

PRIMA DE RIESGO Y VOLATILIDAD CON UN MODELO GARCH-M

Alfredo García Hiernaux*

Universidad Complutense de Madrid

En este trabajo se estudia la relación existente entre la prima de riesgo y la volatilidad diarias en el Índice General de la Bolsa de Madrid desde Octubre de 1990 hasta Noviembre de 2001. En una primera parte se construye la serie prima de riesgo diaria, con la que se trabaja, y se realizan una serie de contrastes que ponen de manifiesto la posible existencia de un modelo GARCH-M. El análisis econométrico nos revela la existencia de dicha relación, siendo ésta positiva para el período estimado. Los resultados, por tanto, implican una compensación del riesgo en rentabilidad para los inversores del mercado madrileño durante la década de los noventa.

Palabras clave: prima de riesgo, volatilidad, modelos GARCH-M.

El mercado financiero español ha sido un importante foco de atención para los investigadores en los últimos años. Muchas de estas investigaciones se han centrado en el estudio de las primas de riesgo tanto en el mercado interbancario de depósitos como en los mercados de acciones. Así, encontramos aportaciones importantes sobre las primas de riesgo en el área de la estructura temporal de los tipos de interés en Freixas y Novales (1992), Flores de Frutos (1995) o Pérez Rodríguez *et al.* (1997). De la misma forma, se producen resultados relevantes en el estudio de las primas de riesgo y los rendimientos de los mercados de acciones como los de Alcalá *et al.* (1993), Olmeda y Pérez (1995) o Fernández-Rodríguez *et al.* (1999). El estudio de una prima de riesgo incluye tres pasos. Primero, el supuesto de una ecuación que represente la prima, segundo, la estimación de los parámetros relevantes de la misma, y tercero, el uso de los resultados de la estimación para evaluar e interpretar la prima de riesgo

(*) El autor agradece al profesor Teodosio Pérez Amaral todas sus sugerencias. Así mismo, agradece los relevantes comentarios de un evaluador anónimo.

en el período analizado. El propósito de este trabajo es el estudio de la relación existente entre la prima de riesgo y la volatilidad en el IGBM¹ durante el período 1990/2001.

Suponiendo racionalidad, los inversores siempre preferirán activos con tasa de rentabilidad altas a otros con rentabilidad más bajas, *caeteris paribus*. Por otro lado, suponemos también que los agentes son aversos al riesgo y prefieren menos a más riesgo (en la literatura financiera el riesgo se mide frecuentemente con la desviación típica, σ , ya sea de la rentabilidad o de la prima de riesgo). Esto implica que si el riesgo es muy alto durante un período de tiempo determinado, los inversores sólo aceptarán tal riesgo si las rentabilidades esperadas son muy altas. De la misma manera, sólo se aceptarán tasas de rentabilidades esperadas pequeñas si tienen un riesgo pequeño. La posible existencia de estas relaciones motivan por tanto este trabajo que se presenta de la siguiente manera.

En una primera parte, sección 1, construimos la serie de la prima de riesgo del IGBM, y realizamos un análisis exploratorio de los datos por medio de contrastes formales de hipótesis acerca de la posible existencia de heteroscedasticidad condicional.

En la sección 2, se estima el modelo identificado en el apartado anterior y se analizan e interpretan los resultados obtenidos.

Finalmente se exponen las conclusiones del estudio comparándose con las de otros trabajos que divergen en la dimensión temporal o espacial.

1. CONSTRUCCIÓN DE LA PRIMA DE RIESGO E IDENTIFICACIÓN DEL MODELO

La pregunta que motiva la construcción y utilización de la prima de riesgo se puede expresar como: ¿qué incremento en rentabilidad exigirán los inversores por asumir un riesgo mayor? Los inversores pueden adquirir un activo sin riesgo que les dé una rentabilidad segura; ésta se conoce como rentabilidad del activo sin riesgo y que denominaremos de aquí en adelante r_t^f . Usualmente, en este tipo de trabajos se utiliza el tipo de interés intercambiario a un mes como tipo de referencia del activo sin riesgo. Definimos por tanto, el concepto de compensación por riesgo o prima de riesgo, como

$$PR_t = r_t - r_t^f$$

donde r_t es la rentabilidad del activo del cual queremos obtener la prima de riesgo.

