Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen XIII No. 1 (2006), pp. 43–49

EL OPERADOR DE PUNTOS AC-CERRADOS

CLAUDIA MILENA MONSALVE (∗)
ABEL AUGUSTO RODRÍGUEZ (∗∗)
JESÚS ANTONIO ÁVILA (∗ ∗ ∗)

Resumen. En este artículo se hace un estudio del operador de puntos ac-cerrados, se definen algunas categorías especiales para ver este operador como un funtor y también se observa como un morfismo de conjuntos ordenados.

Palabras claves. Espacio topológico, poset, punto de acumulación, categoría, funtor.

Abstract. A study of the ac-closed points operator is presented. Special categories are introduced allowing to see this operator as a functor. One can also regard it as a morphism between posets.

Key words and phrases. Topological space, poset, accumulation point, category, functor.

2000 AMS Sub. Class. 54B30, 18B30, 18B35.

1. Introducción

En el estudio de la compacidad de los espacios topológicos de Alexandrov y T_0, L. Acosta y E. Lozano [1], mostraron que esta propiedad se encuentra estrechamente relacionada con el conjunto de puntos cerrados del espacio. En particular probaron que si este conjunto es compacto y si todo punto tiene en su adherencia al menos un punto cerrado, entonces el espacio es compacto. Y más aún, si el espacio es T_0 el recíproco es verdadero. Según esto, dicho subespacio estaría

(∗) Claudia Milena Monsalve. E-mail: cmmilena@hotmail.com

(∗∗) Abel Augusto Rodríguez. Colegio Champagnat Ibagué. E-mail: abeldat@hotmail.com

(∗ ∗ ∗) Jesús Antonio Ávila. Profesor Depto. de Matemáticas y Estadística, Universidad del Tolima (Col.). E-mail: javila@ut.edu.co.

reflejando propiedades topológicas del espacio X. Basados en esto, L. Acosta y P. Gaona en [2] definieron los subespacios $\gamma(X) = \{x \in X \mid \{x\} \text{ es cerrado}\}$ llamado el conjunto de puntos cerrados y $\varepsilon(X) = \{x \in X \mid \overline{\{x\}} \cap \gamma(X) = \varnothing\}$ llamado el conjunto de puntos libres. Ellos estudiaron los operadores γ y ε, probando que son idempotentes y mutuamente ortogonales y realizaron además un estudio categórico de los mismos. Posteriormente siguiendo las ideas de [1], los autores definieron en [6] los subespacios $\delta(X) = \{x \in X \mid \{x\}' \text{ es cerrado en } X\}$ y $\lambda(X) = \{x \in X \mid \{x\}' \cap \delta(X) = \varnothing\}$; llamados conjunto de puntos ac-cerrados y ac-libres respectivamente. Allí se probó entre otras cosas que el operador δ es idempotente y que en general estos operadores no son ortogonales. Ahora bien, inspirados en las ideas de [2], en este trabajo se observa el operador δ como funtor, definiendo las categorías Top_{acc} y Top_{T_D} y se presenta un adjunto izquierdo para él. También se estudia este operador como morfismo de conjuntos ordenados de $(Top\,(X), \subseteq)$ en $(P\,(X), \subseteq)$ y se presentan algunas propiedades del mismo, en cuanto a inyectividad y sobreyectividad. Finalmente se hacen algunos comentarios relacionados con el operador λ y se muestra un resultado análogo al obtenido en [1], cuando $\delta\,(X)$ es compacto y $\lambda\,(X) = \varnothing$.

2. El operador δ como funtor

En esta sección se introducen las categorías Top_{acc} y Top_{T_D}, mediante las cuales se puede observar al operador δ como funtor. Además se encuentra un adjunto a izquierda para el mismo, mostrándose así que δ preserva límites y en particular productos. Recuérdese que un espacio topológico X se llama T_D, si para todo $x \in X$ se tiene que $\{x\}'$ es cerrado ó equivalentemente si todo punto es la intersección de un abierto con un cerrado [4]. Las nociones categóricas usadas aquí pueden ser consultadas en [3].

Definición 1. *Una función $f : X \to Y$ preserva puntos ac-cerrados si para todo punto ac-cerrado $x \in X$, se tiene que $f\,(x)$ es un punto ac-cerrado en Y.*

Se tiene entonces que toda función cuyo codominio es un espacio T_D ó cuyo dominio no tiene puntos ac-cerrados, preserva puntos ac-cerrados.

