Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen XIII No. 1 (2006), pp. 20–42

EL PROBLEMA DE CAUCHY ASOCIADO A UNA PERTURBACIÓN NO LOCAL DE LA ECUACIÓN DE BENJAMIN-ONO

RICARDO A. PASTRÁN RAMÍREZ (∗)
GUILLERMO RODRÍGUEZ-BLANCO (∗∗)

Dedicado a la memoria de Jairo Charris Castañeda

RESUMEN. El propósito de este trabajo es estudiar la buena colocación en los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ y en los espacios de Sobolev con pesos $\mathcal{F}_{s,r}$ del problema de Cauchy asociado a una perturbación no local de la ecuación de Benjamin-Ono (BO).

PALABRAS CLAVES. Problema de Cauchy, Transformada de Hilbert, Ecuación Benjamín Ono, Local y Globalmente bien puesto.

ABSTRACT. The purpose of this work is to study the well-posedness in the Sobolev spaces $H^s(\mathbb{R})$ and in the Sobolev spaces with weights $\mathcal{F}_{s,r}$ of the Cauchy problem associated to a non local perturbation of the Benjamin-Ono(BO) equation.

KEY WORDS AND PHRASES. Cauchy problem, Hilbert transformation, Ono Benjamin equation, local and global well-posedness.

(∗) Ricardo Pastrán. Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá. E-mail: rapastranr@unal.edu.co

(∗∗) Guillermo Rodríguez-Blanco. Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá. E-mail: grodriguezb@unal.edu.co .

1. Introducción

En este artículo, trataremos con el problema de Cauchy asociado al problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + \sigma u_{xx} + \mu(\sigma u_x + \sigma u_{xxx}) &= 0 \\ u(x,0) &= \phi(x), \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde $x \in \mathbb{R}$, $t \in (0, +\infty)$, $\mu > 0$ y σ es el inverso aditivo de la transformada de Hilbert (vea [5], para más información sobre este operador), es decir,

$$\sigma f(x) = -\frac{1}{\pi} v.p. \frac{1}{x} * f = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x|>\epsilon} \frac{f(y)}{x-y}\, dy \tag{1.2}$$

Más precisamente, estamos interesados en estudiar ciertas propiedades de las soluciones reales de (1.1) como la buena colocación local y global en los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ y en los espacios de Sobolev con pesos $\mathcal{F}_{s,r}$ (información completa sobre estos espacios puede consultarse en [1], [10]). Antes de emprender esta tarea haremos algunos comentarios sobre (1.1). La ecuación diferencial parcial (E.D.P.) en (1.1) es una perturbación de la bien conocida ecuación de Benjamin-Ono (B-O), que se obtiene cuando $\mu = 0$. En este caso, el estudio de la buena colocación en los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ fue hecho por Iório [8], [9], Ponce [14], Tao [18] y el estudio de la buena colocación en los espacios con peso $\mathcal{F}_{s,r}$ fue realizado por Iório [7], [8], [9], donde se obtienen resultados sorprendentes, tales como: *Si la solución u de la B-O es muy regular y tiene buena decaída en cierto instante t, entonces u es identicamente cero.* Aquí, obtendremos un resultado semejante para nuestra ecuación. De otro lado, Alvarez en [4] estudia la buena colocación local y global en los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ del problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + u_{xxx} + \mu(\sigma u_x + \sigma u_{xxx}) &= 0 \\ u(x,0) &= \phi(x), \end{aligned} \tag{1.3}$$

que es una perturbación disipativa no local de la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV). Aunque en nuestro trabajo se obtienen resultados semejantes a los de Alvarez, presentamos aquí una mejor estimativa de regularización para el semigrupo generado por la parte lineal de (1.1). Además, mostramos una forma más simple para obtener las estimativas de las normas $||u||_s$, pues para ello sólo necesitamos de la estimativa del conmutador de Kato-Ponce [12], de la estimativa de regularización del semigrupo y de una estimativa a priori para $||u||_2$, a diferencia del trabajo de Alvarez en el que se utilizan las ideas se Bonna-Scott en [3], que es un resultado engorroso y de díficil aplicación. La E.D.P. en (1.1) como, en (1.3) modelan fenómenos físicos que se presentan en teoría de fluidos; para mayor información sobre esta cuestión vea [2], [15], [16] y las referencias contenidas allí. La siguiente notación será útil en la lectura del presente trabajo:

