

Análisis del concepto de progreso matemático en Ilkka Niiniluoto¹

PILAR BELTRÁN ORENES
Universidad de A Coruña

RESUMEN

La noción de *progreso matemático* constituye uno de los elementos del planteamiento filosófico-metodológico de Ilkka Niiniluoto a los que menor atención se les ha prestado. Para esclarecer esta noción en su enfoque, se estudia su propuesta matemática general, que se asienta en una Epistemología de realismo científico-crítico. Se resalta la conjunción que propone entre una Metodología de carácter «cuasi-empírico», que le aproxima a I. Lakatos, y una Epistemología realista, que le hace sintonizar con la Ontología del *mundo 3* de Karl Popper. También se comparan algunos de sus planteamientos matemáticos con los presentados por Henri Poincaré.

PALABRAS CLAVE

PROGRESO MATEMÁTICO—VEROSIMILITUD—REALISMO MATEMÁTICO—CONSTRUCTIVISMO

ABSTRACT

The notion of mathematical progress is one of the elements of Ilkka Niiniluoto's philosophy and methodology least studied. To clarify it, this paper revises Niiniluoto's philosophy of mathematics, based upon an epistemology of criticalscientific realism. The paper underlines his conjunction between a «quasi-empirical» methodology, close to I. Lakatos', and a realist epistemology, close to Karl Popper's ontology of world 3. Finally, a comparison is outlined between Niiniluoto's and Henri Poincaré's mathematics.

KEYWORDS

MATHEMATICAL PROGRESS—TRUTHLIKENESS—MATHEMATICAL REALISM—CONSTRUCTIVISM

¹ La presente investigación se encuentra dentro del marco del Proyecto XUGA-16701-A95, financiado por la Xunta de Galicia. Se apoya en dos trabajos que fueron presentados, respectivamente, en las Jornadas sobre Progreso científico e innovación tecnológica, La Filosofía de Ilkka Niiniluoto, celebrado en la Universidad de A Coruña, Campus de Ferrol, los días 12

I. COORDENADAS DEL PROBLEMA

LA CARACTERIZACIÓN DEL *PROGRESO MATEMÁTICO* se plantea como una de las cuestiones centrales en la actual Filosofía de la Matemática². Este problema cobró especial relevancia cuando se abandonaron los programas de fundamentación de la Matemática y surgieron nuevos enfoques, como el «cuasi-empirismo», que tiene uno de sus máximos exponentes en Imre Lakatos³, sobre el que se vertieron numerosas críticas. Posteriormente, I. Niiniluoto ha retomado la propuesta «cuasi-empirista» lakatosiana y la ha conectado con su concepción sobre la Matemática, en concreto, la ha relacionado con el concepto de *progreso matemático*⁴.

La Filosofía de la Matemática que propone Niiniluoto se mueve dentro del marco de su concepción general de la Ciencia, que responde a una posición realista de corte científico-crítico⁵. Con este realismo evita la posición empirista por parte del sujeto cognoscente –quien no es un ser meramente pasivo-receptivo en el conocer–, y resalta su actitud crítica cuando conoce. Esta *actitud crítica* del sujeto cognoscente conecta, a su vez, con la característica que hoy suele ser atribuida de modo general a la actividad científica: el ser una actividad autocorrectora⁶.

y 13 de marzo de 1997 y en el marco del I Congreso de Filosofía Iberoamericana, celebrado en la Universidad de Extremadura y la Universidad Complutense de Madrid, Cáceres y Madrid, del 21 al 26 de septiembre de 1998.

² Ph. Kitcher, «Mathematical Progress», *Revue Internationale de Philosophie*, v. 42, n. 4, (1988), pp. 518-540.

³ Los dos libros fundamentales en los que se reúnen casi todas las propuestas sobre la Matemática de I. Lakatos son: *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge: Cambridge University Press, 1976, y *Mathematics, Science and Epistemology*. Cambridge: Cambridge University Press, 1978.

⁴ I. Niiniluoto, «The Growth of Knowledge in Mathematics», en I. Niiniluoto, *Is Science Progressive?*, Dordrecht: Reidel, 1984, p. 205. Niiniluoto critica «el planteamiento de Lakatos en lo que atañe al modo de entender el aumento del conocimiento matemático... A su juicio, aun cuando los matemáticos más representativos puedan cometer errores, es posible defender el modelo acumulativo para el conocimiento matemático», W. J. González, «'Verdad' y 'prueba' ante el problema del progreso matemático», en P. Martínez-Freire (ed.), *Filosofía actual de la Ciencia*, Suplemento 3 de *Contrastes. Revista Interdisciplinar de Filosofía* (1998), p. 340.

⁵ Algunos de los análisis más relevantes del realismo científico-crítico de Niiniluoto son: D. Pearce «Critical Realism in Progress: Reflections on Ilkka Niiniluoto's Philosophy of Science», *Erkenntnis*, 27 (1987), pp. 147-171; W. J. González, «Progreso científico, autonomía de la Ciencia y realismo», *Arbor*, v. 135, n. 532 (1990), pp. 91-109; W. J. González, «Progreso científico e innovación tecnológica: La «Tecnociencia» y el problema de las relaciones entre Filosofía de la Ciencia y Filosofía de la Tecnología», *Arbor*, v. 157, n. 620 (1997), pp. 261-283.

