un punto dado (como extremo) una recta igual a una recta dada.* **Teorema 3.** *Dadas dos rectas desiguales, quitar de la mayor una menor.*

[9]**Teorema 1** de los *Elementos*: *Construir un tríangulo equilátero sobre una recta finita dada.*

[10]**Definición 10** de los *Elementos*: *Cuando una recta levantada sobre otra recta forma ángulos adyacentes iguales entre sí, cada uno de los ángulos es recto y la recta levantada se llama perpendicular a aquella sobre la que está.*

Trazado de perpendiculares [11]

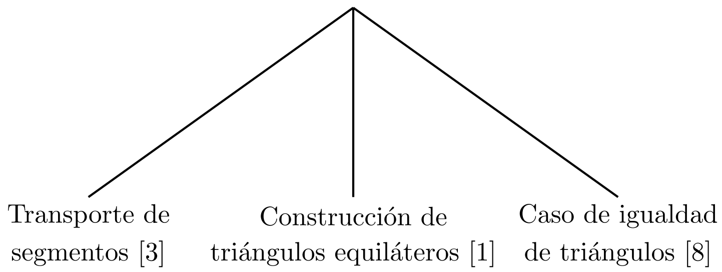


Figura 5

Punto fundamental en nuestro problema es el trazado de paralelas. Intentemos igualmente su análisis.

Trazado de paralelas

Primero la definición de rectas paralelas.[11]

> Son rectas *paralelas* las que estando en el mismo plano y siendo prolongadas indefinidamente en ambos sentidos, no se encuentran una a otra en ninguno de ellos.

Hoy sabemos que Euclides intuyó sabiamente que el punto central de su geometría estaba en el concepto de paralelismo. La propia definición que él da envuelve implícitamente el concepto de infinito al ser necesario "prolongar indefinidamente en ambos sentidos" las rectas para garantizar que no se corten. ¿Cómo ir hasta el infinito para hacer la comprobación? Como esto no es posible hay que buscar una manera indirecta, a través de otras propiedades de las rectas paralelas para construirlas o justificar que un par lo sean.

Intuitivamente es fácil aceptar que si dos rectas, ℓ, m, no son paralelas, esto es, se cortan en algún punto, al ser cortadas por una tercera, n, van a formar un triángulo. Así que indirectamente al estudiar propiedades de los triángulos estamos encontrando propiedades de las paralelas. Pues, si dos rectas son paralelas al ser cortadas por una tercera no podemos formar un triángulo. Si dejamos fijas las rectas ℓ y n y ponemos a girar m alrededor del punto P de corte con n, también intuitivamente podemos aceptar que hay solamente un posición de la recta que gira en que no podemos formar un triángulo, mientras que hay infinitas posiciones en que si se forma. Pues bien, y ¿cómo comparar la posición relativa de ℓ y m? Usemos a n para dar una respuesta, tengamos en cuenta los ángulos "internos" que forma con respecto a n.

En Euclides tenemos un parámetro de comparación de ángulos, los ángulos rectos. Con las herramientas que se tienen solamente podemos saber si un

[11]Esta es la definición número 23 del libro I de los *Elementos*.

ángulo es mayor o menor que un recto. Así que la pregunta de cuándo dos rectas son paralelas la podemos remitir a comparar la suma de los dos ángulos internos que se forman por un mismo lado entre dos rectas al ser cortadas por una tercera y dos ángulos rectos.

La genial respuesta de EUCLIDES la encontramos en su famoso quinto postulado:

> Si una recta al incidir sobre otras dos rectas hace ángulos internos del mismo lado menores que dos ángulos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán por el lado en que están los ángulos menores que dos rectos.

Dicho de otra manera si una recta al incidir sobre otras dos forma del mismo lado ángulos menores que dos rectos, las dos rectas no serán paralelas y se formará un triángulo con ellas.

O si usamos la contrapositiva tendremos:

Si dos rectas al prolongarlas indefinidamente por un mismo lado NO se cortan, y otra recta incide sobre ellas, los ángulos internos que se forman por el lado en que fueron prolongadas NO deben ser menores que dos rectos; o sea deben ser mayores o iguales a dos rectos.