Nótese que $f : X \to Y$ preserva puntos ac-cerrados, si y sólo si, $f\,|_{\delta(X)}$ es una función de $\delta\,(X)$ en $\delta\,(Y)$. Además si f es continua entonces $f\,|_{\delta(X)}$ también lo es. Ahora si X, Y, Z son espacios topológicos y $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ son funciones continuas que preservan puntos ac-cerrados, entonces se tiene que $g \circ f$ es una función continua que preserva puntos ac-cerrados. Por lo tanto al considerar como objetos a los espacios topológicos y como morfismos a las funciones continuas que preservan puntos ac-cerrados se obtiene una categoría, la cual será denotada como Top_{acc}. También considerando como objetos a los espacios topológicos T_D y como morfismos a las funciones continuas, se obtiene la categoría Top_{T_D}. Con estas observaciones se tiene entonces la siguiente proposición.

Proposición 2. $\delta : Top_{acc} \to Top_{T_D}$ *es un funtor.*

Demostración. En el siguiente diagrama se muestra cómo actúa el funtor δ en objetos y morfismos.

$$\begin{array}{ccc} Top_{acc} & \to & Top_{T_D} \\ & & \\ X & \to & \delta(X) \\ & & \\ f\downarrow & & \downarrow \quad \delta(f) = f\mid_{\delta(X)} \\ & & \\ Y & \to & \delta(Y) \end{array}$$

Para un objeto X en Top_{acc} se tiene que $\delta(X)$ es un objeto en Top_{T_D}, además $\delta(f)$ está bien definido como se notó anteriormente. Ahora δ preserva la composición ya que $(\delta(f) \circ \delta(g))(x) = f\mid_{\delta(Y)} \circ g\mid_{\delta(X)})(x) = f\mid_{\delta(Y)} (g\mid_{\delta(X)} (x)) = f(g\mid_{\delta(X)} (x)) = (f \circ g)\mid_{\delta(X)} (x) = \delta(f \circ g)(x)$. Finalmente $\delta(1_X) = 1_X\mid_{\delta(X)} = 1_{\delta(X)}$. □

Ya que δ es un funtor es natural preguntarse qué propiedades tiene, en particular si preserva límites y productos. Con la proposición siguiente se da una respuesta a este interrogante.

Proposición 3. $\delta : Top_{acc} \to Top_{T_D}$ *es adjunto a derecha del funtor inclusión* $i : Top_{T_D} \to Top_{acc}$.

Demostración. Sean X un espacio T_D y Y un espacio topológico. Considérense las funciones $\alpha_{X,Y} : [i(X), Y]_{Top_{acc}} \to [X, \delta(Y)]_{Top_{T_D}}$, definida como $\alpha_{X,Y}(f) = \delta(f)$ y $\beta_{X,Y} : [X, \delta(Y)]_{Top_{T_D}} \to [i(X), Y]_{Top_{T_{acc}}}$, definida como $\beta_{X,Y}(g) = j_Y \circ g$ donde j_Y es la inclusión de $\delta(Y)$ en Y. Se tiene entonces que $\alpha_{X,Y}$ y $\beta_{X,Y}$ son inversas la una de la otra, pues $(\beta_{X,Y} \circ \alpha_{X,Y})(f) = \beta_{X,Y}(\alpha_{X,Y}(f)) = \beta_{X,Y}(\delta(f)) = j_Y \circ \delta(f) = f$ y $(\alpha_{X,Y} \circ \beta_{X,Y})(g) = \alpha_{X,Y}(\beta_{X,Y}(g)) = \alpha_{X,Y}(j_Y \circ g) = \delta(j_Y \circ g) = \delta(j_Y) \circ \delta(g) = 1_{\delta(Y)} \circ g = g$. Luego $\alpha_{X,Y} : [i(X), Y]_{Top_{acc}} \to [X, \delta(Y)]_{Top_{T_D}}$ es una biyección; resta probar que es natural en X y en Y. Para ello, sean $g : Y \to Z$, $f : i(X) \to Y$ morfismos en Top_{acc} y $h : W \to X$, $t : X \to \delta(Y)$ morfismos en Top_{T_D}, entonces $\alpha_{X,Z}(g \circ f) = \delta(g \circ f) = \delta(g) \circ \delta(f) = \delta(g) \circ \alpha_{X,Y}(f)$ y $\beta_{W,Y}(t \circ h) = j_Y \circ (t \circ h) = (j_Y \circ t) \circ h = \beta_{X,Y}(t) \circ h = \beta_{X,Y}(t) \circ i(h)$. Se concluye así que α es una biyección natural. Por tanto δ es adjunto a derecha de i. □

Como consecuencia de la proposición anterior se tiene el siguiente corolario.