⁶ W. J. González, «El realismo y sus variedades: El debate actual sobre las bases filosóficas de la Ciencia», en A. Carreras (ed.), *Conocimiento, Ciencia y Realidad*, Zaragoza: SIUZ-Ed. Mira, 1992, pp. 19-20.

En este planteamiento científico-crítico, aunque el sujeto no desarrolla un puro constructivismo –el que indaga *no construye* la realidad–, tampoco tiene un papel pasivo en el proceso de adquisición del conocimiento. Ahora bien, en última instancia, la «realidad empírica» constituye el juez último que concede o no validez a los conocimientos adquiridos. Este recurso a la «realidad empírica» como prueba definitiva de validez remite, en última instancia, a la noción de *verdad* como guía que marca el *progreso científico*⁷. Sin embargo, es preciso hacer notar que, mientras el uso de la noción de verdad en los ámbitos empíricos resulta fácil de aplicar (al menos intuitivamente y en el marco de la realista: hay una realidad exterior con la que contrastar), no resulta igualmente sencillo cuando nos movemos en el ámbito matemático. Y es precisamente esta extensión al campo matemático de los parámetros que rigen el *progreso científico* en general, y siempre en unos términos realistas que comportan la posibilidad de verdad, la tarea que intenta llevar a cabo Niiniluoto.

II. EL PROGRESO EN LA CIENCIA EN NIINILUOTO

Dentro del campo general de la Ciencia, la Matemática tiene para Niiniluoto unos rasgos que la hacen diferente de las restantes Ciencias, en cuanto que es una Ciencia de índole formal. Con todo, surge dentro de una concepción filosófica que abarca todo el ámbito científico –incluido el matemático– que está basada en tres ideas clave: i) el *progreso científico* es un factor objetivo de la Ciencia; ii) la actividad científica debe ser autónoma en cuanto progreso de indagación; y, iii) la Ciencia avanza en términos realistas en una dirección concreta, esto es, aproximándose a la verdad⁸. Así, la objetividad científica acompaña al quehacer científico y se inserta en la búsqueda de una mayor verosimilitud. Según Niiniluoto, esta objetividad que corre paralela a la actividad científica es también aplicable a la Matemática en cuanto Ciencia.

Para llevar al ámbito matemático los patrones seguidos en la indagación científica general, Niiniluoto se retrotrae al análisis del relativismo desde distintas perspectivas. El punto de partida elegido por el autor finés es comenzar defendiendo una cierta forma de relativismo en el campo moral. A su entender, los juicios morales se extienden a diferentes ámbitos, los cuales conducen, a su vez, a distintas formas de relativismo. Así, los juicios morales pueden ser referidos al sujeto («protagoreísmo»), a la Cultura («relativismo cultural»), a los lenguajes o marcos conceptuales o teóricos («relativismo conceptual», «relativismo teórico» o «inconmensurabilidad»), a puntos de vista

⁷ *Ibid.*, p. 20.

⁸ I. Niiniluoto, «Is There Progress in Science?», en H. Stachwoiak (ed.), *Pragmatik: Handbuch Pragmatischen Denkens*, Hamburgo: F. Meiner, 1995, pp. 47-54.

(«perspectivismo») y a factores sociales («relativismo social»)⁹. Sin embargo, conviene puntualizar que la relatividad asociada a cada uno de los elementos enunciados arriba apunta, a su juicio, hacia un «relativismo moderado», pero nunca estricto o fuerte. La posibilidad que permite salvar la relatividad moral de caer en el «relativismo moral fuerte» en cada uno de los ámbitos señalados es, a su juicio, el mantener una posición realista moral, que resulta compatible con un cierto relativismo moral –que operaría por exclusión– en los términos siguientes: aunque no pueda saber que uno de los sistemas morales propuestos es verdadero, sí que puede saber, al menos, cuáles de entre todos los propuestos, o entre aquellos que se le presentan en cada caso, son incorrectos¹⁰.

Según Niiniluoto, un «relativismo radical» no permite la posibilidad del progreso, pues, en ese enfoque, todos los sistemas morales son correctos en el mismo sentido. No ocurre lo mismo dentro del ámbito del «relativismo moderado», en el que sí se posible la comparación. Un relativismo de índole moderada permite que puedan ser comparables entre sí todos los sistemas morales y que, a través de principios como consistencia y universalidad, puedan también ser evaluados. Mediante este proceso de evaluación y comparación de distintos juicios morales se puede conseguir un aumento o, cuando menos, la mejora del conocimiento moral. Es decir, unos contenidos mínimos universalizables y, por esto mismo, calificables de «objetivos»¹¹.

El intento de trasladar al campo de la Ciencia el razonamiento aplicable al «relativismo moderado» en el ámbito moral fracasa, porque las cuestiones sobre «verdad» y «realidad» no son relativas en el ámbito científico (el mundo sobre el que se extienden estas nociones es el llamado *mundo 1* de Karl Popper). Tanto la verdad como la falsedad, así como la realidad o no de los objetos sobre los que se investiga, no depende del sujeto que los estudia, son los que Ilkka Niiniluoto llama conceptos «ontológicos» y «semánticos» no relativos. Sí cabe, por el contrario, un «relativismo moderado» en los términos epistemológicos y metodológicos (en los temas de justificación y de racionalidad, por ejemplo)¹². Pero esto responde, a mi juicio, a que tanto las cuestiones metodológicas como las epistemológicas (¿cómo progresa el conocimiento y qué conocemos?) pueden ser relativas por ser constructos de un *mundo 3* propugnado por Niiniluoto y que guarda muchas similitudes con el popperiano.