Y si por un lado los ángulos internos son menores que dos rectos ¿cómo serán del otro lado? Sean ℓ, m, n las rectas dadas y α, β, γ, θ los ángulos internos que se forman, tenemos entonces tres posibilidades:

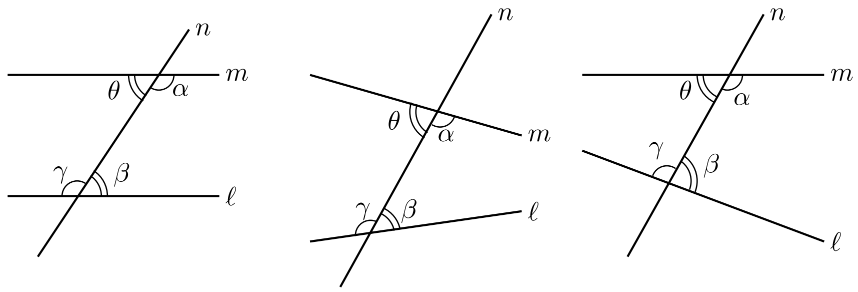


FIGURA 6

¿Qué pasa en cada uno de estos casos con los ángulos internos que se forman al incidir otra recta sobre ellas (19)? La respuesta a esta pregunta nos servirá para caracterizar rectas paralelas por medio de sus ángulos internos con respecto a otra recta incidente.

Pero antes de continuar con este análisis, y encontrar una solución a la pregunta formulada, es bastante obvio analizar primero qué pasa con los ángulos que se forman al cruzarse dos rectas.

Si consideramos los ángulos α, β, γ, θ, vale preguntarse qué relación hay entre ellos. Intuitivamente vemos que α es igual a β y γ es igual a θ, pero no basta con la intuición ¡hay que probarlo! Si aceptamos este hecho inmediatamente resulta que α y γ suman dos rectos, e igualmente β y θ suman dos rectos. ¿Significa esto entonces que cuando una línea recta incide sobre otra se forman siempre dos ángulos iguales a dos rectos? (20)

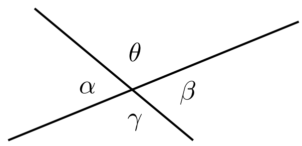


Figura 7

Consideremos entonces dos rectas cualesquiera ℓ, m y tracemos otra n que las corte a ambas. Las respuestas de Euclides en su orden son las siguientes:

Teorema 13. *Si una recta* [m] *levantada sobre otra* [ℓ] *forma ángulos, o bien formará dos* [ángulos] *rectos o bien* [ángulos] *iguales a dos rectos.*

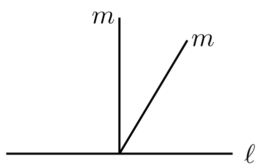


Figura 8

Teorema 14. *Si dos rectas* [ℓ, ℓ'] *forman con una recta cualquiera* [n] *y en un punto* [O] *de ella ángulos adyacentes iguales a dos rectos y no están en el mismo lado* [de ella] *ambas rectas estarán en línea recta.*

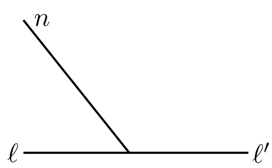


Figura 9

Teorema 15. *Si dos rectas se cortan, hacen los ángulos* [opuestos por] *del vértice iguales entre sí.*

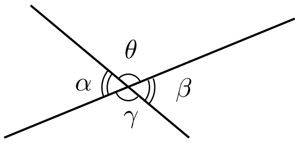


FIGURA 10

Los anteriores teoremas nos llevan a concluir que si queremos construir una paralela a una recta dada por un punto dado debemos construir una recta que forme ángulos alternos iguales con otra que incide sobre ellas; de esta manera se garantiza que los ángulos internos por cualquiera de los dos lados siempre van a ser iguales a dos rectos y el quinto postulado nos garantiza que no se van a cortar por ninguno de los dos lados, esto es son paralelas. El análisis nos ha llevado pues al siguiente camino: sea ℓ la recta dada y P el punto dado; a partir de P tracemos una recta m que incida sobre ℓ, en el punto Q; se forma así un ángulo α, si podemos trazar un ángulo β igual a α a partir de P y con el mismo lado PQ , tenemos resuelto el problema. Efectivamente hemos hallado una recta n que forma ángulos alternos internos iguales y ya sabemos que ello nos lleva a que los ángulos van a ser iguales a dos rectos y por lo tanto las rectas no se cortan y son paralelas. Pero esta solución nos obliga a saber cómo se construye un ángulo igual a otro dado (21).