En este caso, como la serie r_t se refiere a la tasa de rentabilidad de las cotizaciones diarias del IGBM desde Octubre de 1990 hasta Noviembre de 2001 y los tipos de interés (también para el mismo período) nos dan una

(1) Índice General de la Bolsa de Madrid.

rentabilidad anual, hemos llevado a cabo una transformación en la serie r_t^f para disponer de la tasa logarítmica diaria del activo sin riesgo, definiendo la función:

$$r_{dt}^f = \ln \left(1 + \frac{r_{at}^f}{365} \right)$$

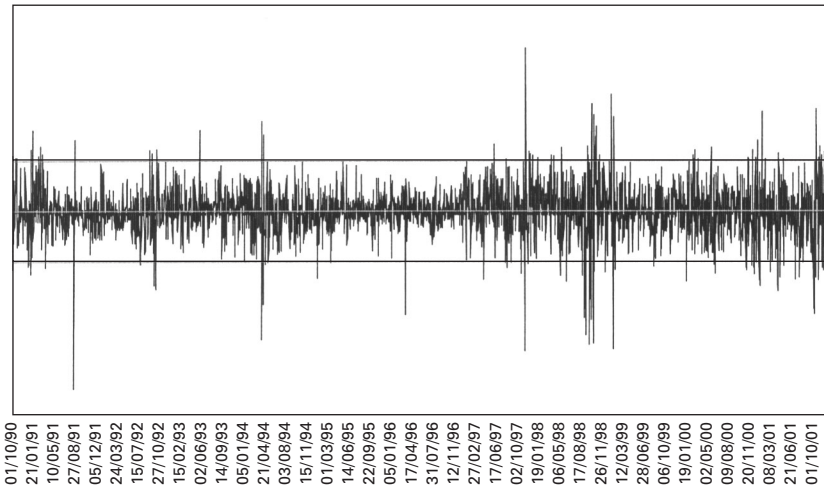
donde r_{at}^f es la rentabilidad anual y r_{dt}^f es la rentabilidad diaria. Para la rentabilidad de las cotizaciones diarias del IGBM utilizamos su tasa logarítmica

$$r_t = \ln \left(\frac{p_t}{p_{t-1}} \right)$$

Finalmente, la variable con la que trabajamos que corresponde a la prima de riesgo queda, como definimos anteriormente,

$$PR_t = r_t - r_{dt}^f$$

Gráfico 1
PRIMA DE RIESGO DIARIA 1990-2001 (TIPIFICADA, ± 2 D.T.)



Cuadro 1
ESTADÍSTICOS DE LA SERIE PRIMA DE RIESGO

Media	D. Típica (d.t.)	Asimetría (A)	Curtosis (K)	Jarque-Bera (J. y B.)
0.00027	0.01228	-0.37497	7.279	2143.6

Para estudiar la relación propuesta anteriormente es crucial la correcta estimación de la variable σ_t ; como podemos observar en el gráfico 1, existen períodos de alta o baja volatilidad consecutivos con cierta regula-

ridad. Con un mero análisis visual, podemos ver como entre Diciembre de 1994 y Marzo de 1997 la prima de riesgo, salvo alguna excepción, fluctúa entre las bandas de ± 2 desviaciones típicas indicando un período de estabilidad y baja incertidumbre, mientras que entre Octubre de 1998 y Febrero de 1999 el gráfico nos muestra una fluctuación en muchas ocasiones superior a ± 4 desviaciones típicas, indicando un período de gran inestabilidad e incertidumbre y por tanto de riesgo alto. Por otro lado, vemos en el cuadro 1 que la serie no sigue una distribución normal (test de J. y B.), de hecho es una distribución leptocúrtica ($K > 3$) y asimétrica a la izquierda ($A < 0$). Todo esto, y más adelante un análisis más riguroso de los datos, justifica la dependencia en los cuadrados, es decir la existencia de efectos GARCH en los términos de perturbación. Para la representación de la prima de riesgo decidimos entonces utilizar un modelo no lineal del tipo GARCH-M, en el cual el riesgo puede determinarse a partir de la varianza o la desviación típica condicional de los errores no previstos, que permite una revisión permanente del riesgo a través del tiempo. La forma general del modelo GARCH-M propuesto por Engle, Lilien y Robbins (1987) que son generalizaciones de los modelos ARCH (Engle, 1982) y GARCH (Bollerslev, 1986), es la siguiente:

$$Y_t = \omega + \delta X_t + \rho \sigma_t + e_t$$

$$e_t / I_t \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum \alpha_i e_{t-i}^2 + \sum \beta_i \sigma_{t-i}^2$$

donde la desviación típica (o la varianza, según los modelos) condicional σ_t es considerada una variable regresora junto con el término constante ω y la variable X_t .

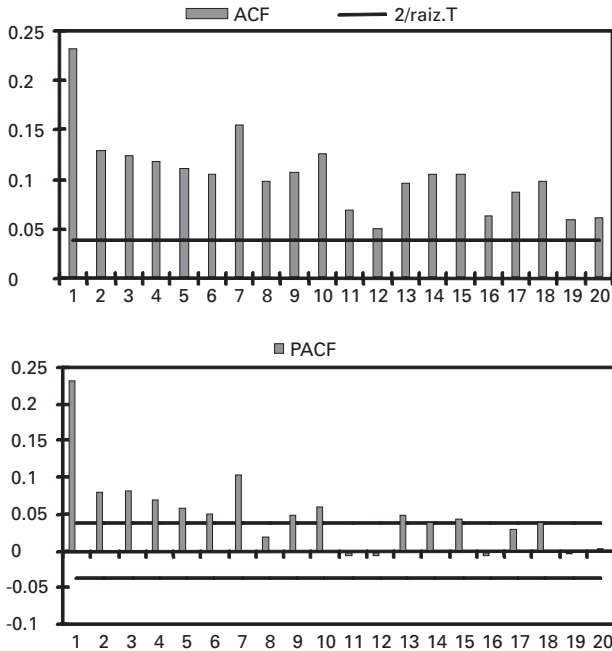
Ya en el análisis empírico, por un lado, en las funciones de autocorrelación simple y parcial de la serie PR_t observamos posibles indicios de autocorrelación de orden uno del error, con lo que introducimos una media móvil en la modelización de la media, que en la estimación resultó ser significativa. Esto puede deberse a lo que se da a conocer en la literatura financiera como el Efecto Fisher de no sincronización en las ventas².

Por otro lado, analizando las funciones de autocorrelación simple y parcial de los residuos al cuadrado, observamos una clara presencia de heteroscedasticidad condicional y decidimos ante los gráficos, comparar un modelo GARCH-M (1,1) con un ARCH-M (q) (donde $q = 4$ que es el máximo orden ARCH con parámetros significativos, que además elimina la estructura del correlograma).

La función de autocorrelación simple permite dudar acerca de la estacionariedad de los residuos al cuadrado, sin embargo, en el gráfico 1 no existen indicios de una varianza permanentemente creciente, por otro

(2) El Efecto Fischer de no sincronización en ventas se debe a un artículo de Irving Fischer (1966) y reposa en la idea de que las acciones de empresas con alta capitalización bursátil cambian más de manos que las de aquellas cuya capitalización es menor. Por tanto, una nueva noticia afectará antes a las primeras y con un cierto retraso a las segundas, produciendo cierta correlación, por ejemplo, en un índice con las mismas ponderaciones.

Gráficos 2a y 2b
CORRELOGRAMA DE LOS RESIDUOS AL CUADRADO



lado, la idea de rentabilidades más y más volátiles para cada período no parece muy realista, al menos en el período estudiado, con lo que descartamos la posible no estacionariedad de la varianza y con ella la utilización de modelos del tipo IGARCH. En cualquier caso, en la fase de estimación, mostraremos especial interés en las condiciones exigidas para que la varianza sea estacionaria.