⁹ I. Niiniluoto, «¿Qué hay de incorrecto en el relativismo?», en E. Bustos, J. C. García Bermejo, E. Pérez Sedeño, A. Rivadulla, J. Urrutia y J. L. Zofio (eds.), *Perspectivas actuales de Lógica y Filosofía de la Ciencia*, Madrid: S. XXI, 1994, p. 262.

¹⁰ *Ibid.*, p. 264.

¹¹ *Ibid.*, pp. 265-268.

¹² *Ibid.*, p. 271.

Así pues, mientras que los enunciados científicos (sobre objetos pertenecientes al *mundo 1*) pueden estar sujetos a teorías de la verdad en términos de correspondencia, la construcción de un lenguaje (que pertenece al *mundo 3*) que sirve para expresarlas y como instrumento para la investigación de la realidad (*mundo 1*) no añade ni condiciona a la realidad misma que permanece independiente de mi manera de interrogarla o de acercarme a ella (*mundo 3*). Así, se puede extender el «relativismo moderado» del campo moral a las afirmaciones justificadas que constituyen creencias nuestras (*mundo 3*). No sucede lo mismo, es decir, no es extendible a lo que la realidad es de hecho (*mundo 1*), ya que, entendida en términos realistas, ésta existe de manera independiente a nuestro conocimiento de ella¹³.

Con esta postura de «realismo científico»¹⁴ en cuanto a cuestiones ontológicas y semánticas, el progreso de la Ciencia¹⁵ puede medirse en términos de verdad, esto es, atendiendo a grados de verosimilitud (entendiendo por «verosimilitud» no la apariencia de verdad, sino la proximidad a la verdad). Así, para Niiniluoto, una teoría es más progresiva que otra cuando su grado de verosimilitud es mayor¹⁶, cuando se aproxima más a la verdad. Por otra parte, la Teoría más verosímil será la que contenga un número mayor de enunciados verdaderos (contrastados en el *mundo 1*). De ahí que, casos como la imposición de la teoría geocéntrica de Ptolomeo, en lugar de la teoría heliocéntrica que se manejó también en la Antigüedad, aunque la última fuera más correcta (adecuada a la realidad), se explican –a juicio de Niiniluoto– precisamente por el mayor número de proposiciones verdaderas que la primera contenía y de las que la segunda carecía por completo. En concreto, mientras que la teoría heliocéntrica sólo tenía una verdad contrastable realmente: «el Sol está en el centro de nuestro sistema», la elaborada por Ptolomeo explicaba con verdad muchos otros fenómenos como podían ser los movimientos planetarios¹⁷, esto es, suponía un incremento de la verosimilitud.

¹³ *Ibid.*, p. 272.

¹⁴ Para un estudio completo sobre el realismo W. J. González, «El realismo y sus variedades: el debate actual sobre las bases filosóficas de la Ciencia», pp. 11-58; y A. Diéguez Lucena, *Realismo científico. Una introducción al debate actual en la filosofía de la ciencia*. Málaga: Universidad de Málaga, 1998.

¹⁵ La concepción realista del progreso científico es analizada en W. J. González, «Progreso científico, autonomía de la Ciencia y realismo», pp. 91-109.

¹⁶ I. Niiniluoto, «Scientific Progress, en I. Niiniluoto, *Is Science Progressive?*, Dordrecht:Reidel, 1984, pp. 93-97.

¹⁷ I. Niiniluoto, «Is There Progress in Science?», p. 55.

II. 1. RELACIONES ENTRE EL PROGRESO CIENTÍFICO Y EL PROGRESO MATEMÁTICO EN NIINILUOTO

Tal como se desprende de lo expuesto hasta el momento, en el planteamiento de Niiniluoto la noción de *progreso científico* está asociada al concepto de *verosimilitud*: se orienta hacia la aproximación a la verdad¹⁸. A su juicio, cuando queremos medir el progreso científico (es decir, si una teoría supone algún progreso respecto de otra antecesora) hemos de medir el grado de verosimilitud. Así, en términos cuantitativos, una teoría será más progresiva que su predecesora cuando la explicación propuesta por la nueva teoría suponga un incremento de verosimilitud¹⁹, esto es, cuando se aproxime más a la verdad.

Esta aproximación a la verdad, como característica unida al *progreso científico*, supone la existencia de un mundo independiente del sujeto cognoscente, en el que *habitan* los «hechos» a los que hacen referencia las teorías rivales o en competencia. Ahora bien, mientras en las Ciencias de la Naturaleza e, incluso, en las Ciencias Sociales es posible establecer estos grados de verosimilitud acudiendo a la realidad extramental que intentan explicar –el *mundo 1* de Popper–, no ocurre lo mismo en el caso de la Matemática. La Matemática, a diferencia de las Ciencias Empíricas, no cuenta con una realidad externa en la que contrastar las explicaciones que presenta como válidas. En ella, las explicaciones y los «hechos» aparecen en un mismo nivel, que es el *mundo 3* de Popper.