Corolario 4. *El operador δ preserva límites, en particular productos.*

Es importante notar que la noción de producto en la categoría Top_{acc} podría no coincidir con el producto en Top. Esta noción no será estudiada en este trabajo.

3. El operador δ como morfismo de Conjuntos Ordenados

En esta sección se fija un conjunto no vacío X y se considera a δ como un operador de $(Top\,(X)\,,\subseteq)$ en $(P\,(X)\,,\subseteq)$, mostrándose que es un morfismo de conjuntos ordenados y que en general no es inyectivo ni sobreyectivo.

Definición 5. *Sea X un conjunto no vacío y sea $\tau \in Top\,(X)$. Se designará por $\delta\,(\tau)$ al conjunto de puntos ac-cerrados del espacio topológico (X,τ).*

Proposición 6. *Sean β, τ y μ topologías sobre X.*
a) Si $\tau \subseteq \mu$ entonces $\delta\,(\tau) \subseteq \delta\,(\mu)$.
b) $\delta\,(\tau \cap \beta) \subseteq \delta\,(\tau) \cap \delta\,(\beta)$.

Demostración. Para la primera parte, si $x \in \delta\,(\tau)$ entonces $\{x\}'$ es cerrado. Luego existen un abierto V y un cerrado C en (X,τ), tal que $\{x\} = V \cap C$. Como $\tau \subseteq \mu$, V es abierto en μ y C es cerrado en μ por lo que $\{x\}'_\mu$ es cerrado. La parte b) es aplicación directa de la parte a). □

Corolario 7. *$\delta : (Top\,(X)\,,\subseteq) \to (P\,(X)\,,\subseteq)$ es un morfismo de conjuntos ordenados.*

Los primeros interrogantes que surgen sobre el operador δ se refieren a su inyectividad y sobreyectividad. Los ejemplos siguientes muestran que no satisface ninguna de estas propiedades.

Ejemplo 8. *Para $X = \{1,2,3\}$ y las topologías sobre X, $\tau_1 = \{\varnothing, X, \{1\}, \{1,2\}\}$ y $\tau_2 = P(X)$ se tiene que $\delta\,(\tau_1) = X$ y $\delta\,(\tau_2) = X$. Por tanto δ no es inyectivo.*

Ejemplo 9. *Sea $X = \{1,2\}$. Si existe $\tau \in Top(X)$ tal que $\delta\,(\tau) = \{1\}$ (ó $\delta\,(\tau) = \{2\}$), entonces $2 \in \delta\,(\tau)$ (ó $1 \in \delta\,(\tau)$) lo cual es falso. Por tanto para $\tau \in Top(X)$ se tiene que $\delta\,(\tau) = \varnothing$ ó $\delta\,(\tau) = X$. Así δ no es sobreyectivo.*

Como se vio en el ejemplo anterior el operador δ no es sobreyectivo cuando se consideran espacios finitos. Sin embargo, cuando el espacio es infinito sucede lo contrario como se muestra en la siguiente proposición. Primero debemos notar que para $A \subseteq X$, la colección $\eta\,(A) = \{X - F \mid F$ es subconjunto finito de $A\} \cup \{\varnothing\}$ es una topología sobre X [2].

Proposición 10. *Si X es infinito y $A \subseteq X$, entonces $\delta(\eta(A)) = A$.*

Demostración. Si $x \in A^c$ entonces $\{x\}' = X - \{x\}$ que no es cerrado, luego $x \notin \delta(\eta(A))$. Por otro lado, si $x \in A$ entonces $\{x\}$ es cerrado y así $x \in \delta(\eta(A))$. □

Nótese que en la topología anterior todos los puntos del conjunto A son cerrados. Para hallar una topología donde no se tenga esta propiedad, se usará un filtro particular como se muestra en la siguiente proposición. Recordemos que si $\mathcal{F}_a$ es el filtro generado por a en A, entonces la colección $F_a = \mathcal{F}_a \cup \{\varnothing, X\}$ es una topología sobre X.

Proposición 11. *Sea $A \subseteq X$. Si $|A^c| \geqslant 2$ entonces $\delta(F_a) = A$.*

Demostración. Si $c \notin A$ entonces $c \notin \delta(F_a)$, pues $\{c\}' = A^c - \{c\}$ no es cerrado. Para la otra contenencia, sea $b \in A$. Si $b = a$ entonces $\{b\}' = X - \{a\}$ que es cerrado y si $b \neq a$, entonces $\{b\}' = A^c$ que es cerrado. □

Según el Ejemplo 3.5 cuando $|X| = 2$, no existen topologías τ con $\delta(\tau) = X - \{x\}$, $x \in X$. Y cuando $|X| = 3$ ó $|X| = 4$, un cálculo directo sobre todas las topologías diferentes (no homeomorfas), muestra exactamente la misma situación. Ahora, como los autores no cuentan con una prueba formal de este hecho para un conjunto finito arbitrario, a continuación se consigna lo que se podría llamar una pregunta abierta para el lector.