Para testar la existencia de la relación estudiada entre prima de riesgo y volatilidad, decidimos realizar un contraste de hipótesis del tipo cociente de verosimilitudes en el que el modelo sin restringir es un GARCH-M (1,1) y el modelo restringido, el modelo lineal (sin la varianza como variable regresora y sin modelización de la varianza) y otro, en el que el modelo sin restringir es un ARCH-M (4) siendo el modelo restringido el mismo que el anterior. Los resultados se presentan en el cuadro 2.

A la vista de los resultados anteriores (gráficos 2a y 2b y cuadro 2) parece adecuado estimar un modelo GARCH-M (1,1) para eliminar toda la estructura del correlograma. Además el valor del logaritmo de la verosimilitud es mayor con este modelo que con un ARCH-M (4) y menor la suma residual. Por tanto, elegimos la modelización GARCH-M (1,1) no sólo porque es la que mejor se ajusta sino también porque es la que representa la estructura más parsimoniosa, estando además justificada por el buen funcionamiento empírico que ha demostrado en trabajos previos.

Cuadro 2
CONTRASTE DE RATIO DE VEROSIMILITUDES
PARA HETEROSCEDASTICIDAD

	Log Verosimilitud	Estadístico LR	χ^2 (q)
H ₀ : Modelo sin ARCH	8130.685		
H ₁ : GARCH-M (1,1)	8366.159	470.95	7.81 (q = 3)
H ₀ : Modelo sin ARCH	8130.685		
H ₁ : ARCH-M (4)	8324.715	388.06	11.08 (q = 5)

El modelo que pasamos a estimar es por tanto,

$$PR_t = \omega + \rho\sigma_t + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$$

GARCH (1,1):

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$$

2. ESTIMACIÓN

En esta segunda parte del trabajo pasamos a estimar el modelo que hemos propuesto en el apartado anterior. Un primer análisis de valores atípicos no nos mostró ninguno de ellos altamente influyente con lo que estimamos el modelo base sin intervenciones en la serie. En la primera estimación vemos que la constante no es significativa al 95%, tan sólo lo es al 75%, y que el parámetro ρ , que mide la relación que queremos observar entre la prima de riesgo y la volatilidad, lo es al 88%. Observamos también que el coeficiente de correlación estimado entre la constante y el parámetro ρ es de -0.98 y que la primera resta gran parte de la significatividad a la segunda. Esto se produce porque existe un problema en la situación de la definición de la estimación, es decir el logaritmo de la verosimilitud es casi plano en estos parámetros. En una segunda etapa pasamos a estimar el mismo modelo sin constante en la ecuación de la media y como resultado obtenemos que todos los coeficientes son significativos. Además, previsiblemente la significatividad del parámetro ρ creció hasta el 97% y no encontramos ninguna correlación entre parámetros superior a 0.6 en valor absoluto con lo que concluimos que la estimación está bien definida. Los resultados de este último modelo se presentan en el cuadro 3.

La estimación de los parámetros, covarianzas y desviaciones típicas se ha realizado con el método descrito por Bollerslev y Wooldridge (1992) de Quasi-Máxima Verosimilitud (QMV). Esto se debe a la sospecha fundamentada en la sección 1 de la no normalidad de los residuos, si esto es así, las estimaciones de los parámetros GARCH serán consistentes siem-

pre y cuando las ecuaciones de la media y la varianza estén correctamente especificadas. Como el método de QMV nos permite realizar inferencia, podemos concluir del cuadro 3, que todos los parámetros son significativos, lo cual era previsible ante los valores obtenidos en los contrastes y gráficos anteriores. La primera interpretación es que existe, por tanto, una volatilidad persistente durante el período estudiado. La persistencia en volatilidad medida como $\alpha_1 + \beta$ es de 0.96 resultado que está en línea con los encontrados por Olmeda y Pérez (1995) que estudiaron la no-linealidad del IGBM entre 1989/94 usando un modelo GARCH (1,1). Como ya intuimos en una primera exploración de los datos, esta medida de persistencia en volatilidad está lo suficientemente alejada de 1 como para descartar un modelo GARCH integrado (IGARCH).