Sin embargo, aunque el tipo de Ciencia sea esencialmente distinto –formal frente a empírico–, Niiniluoto propone una noción de *progreso matemático*, entendida como incremento de verosimilitud. Este concepto de *progreso matemático* se rige entonces por los mismos parámetros que el *progreso científico* en general, esto es, mediante la verosimilitud²⁰.

Para lograr la aplicación correcta de este concepto, Niiniluoto conjuga el concepto de *progreso matemático* defendido por M. Hallett –«Criterio de Hilbert», y una propuesta que guarda semejanza con los Programas de Investigación Científica de I. Lakatos o las Tradiciones de Investigación de L. Laudan, con una Metodología «cuasi-empirista». Pretende así abarcar dos vertientes de la Matemática: la parte deductiva, de cuya verdad y progreso daría cumplida cuenta el «Criterio de Hilbert», y la parte inductiva y generalizadora de la Matemática, que tendría que ser abordada desde una Metodología «cuasi-empírica»²¹.

¹⁸ Las características que Niiniluoto asigna al progreso científico son analizadas en: W. J. González, «Progreso científico, autonomía de la Ciencia y realismo», pp. 96-100

¹⁹ I. Niiniluoto, «Scientific Progress», en I. Niiniluoto, *Is Science Progressive?*, pp. 93-97.

²⁰ I. Niiniluoto, *Truthlikeness*, Dordrecht: Reidel, 1987.

²¹ I. Niiniluoto, «Reality, Truth and Confirmation in Mathematics –Reflections on the Quasi-Empiricist Programme», en J. Echeverría, A. Ibarra y Th. Mormann (eds.), *The Space of*

Esta conjunción de Niiniluoto es, a mi entender, una manera viable de mantener actualmente una posición realista coherente dentro del ámbito de la Filosofía de la Matemática, a saber: «que se pueda ser realista y constructivista al mismo tiempo»²², como asegura Niiniluoto.

III. LA MATEMÁTICA EN NIINILUOTO: EL PROGRESO Y LA EPISTEMOLOGÍA

Tras pasar la idea del *progreso* general de la Ciencia –en términos de incremento de verosimilitud– basada en las Ciencias de la Naturaleza, que permiten contrastar los resultados con el mundo «real»: *mundo 1*, a una disciplina científico-formal como la Matemática implica añadir algún elemento más, pues no es posible la contrastación practicada en el campo de las Ciencias de la Naturaleza. El ámbito matemático se *localiza* en el *mundo 3*. Es, entonces, el mismo mundo en el que Niiniluoto localiza las cuestiones epistemológicas y metodológicas; en este caso, los criterios de contrastación sobre la «realidad» deberían ser relativos al ser propio de los objetos pertenecientes a constructos de este *mundo 3*, que son construcciones humanas al fin y al cabo. Lo anterior conduciría a una posición relativista moderada similar a la que se aplica al caso de los juicios morales. Sin embargo, a juicio de Niiniluoto, también es posible mantener en este ámbito científico una noción de *progreso* relacionada con la *verdad*, aunque no se exprese exactamente en términos de verosimilitud.

El criterio empleado para medir el *progreso* en la Matemática es el propuesto por Michael Hallett²³ (el denominado por Hallett *Criterio de Hilbert*), que no es otro que el Criterio de Hilbert adaptado a la *Metodología de los Programas de Investigación Científica*. Según Niiniluoto, el intento de Hallett no obtiene los resultados que pretende, esto es, no consigue la correcta adaptación del del Criterio a la Metodología de Programas, por lo que él intenta un nuevo camino para conseguir este fin. Para Niiniluoto, resulta especialmente relevante la posibilidad de reunir de manera histórica a los matemáticos en función de la *Filosofía de la Matemática implícita*²⁴ que mantienen, es decir, acudiendo a las asunciones que aceptan respecto a la existencia de los objetos matemáticos, la naturaleza de las pruebas aceptables en la Matemática, o los

Mathematics. Philosophical, Epistemological and Historical Explications, Berlin: Walter de Gruyter, 1992, pp. 66-69.

²² I. Niiniluoto, «Reality, Truth and Confirmation in Mathematics –Reflections on the Quasi-Empiricist Programme», pp. 63-64.

²³ M. Hallett, «Towards a Theory of Mathematical Research Programmes», I y II, *British Journal for the Philosophy of Science*, 30 (1979), pp. 1-25 y pp. 135-159.

²⁴ I. Niiniluoto, «The Growth of Knowledge in Mathematics», en I. Niiniluoto, *Is Science Progressive?*, pp. 200-201.

criterios de progreso matemáticos. Agrupar a los matemáticos bajo las diferentes Filosofías de la Matemática implícitas permite la clasificación según «Programas de Investigación» (en el sentido de Imre Lakatos) o de «Tradiciones de investigación» (en la terminología de L. Laudan). La Historia de la Matemática tiene, no obstante, un peligro: la tendencia a verla desde una perspectiva filosófica concreta, esto es, desde una determinada Filosofía de la Matemática implícita, que conduzca a desvirtuar la Historia real de la Matemática²⁶.