Pregunta. ¿ Sea X un conjunto finito. Para $A = X - \{x\}$, existe una topología τ sobre X tal que $\delta(\tau) = A$?

Un programa computacional para calcular las topologías sobre un conjunto finito puede ser consultado en [8].

4. Comentarios finales

En esta sección se presentan algunos comentarios relacionados con el operador λ y se determina una condición suficiente para concluir la compacidad de un espacio X en términos de los subespacios $\delta(X)$ y $\lambda(X)$, análoga a la obtenida en [1].

- Tomando como objetos los espacios topológicos y como morfismos las funciones continuas que preservan puntos ac-libres, se obtiene la categoría Top_{acl}. Así, $\lambda : Top_{acl} \to Top$ es un funtor. El siguiente diagrama muestra cómo actúa λ:

$$\begin{array}{ccccc} Top_{acl} & \rightarrow & Top & & \\ X & \rightarrow & \lambda\left(X\right) & & \\ f\downarrow & & \downarrow & & f\mid_{\lambda(X)}=\lambda\left(f\right) \\ Y & \rightarrow & \lambda\left(Y\right) & & \end{array}$$

La razón más fuerte para considerar la categoría Top en el codominio y no definir otra como se hizo con δ, es que se desconoce si el operador λ es ó no idempotente [6]. Además nótese que aquí no hay funtor inclusión de Top en Top_{acl}, ya que no toda función continua preserva puntos ac-libres.

- En [1] se presenta un criterio para concluir la compacidad de un espacio topológico en términos de los subespacios $\gamma(X) = \{x \in X \mid \{x\} \text{ es cerrado}\}$ y $\varepsilon(X) = \{x \in X \mid \overline{\{x\}} \cap \gamma(X) = \varnothing\}$, de la siguiente manera: si $\gamma(X)$ es un subespacio compacto de X y $\varepsilon(X) = \varnothing$ entonces X es compacto. En la siguiente proposición se muestra que este resultado es válido también con los subespacios $\delta\left(X\right)$ y $\lambda\left(X\right)$.

Proposición 12. *Sea X un espacio topológico. Si $\delta\left(X\right)$ es compacto y $\lambda\left(X\right) = \varnothing$, entonces X es compacto.*

Demostración. Sea $\{F_i\}_{i\in I}$ una colección de cerrados de X con PIF; como $\lambda\left(X\right) = \varnothing$, la intersección de cualquier cerrado con $\delta\left(X\right)$ es distinta de vacío, entonces, $\{\delta\left(X\right) \cap F_i\}_{i\in I}$ es una colección de cerrados de $\delta\left(X\right)$ con PIF. Por hipótesis $\delta\left(X\right)$ es compacto, entonces, $\bigcap_{i\in I}\left(\delta\left(X\right) \cap F_i\right) \neq \varnothing$, y por lo tanto $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \varnothing$. Por tanto X es compacto. □

Referencias

[1] L. Acosta y E. Lozano, *Una caracterización de topologías compactas T_0*, Boletín de Matemáticas N. S., VI No. 2 (1999), 77-84.

[2] L. Acosta y P. Gaona, *Estructura ordenada de la colección de topologías filtrosas compactas*, Boletín de Matemáticas N. S., VIII No. 1 (2001), 8-12.

[3] J. Adámek, H. Herrlich and G. Strecker, Abstract and Concrete Categories, Wiley Interscience, New York, 1990.

[4] C. E. Aull and W .J. Thron, *Separation Axioms Between T_0 and T_1*, Ind. math. 24 (1962), 26-37.

[5] R. Engelking, Outline of General Topology, North Holland, Amsterdam, 1968.

[6] C. M. Monsalve, A. A. Rodríguez and J. A. Avila, *A New Generalization of T_D-spaces*, To appear in Missouri J. Math. Sci..

[7] J. R. Munkres, Topology a First Course, Prentice-Hall, New Jersey, (1975).

[8] Topología General, http://www.math.niu.edu/˜rusin/known-math/index/54-XX.html.

Recibido: Agosto de 2005. Aceptado para publicación: Febrero de 2006