Cuadro 3
ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL MODELO GARCH-M
PARA DATOS DIARIOS

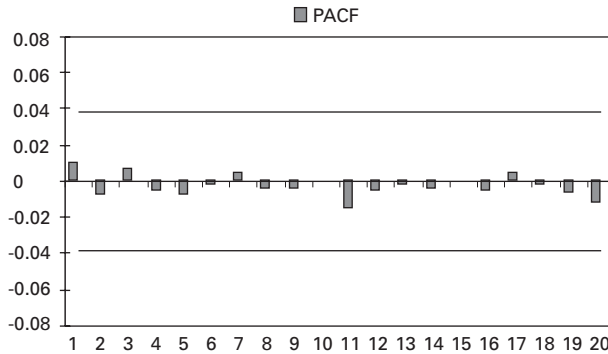
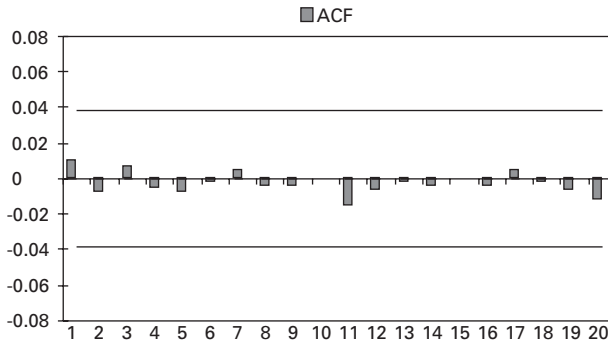
Modelo:		$PR_t = \rho\sigma_t + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$ $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$		
ρ	θ	α_0	α_1	β
0.0437	-0.0913	6.82e ⁻⁰⁶	0.0954	0.8570
(0.0203)	(0.0212)	(2.71e ⁻⁰⁶)	(0.0252)	(0.0228)
Desv. Típica	D-W	Log-verosimilitud		R ²
1.226%	2.04	8366.15		0.36%

(a) Entre paréntesis se da el error estándar de los estimadores.

Al amparo de los resultados podemos entonces decir que la prima de riesgo varía en el tiempo a través de la volatilidad de las rentabilidades diarias. Además encontrando positiva la estimación del parámetro ρ , podríamos afirmar que durante el período 1990/2001 al inversor de la Bolsa de Madrid se le ha compensado suficientemente el riesgo. Estos resultados son análogos a los obtenidos en el período 1975/80 y 1981/90 por Alcalá *et al.* (1993), también con datos del IGBM, donde el parámetro ρ estimado fue de .08 o por Fernández-Rodríguez *et al.* (1999) para el período 1966/1997 donde la rentabilidad condicional esperada resultó positivamente relacionada con la varianza condicional ($\rho = 3.02$), una vez más para datos del IGBM. Esta divergencia en el valor del estimador parece indicar una mayor prima por riesgo asumida en la segunda mitad de los años 60 y primera de los 70. Por otro lado, Bottazzi y Corradi (1991), realizan un análisis semejante en el mercado de valores italiano para el período 1981/90, donde la estimación del parámetro ligado a la volatilidad también fue positiva y significativa. Todo esto nos hace pensar en una cierta estabilidad en el parámetro ρ , al menos en los últimos años; esto es, en la compensación vía rentabilidad por asumir más riesgo de los inversores de los mercados de renta variable.

En un último gráfico presentamos el correlograma de los residuos al cuadrado del modelo estimado. Estos parecen confirmar una buena modelización de la varianza, no presentando ningún tipo de estructura.

Gráficos 3a y 3b
CORRELOGRAMA DE LOS RESIDUOS AL CUADRADO



3. CONCLUSIONES

Como ya apuntábamos en la introducción del trabajo, cabe destacar la importancia de la volatilidad de la rentabilidad en la explicación de la prima de riesgo. La dependencia positiva de ésta con respecto de la volatilidad nos permite decir que durante los últimos diez años el riesgo ha sido suficientemente compensado para los inversores. También hemos podido comparar los resultados con los otros de trabajos similares que difieren en el tiempo o el espacio. En éstos se obtiene de la misma forma una relación positiva entre la volatilidad y la prima de riesgo (o la varianza y la rentabilidad en algunos casos).