A pesar del peligro intrínseco que conlleva la división de la comunidad científico-matemática en sus respectivas Filosofías de la Matemática, esto no anula –según Niiniluoto– la necesidad y la pertinencia de hacerlo en aras de la simplicidad que comporta de cara al análisis. Además, esta otra cuestión: la diversidad de parcelas que, desde el siglo XIX²⁷, han ido apareciendo en progresión exponencial respecto del tiempo. Este hecho hace que sea necesario hablar –a juicio de Niiniluoto– de «progreso» y «verdad» en términos de Programas de Investigación Científica. Así, para los matemáticos que se encuentran en una misma tradición filosófica implícita una teoría T' supone progreso con respecto a otra T , si implica un teorema verdadero B , tal que B no es implicado por T y tampoco ha sido usado en la construcción de T' (ésta sería la interpretación del Criterio de Hilbert propuesto por Hallett en términos de «Programas de Investigación Científica» lakatosianos)²⁸.

Ahora bien, la verdad del teorema –que puede servir para determinar el progreso o no de una teoría respecto a otra– plantea, de nuevo, el problema que surgía con la verdad de los juicios morales. Así pues, parece que el «realismo moderado» en el ámbito matemático, por ser sus objetos construcciones humanas pertenecientes al mundo 3 y que no pueden ser contrastadas, se hace difícil de mantener. Tampoco parece viable la solución adoptada para algunos juicios morales que se pueden establecer a través del diálogo, pasando a ser los mínimos aceptados de forma unánime. Para la Matemática no existe la negociación posible, porque se parte de una determinada Filosofía implícita, donde está establecido desde el mismo principio lo que puede ser «verdad», así como tampoco es negociable la forma de alcanzar o de establecer la verdad.

Por otra parte, el progreso matemático entendido dentro de cada uno de los Programas de Investigación existentes (las distintas Filosofías de la Matemática implícitas), parece responder más a un tipo de desarrollo acumulativo cercano al que se produce en los períodos de Ciencia Normal de Thomas Kuhn²⁹.

²⁵ *Ibid.*, p. 200.

²⁶ *Ibid.*, p. 201.

²⁷ *Ibid.*, pp. 194-196.

²⁸ *Ibid.*, pp. 201-202.

²⁹ *Ibid.*, p. 203.

Ahora bien, desde la misma dinámica matemática –entendida como Programas de Investigación que se desarrollan desde una Filosofía de la Matemática implícita– se puede establecer, a juicio de Niiniluoto, un criterio realista de progreso matemático acumulativo (criterio que Niiniluoto toma de Hilary Putnam). Este criterio es expresable con la siguiente fórmula de un enunciado condicional «Si-entonces»; de esta manera, lo que realmente se establece y sobre lo que se dice que es verdadero no es el enunciado mismo (que en el caso matemático es una construcción perteneciente al mundo 3), sino la fórmula «Si-entonces»³⁰.

La concreción de esta fórmula podría hacerse explícita, a mi juicio, de la siguiente manera: Si un enunciado se encuentra dentro de una teoría determinada, elaborada desde una Filosofía de la Matemática implícita concreta (un «Programa de Investigación» específico), será verdadero dentro de esa teoría y en esa particular concepción filosófica que asume condiciones semánticas, epistemológicas, metodológicas y ontológicas concretas, pero que pretende siempre ser un resultado extendible a toda parcela de la Matemática y que pueda ser asumido desde todas las Filosofías de la Matemática implícitas que concurren.

Consecuentemente, el problema de la inconmensurabilidad de las teorías matemáticas, que conduciría a un relativismo fuerte, sólo puede surgir en el momento en el que las teorías que se pretende comparar pertenezcan a Programas de Investigación distintos, pues parten de conceptos definidos de forma diferente según sean sus asunciones fundamentales³¹. Así pues, sólo podrán ser comparadas teorías que pertenezcan al mismo Programa de Investigación. De esta manera, salva Niiniluoto el problema de verse abocado o a la posición relativista fuerte, o bien a la constructivista, que no admite la posibilidad de relacionar «progreso» y «verdad», por tratarse de objetos pertenecientes al mundo 3 (cada teoría describe una parcela de la realidad del mundo 3, y todas son, por lo tanto, igualmente válidas en cuanto constructos, lo que conduciría a un «relativismo fuerte» que no parece darse de hecho en el campo matemático, pues suele darse comúnmente la casi unanimidad respecto a la validez de los resultados obtenidos).

Mantiene, pues, un cierto «relativismo moderado», también en el ámbito matemático, respecto de los resultados verdaderos, establecidos dentro de un determinado Programa de Investigación Científico, resultados que quedarán establecidos definitivamente y serán usados con posterioridad dentro de programas de investigación más amplios que los incluyan o en otras parcelas, produciéndose de esta manera una especie de teoría de la integración³².

³⁰ *Ibid.*, p. 205.

³¹ *Ibid.*, pp. 205-207.

³² *Ibid.*, pp. 196-199.

Ahora bien, esta primera aproximación a la noción de progreso matemático sólo contempla, en principio, los progresos en ámbitos matemáticos deductivos, esto es, en aquellos cuyo conocimiento puede ser a priori y sus verdades se consideran analíticas. Cubre así parcelas como las que se identifican con las «Matemáticas euclidianas», por usar la expresión de Lakatos³³.