Trazado de paralelas [31]

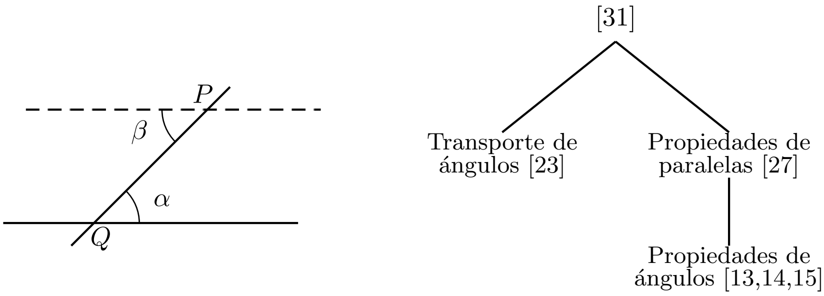
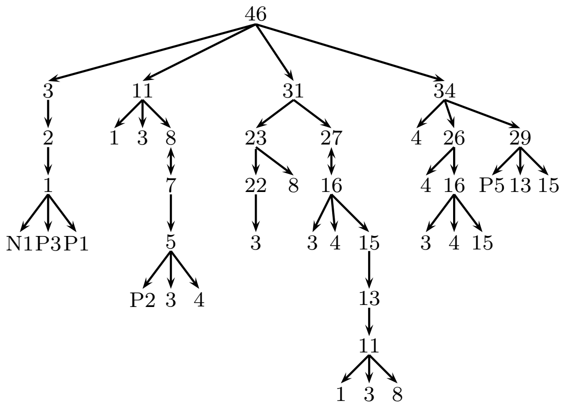


FIGURA 11

El análisis exhaustivo nos obligaría a llegar hasta los postulados y nociones comunes de los *Elementos*. El camino sería muy largo y no deseo cansar a los lectores. Con lo expuesto espero haber mostrado el porqué en los *Elementos* cada proposición ocupa su lugar dados los primeros principios escogidos. De todas maneras en la figura 12 se encuentra una sinopsis de ese análisis y para finalizar hemos dado la función de cada teorema [1, pág. 132]. Suponemos que el lector recordará cuáles son los cinco postulados (P_i) y las cinco nociones comunes (N_i) de los *Elementos*.



Cuadro No.1

Función de cada proposición (elemento) en la construcción de un cuadrado

Se requieren además de los cinco postulados y cinco nociones comunes 18 proposiciones del libro I de los *Elementos*. Entre paréntesis cuadrados se da el número de la proposición en dicho libro.

1. Construcción de triángulos equiláteros [1].
2. Transporte de rectas limitadas (segmentos) [2].
3. Transporte de rectas limitadas (segmentos) en una dirección específica [3].
4. Primer caso de igualdad de triángulos [4].
5. Teorema del triángulo isósceles [5].
6. Unicidad en la construcción de un triángulo [7].
7. Tercer caso de igualdad de triángulos [8].
8. Construcción de ángulos rectos (perpendiculares) [11].
9. Una recta incidente sobre otra forma ángulos iguales a dos rectos [13].
10. Ángulos opuestos por el vértice son iguales [15].
11. Teorema del ángulo externo [16].
12. Construcción de un triángulo cualquiera [22].
13. Transporte de ángulos [23].
14. Segundo caso de igualdad de triángulos [26].
15. Existencia de paralelas [27].
16. Propiedades de las paralelas [28].
17. Trazado de paralelas [31].
18. Propiedad de los paralelogramos [34].
19. Construcción de cuadrado [46].

Bibliografía

[1] A. Campos. *La lógica y la geometría griegas anteriores a Euclides*. Bogotá, 1994.

[2] A. CAMPOS. *Axiomática y geometría desde Euclides a Bourbaki*. Bogotá, 1994.
[3] EUCLIDES. *Elementos*. Madrid: Gredos, 1991.
[4] T. L. HEATH. *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. New York: Dover, 1956.
[5] JAAKO HINTIKA & UNTO REMES. *A Análise geometrica antiga e a logica moderna*. Cadernos de Historia e Filosofia da Ciencia No. 4, 1983.
[6] VICTOR J. KATZ. *A History of Mathematics*. Reading: Addison–Wesley, 1998.
[7] WILBUR KNORR. *The Ancient Tradition of Geometric Problems*. Boston: Birkhäuser, 1986 = New York: Dover, 1993.
[8] WALTER ONG & S. J. RAMUS. *Method and the Decay of Dialogue*. Cambridge: Harvard University Press, 1983.
[9] GEORGE POLYA. *Mathematical Discovery*. New York: Wiley, 1981.
[10] A. G. POLYA. *How to solve it*. Princeton NJ: Princeton University Press, 1966.
[11] GIROLAMO SACCHERI. *Euclides vindicatus*. New York: Chelsea Pub. Co., 1986.
[12] CLARA H. SÁNCHEZ. *Los tres famosos problemas de la geometría griega y su historia en Colombia*. Bogotá: Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional, 1994.
[13] LUIS VEGA. *La trama de la demostración*. Madrid: Alianza Editorial, 1990.

(Recibido en enero de 2006. Aceptado para publicación en marzo de 2006)

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
BOGOTÁ, COLOMBIA
e-mail: clarasanchez@cable.net.co