Sin embargo, los resultados podrían variar si tuviéramos en cuenta los costes de transacción en la rentabilidad de las carteras. Una pregunta interesante que motiva investigaciones futuras y que parece más realista, es en qué medida la inclusión de estos costes y del gravamen impositivo modifica la estructura de las primas de riesgo.

Por último, el desarrollo de este estudio confirma la bondad de los modelos no lineales ARCH-M y GARCH-M en series financieras donde la corrección de expectativas es importante*.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alcalá, J.T.; Bachiller A. y Olave, P. (1993): "Prima de riesgo y volatilidad en el mercado de valores", *Revista de Economía Aplicada*, vol. 3, pp. 95-117.
- Bollerslev, T. (1986): "Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, vol. 31, nº 3, abril, pp. 307-327.
- Bollerslev, T. y Wooldridge, J. M. (1992): "Quasi-Maximum Likelihood estimation and inference in dynamics models with time-varying covariances", *Econometric Reviews*, vol. 11, nº 2, pp. 143-172.
- Bottazzi, L. y Corradi, V. (1991): "Analysing the risk premium in the Italian stock market: ARCH-M models versus non parametric models", *Applied Economics*, vol. 23, nº 3, marzo, pp. 535-542.
- Campbell, J.; Lo, A. y Mackinlay, A. (1997): *The econometrics of financial markets*, Princeton University Press, Princeton.
- Engle, R.F. (1982): "Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of the United Kingdom inflation", *Econometrica*, vol. 50, nº 4, julio, pp. 987-1007.
- Fernández-Rodríguez, F.; Sosvilla-Rivero, S. y Andrada-Félix, J. (1999): "Technical analysis in the Madrid stock exchange", FEDEA, Documento de trabajo nº 9905.
- Fisher, I. (1966): "Some New Stock Market Indexes", *Journal of Business*, vol. 39, pp. 191-225.
- Flores de Frutos, R. (1995): "A VARMA approach to estimating term premia: the case of the Spanish interbank money market", *Applied Financial Economics*, vol. 5, nº 6, diciembre, pp. 409-418.

(*) Los datos que hemos utilizado de las cotizaciones diarias del Índice General de la Bolsa de Madrid provienen de Bloomberg y los tipos interbancarios a un mes de la base de datos Tempus, del Instituto Nacional de Estadística.

- Freixas, X. y Novales, A. (1992): "Primas de riesgo y cambio de hábitat", *Revista Española de Economía*, Monografía sobre Mercados Financieros Españoles, pp. 135-63.
- Lo, A. y Mackinlay, A. (1995): *A Non-Random Walk Down Wall Street*, Princeton University Press, Princeton.
- Martínez, E. (1998): "Riesgo y rentabilidad de la bolsa: una historia reciente", Nota técnica del IESE, referencia FN-441.
- Novales, A. y Gracia-Díez, M. (1993): "Guía para la estimación de modelos ARCH", *Estadística Española*, vol. 35, nº 132, pp. 5-38.
- Olmeda, I. y Pérez, J. (1995): "Non-linear dynamics and chaos in the Spanish stock market", *Investigaciones Económicas*, vol. 19, pp. 217-248.
- Pérez Rodríguez, J.V.; Sáez, M. y Murillo, C. (1997): "Expectativas y volatilidad condicionada. Los tipos de interés en el mercado interbancario", *Revista de Economía Aplicada*, vol. V, nº 13, pp. 83-107.

ABSTRACT

In this paper, we analyze the relationship between the risk premium and the daily volatility in the Madrid Stock Exchange General Index from October 1990 to November 2001. Firstly, the daily risk premium series is constructed, and several tests that suggest the possibility of a GARCH-M model are made. The empirical analysis between both variables reveals the existence of a positive relation in the whole sample period. Therefore, results imply that the market risk assumed by the investors in the Madrid Stock Exchange has been widely compensated during the 90's.

Key words: risk premium, volatility, GARCH-M models.