Otro tipo de progreso se produce cuando se alcanza un teorema matemático mediante generalizaciones inductivas, o cuando se obtiene la justificación del teorema gracias a los sucesivos intentos fallidos de refutación. Esta clase de progreso responde a una Metodología matemática «cuasi-empírica», en la que el incremento del conocimiento se produce a través del conocimiento por eliminación sucesiva de errores. Para Niiniluoto, en este tipo de pruebas no cabe hablar de empirismo genuino, pues las generalizaciones siempre son fruto de la relación establecida entre proposiciones sobre entidades del mundo³⁴, de modo que no puede producirse la contrastación. Esta última cuestión hace necesarias las matizaciones sobre el patrón por el que se pueden medir los progresos matemáticos de este tipo.

En este punto, Niiniluoto sigue la tesis de Popper, para quien las entidades matemáticas residen en el mundo 3, que los humanos han construido pero del que no tienen un control directo³⁵. La existencia de problemas irresolubles sirve a Niiniluoto para probar la falta de control que los humanos ejercen sobre el mundo 3, el mundo que han construido³⁶.

Nuestro acceso al conocimiento matemático se realiza como la «construcción» o «re-creación» de los objetos sobre los que pretendemos adquirir conocimiento³⁷. Si podemos afirmar la posibilidad de conocer un mundo del que no tenemos un control completo, a pesar de que haya sido construido por nosotros, entonces se está suponiendo la independencia de ese mundo matemático y, en consecuencia, se defiende que cabe la posibilidad de llevar a cabo sobre él un proceso de conocimiento similar al que se produce en el ámbito del mundo 1, que corresponde al conocimiento de las realidades empíricas; cabe, en definitiva, alcanzar un conocimiento «cuasi-empírico». Esto conlleva, a su vez, a una objetividad matemática, pero dentro del marco de cada una de las Filosofías de la Matemática implícitas que, a la postre, son las que marcan las reglas permitidas

³³ I. Lakatos, *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery*, p. 5.

³⁴ I. Niiniluoto, «Reality, Truth and Confirmation in Mathematics –Reflections on the Quasi-Empiricist Programme», p. 70.

³⁵ K. Popper, *Objective Knowledge*. Oxford: Clarendon Press, 1972, 6ª reed. revisada 1989, capítulos 3 y 4.

³⁶ I. Niiniluoto, «Reality, Truth and Confirmation in Mathematics –Reflections on the Quasi-Empiricist Programme», p. 64.

³⁷ *Ibid.*, p. 68.

para llevar a cabo la «construcción» o la «re-creación» permitidas en cada caso. Consecuentemente, la realidad a la que referimos el incremento de verosimilitud es la que está en el marco de las respectivas Filosofías implícitas; y es en este sentido en el que cabe la posibilidad de la objetividad en el campo matemático de una manera afín a la que cabe hallar en el ámbito empírico.

IV. LOS CONCEPTOS DE PROGRESO MATEMÁTICO EN LOS ENFOQUES DE HENRI POINCARÉ E ILKKA NIINILUOTO: UNA COMPARACIÓN

Henri Poincaré e Ilkka Niiniluoto poseen un rasgo inicial común: ambos se formaron en la Matemática y, después, se dedican a hacer Filosofía. Ahora bien, mientras Poincaré pone el énfasis en el campo mismo de la Filosofía de la Matemática, donde presenta el progreso matemático como un quehacer humano de índole subjetivo-innovadora, Niiniluoto centra en cambio su atención más en la Filosofía general de la Ciencia, de modo que su idea del crecimiento matemático conecta con el progreso científico en general. Pertenecen, sin duda, a dos épocas distintas: en una la Matemática se veía a través de sus relaciones con la Lógica³⁸; en la otra, la Matemática aparece como una Ciencia dotada de historicidad y con rasgos semejantes a las Ciencias Empíricas³⁹. A continuación se trazan algunos elementos del progreso matemático en ambos autores, que puedan servir para arrojar luz sobre el problema del progreso matemático por la vía de la comparación, entre las propuestas de ambos autores.

IV. I. LA EPISTEMOLOGÍA Y LA METODOLOGÍA EN EL PLANTEAMIENTO DE POINCARÉ

En Poincaré hay un nexo entre Epistemología matemática y Metodología matemática. El tipo de conocimiento matemático es intuitivo, de origen psicológico-individual, y pertenece a la Matemática como actividad autónoma; es un quehacer distinto del conocimiento lógico, y diferente también del conocimiento científico-natural. La Matemática usa el conocimiento intuitivo, pero no se reduce a él, y conecta también con el conocimiento físico, sin llegar tampoco a la identificación con él. Para Poincaré, conocer en la Matemática deriva de construir, tarea que se apoya directamente en la intuición.

Metodológicamente, la tarea constructiva de la Matemática en Poincaré da paso a un método de desarrollo del conocimiento matemático que es intui-

³⁸ G. Frege, *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Halle: Neuberger, 1879; B. Russell y A. N. Whitehead, *Principia Mathematica*, 3 vols., Cambridge: Cambridge University Press, 1910, 2ª ed. 1927. (reimpr. 1973).

³⁹ I. Lakatos, *Proofs and Refutations. The Logic of mathematical Discovery, y Mathematics, science and epistemology. Philosophical Papers*, v. 2.

tivo. En lo que se podría denominar como su primera etapa de su concepción de la Matemática, el incremento del conocimiento matemático estaba completamente asociado a la inducción⁴⁰; mientras que, en la segunda etapa, también sobre la Matemática, se abrió a la idea de la deducción⁴¹. El seguimiento de las reglas inductivas o deductivas indistintamente sirve para la tarea de ampliar el conocimiento matemático, pero el aumento mismo no deriva de las reglas sino el proceso creativo que se da en el sujeto matemático. De hecho, lo que propone Poincaré es una Psicología del descubrimiento científico a la que luego el rigor lógico dé forma, para que el contenido intuitivo quede, así, plasmado de manera adecuada.

Quizá llame más la atención que, en la concepción de Poincaré, el progreso matemático haya estado directamente enraizado en el método inductivo, y que sólo después –en una época tardía– haya aceptado el método deductivo como vía de innovación matemática. Esto contrasta con el ambiente dominante en su época, pues la mayor parte de sus contemporáneos matemáticos (en especial, logicistas y formalistas) eran partidarios decididos de la deducción. Esto se refuerza aún más en el caso de los geómetras, que durante siglos han sido los claros defensores del método deductivo (axiomático-deductivo, para ser más exactos). Por eso, conviene detenerse en el nexo que establece –sobre todo, en la primera etapa– entre el progreso matemático y la invención matemática.

En su primera etapa, la inducción matemática es el medio de progreso matemático ya que, según Poincaré, es el único método matemático capaz de producir el incremento epistémico. Considera que, por ser la única inferencia que permite el paso de los casos particulares al caso general, la inducción es la única que puede aportar en su conclusión algún resultado novedoso con respecto a las premisas de partida. La inducción posee, además, la capacidad de extender los resultados a todos los casos posibles, con lo que la ve también como el único método capaz de hacer que la Matemática pueda instaurarse como disciplina científica, pues entiende que sólo se puede hablar de «Ciencia» cuando las proposiciones a las que nos referimos tratan de lo general. El progreso en Ciencia, en toda Ciencia, es entendido por Poincaré en términos de generalización, es decir, una teoría será más progresiva que otra si es capaz de producir un número mayor de generalizaciones (entendiendo las generalizaciones tanto como proveedoras de resultados nuevos, así como por su capa-

⁴⁰ H. Poincaré, «Sur la nature du raisonnement mathématique», en *La Science et l'Hypothèse*, Paris: Flammarion, 1902, en la edición con prefacio de Jules Vuillemin, 1968, (reimpr. 1989), p. 42.

⁴¹ H. Poincaré, «L'avenir des Mathématiques», en *Science et Méthode*, Paris: Flammarion, 1908, p. 27.

cidad de ampliar el campo proporcionando aplicaciones, a otros ámbitos, de las generalizaciones obtenidas en un campo concreto)⁴².

En cuanto que la inducción comporta la capacidad de construir resultados que no existían, la inducción tiene, para Poincaré, un carácter progresivo. Permite –a su juicio– llegar a donde no habría sido posible acceder a través de la deducción silogística. Así, un encadenamiento de silogismos, que parte de unas determinadas premisas, no puede concluir más que una nueva formulación de aquello que se encontraba ya expresado en las premisas de partida. No se produce entonces la novedad en los resultados porque, en la «demostración», no hay lugar para ver si se realizan los pasos deductivos de forma correcta, ya que la aplicación de las leyes y reglas lógicas produce el paso de una proposición a otra, mediante la mera transformación de la(s) proposición(es) de la(s) que se partía. La proposición alcanzada a través de una deducción puede tener aspecto de nueva, pero no es sino otra versión de la(s) proposición(es) de la que procede de manera más o menos directa⁴³.

Advierte, no obstante, que esa transformación, desde las proposiciones de partida a las proposiciones que se obtienen finalmente, se produce a través de un conjunto de pasos que puede llegar a ser muy numeroso, con lo que resulta difícil, en ocasiones, el reconocer la relación entre la proposición a la que se llega y las proposiciones de las que se partía.

Que Poincaré acepte, en su etapa de madurez, la relevancia del método deductivo, a la hora de obtener nuevos resultados, sólo llama la atención respecto de su evolución filosófico-matemática, pues el método deductivo estaba ya sobradamente consolidado en el campo matemático. Ahora bien, en su enfoque metodológico, la deducción –al igual que la inducción y, en general, la «demostración matemática»– acaba descansando en la intuición matemática⁴⁴, verdadero anclaje de todo su edificio matemático. Esto hace difícil que el método matemático tenga en él una sólida consideración, porque deslinda, de hecho, deducción e inducción matemáticas respecto de la deducción e inducción lógicas; y, de otro lado, el progreso en la construcción matemática depende, a la postre, del sujeto mismo que intuye los conceptos matemáticos. Por eso, cabe criticar a Poincaré en lo relativo al establecimiento de un método de adquisición de conocimiento matemático, porque si se acepta que la Metodología matemática debe tener un componente objetivo, no parece conveniente hacer descansar el peso básico en quien hace la Matemática –el sujeto como tal–, pues es el proceso mismo de crecimiento cognoscitivo (signo del progreso matemático) lo que interesa a la Metodología matemática.

⁴² H. Poincaré, «Sur la nature du raisonnement mathématique», p. 45.

⁴³ *Ibid.*, p. 32.

⁴⁴ H. Poincaré, «Les définitions mathématiques et l'Enseignement», en *Science et Méthode*, p. 137.

IV. 2. PRINCIPALES DIFERENCIAS ENTRE LOS CONCEPTOS DE PROGRESO MATEMÁTICO
PRESENTADOS POR POINCARÉ Y NIINILUOTO

A la vista de los dos enfoques del progreso matemático, el psicológico-intuitivo-constructivo, defendido por Poincaré, y el objetivo-histórico-acumulativo, propuesto por Niiniluoto, quedan suficientemente claras las diferencias. En el primer caso se muestra que el progreso matemático se da, ante todo, como actividad humana de agentes, mientras que en el segundo caso tenemos la primacía del proceso mismo de avance histórico de los contenidos matemáticos. Poincaré corre el riesgo de un posible solipsismo, del que quiere evadirse a través del énfasis en la tarea demostrativa; Niiniluoto puede verse envuelto en un exceso de objetividad matemática que lleva a una nítida atemporalidad y a una acumulación que desea evitar con el «relativismo moderado» en los planos metodológico y epistemológico.

Tanto uno como otro desea reflejar la práctica científica real del matemático, pero quizás no han logrado la destreza de I. Lakatos que, al defender la índole cuasi-empírica de la Matemática, dio una nueva perspectiva a la Matemática capaz de hacer visible la historicidad de la prueba matemática como guía del progreso. A mi juicio, sin embargo, hay que reconocer la labor de ambos: Poincaré con su aportación sobre el papel central que la prueba tiene en el progreso matemático; Niiniluoto con el intento de medir el progreso matemático y el progreso científico en general desde el marco general de aproximación a la verdad, que late normalmente bajo el quehacer matemático de quienes desarrollan de hecho la Matemática.

V. VALORACIÓN DE LA PROPUESTA DE NIINILUOTO

La existencia de problemas irresolubles lleva a Niiniluoto a considerar seriamente la posibilidad de mantener una Metodología «cuasi-empírica» de carácter constructivista en el ámbito matemático, teniendo como fondo una Epistemología de corte realista, sin que esto suponga, a su juicio, una incoherencia interna ya que respeta la idea de objetividad, idea clave para el realismo⁴⁵.

Un punto crucial para dictaminar sobre el progreso matemático, según Niiniluoto, está en que existe un mundo, que hemos creado, pero que tiene independencia (como los hijos respecto de los padres). Ahora bien, la independencia del mundo $\mathfrak{3}$ respecto de sus creadores es planteada por Niiniluoto como el resultado de un proceso de creación en el que el creador pierde, si no toda, buena parte del control sobre sus creaciones. Pero la pérdida de control sólo es

⁴⁵ W. J. González, «Semántica Anti-realista: Intuicionismo matemático y concepto de verdad», *Theoria*, 12-13 (1990), pp. 149-170.

posible, a mi entender, cuando lo creado queda expuesto a múltiples interpretaciones, como ocurre con una obra de Arte. Ahora bien, esta identificación de la Matemática como un Arte y no como una Ciencia conduciría a perder buena parte de la objetividad perseguida, lo que haría peligrar el poder sostener una Epistemología realista.

Cabe, sin embargo, una solución a este problema que sería considerar a la Matemática como actividad humana⁴⁶ –lo que conecta en buena medida con la propuesta de Poincaré–, dejando, de esta manera, margen para los errores y, consecuentemente, para la posibilidad de que se planteen problemas que, en principio, no se pueden resolver. Parafraseando a N. Rescher, haciendo de la Matemática, nuestra Matemática⁴⁷.

En este caso, los problemas no resueltos serían fruto de la mala caracterización de los objetos matemáticos que han hecho los humanos que los idearon; en definitiva, de un método erróneo. Queda abierta, a mi entender, la posibilidad de emplear una Metodología constructivista, falible y revisable, sin que esto impida que se mantenga, al mismo tiempo, una Epistemología realista, pues nos vamos aproximando a la verdad, como sostiene Niiniluoto. No son los conocimientos en sí los que son falibles, pues su objetividad queda garantizada en la misma medida en que lo está para las Ciencias Empíricas, sino que, a lo sumo, son revisables los métodos para alcanzarlos, pues reside en los sujetos la correcta aplicación de cada uno de los pasos que conducen a la conclusión.

Pilar Beltrán Orenes es ayudante de Lógica y Filosofía de la Ciencia en la Universidad de La Coruña. Autora de «Semántica de las nociones matemáticas de 'prueba' y 'demostración'», en C. Martín Vide (ed.), *Actas del VIII Congreso de Lenguajes naturales y Lenguajes formales*. Barcelona: PPU, 1992, pp. 181-187, y «La Matemática de Lakatos: el papel de la prueba en la Metodología», en J. Arana (ed.), *La Ciencia de los filósofos*. Sevilla: Universidad de Sevilla, 1996, pp. 305-320.

Dirección postal: Facultad de Humanidades, Universidad de La Coruña, Campus de Esteiro, c/ Dr. Vázquez Cabrera, s/n, E-15403 Ferrol-La Coruña.

E-mail: pbeltran@udc.es

⁴⁶ W. J. González, «Mathematics as Activity», *Daimon*, 3 (1991), pp. 113-131.

⁴⁷ N. Rescher, «Nuestra Ciencia en tanto que nuestra», *Daimon*, 6 (1993), pp. 1-9.