1. $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, notará al espacio de Schwartz.
2. $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, notará al espacio de las distribuiciones temperadas.
3. Para $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ notará la transformada de Fourier de f y $\check{f}$ notará la transformada inversa de Fourier de f.
4. Para $s \in \mathbb{R}$, el espacio $H^s(\mathbb{R}) := \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \mid (1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})\}$ es el espacio de Sobolev de orden s y es un espacio de Hilbert con el producto interno $(f,g)_s = \int_{-\infty}^{\infty}(1+\xi^2)^s \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi$.
5. Para $s \in \mathbb{R},\ r = 1,2,...,$ el espacio $\mathcal{F}_{s,r} := H^s(\mathbb{R}) \cap L^2_r(\mathbb{R})$, donde $L^2_r(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid x^r f \in L^2(\mathbb{R})\}$ es un espacio de Banach con la norma $\|f\|^2_{s,r} = \|f\|^2_s + \|f\|^2_{L^2_r(\mathbb{R})}$.
6. Si $X,\ Y$ son espacios de Banach, $\mathcal{B}(X;Y)$ es el espacio de los operadores lineales continuos de X en Y dotado de la norma $\|T\|_{\mathcal{B}(X;Y)} = \sup_{\|x\|=1}\|Tx\|$. Si $X = Y$ escribiremos $\mathcal{B}(X)$ en vez de $\mathcal{B}(X;Y)$.
7. Escribiremos
$$A_\mu = -\sigma\partial_x^2 - \mu(\sigma\partial_x + \sigma\partial_x^3) \tag{1.4}$$
$$b_\mu(\xi) = i\xi|\xi| + \mu(|\xi| - |\xi|^3) \tag{1.5}$$
$$E_\mu(t)\phi = e^{tA_\mu}\phi = (e^{b_\mu(\xi)t}\widehat{\phi})\check{}, \tag{1.6}$$
donde $\mu > 0$, $\xi \in \mathbb{R}$, $\phi \in H^s(\mathbb{R})$ y σ es dado por (1.2).
8. $\Lambda^s = \left(1 - \partial_x^2\right)^{\frac{s}{2}}$.
9. $[A,B]$ notará el conmutador de los operadores A y B.

2. La ecuación Lineal

Esta sección la dedicaremos al estudio de la solución de la ecuación lineal asociada a (1.1), que por comodidad escribiremos:

$$\begin{aligned} u_t + A_\mu u &= 0 \\ u(0) &= \phi, \end{aligned} \tag{2.7}$$

donde A_μ es dado por (1.4) y $\phi \in H^s(\mathbb{R})$ o $\phi \in \mathcal{F}_{s,r}$.

Teorema 2.1.
1. *$E_\mu : [0,\infty) \longrightarrow \mathcal{B}(H^s(\mathbb{R}))$ es un C^0-semigrupo en $H^s(\mathbb{R})$. Además,*
$$\|E_\mu(t)\|_{\mathcal{B}(H^s(\mathbb{R}))} \leq e^{\mu t} \tag{2.8}$$
2. *Sea $\lambda \in [0,\infty)$. Entonces, $E_\mu(t) \in \mathcal{B}(H^s(\mathbb{R}), H^{s+\lambda}(\mathbb{R}))$, para todo $t > 0$, $s \in \mathbb{R}$ y satisface la desigualdad:*
$$\|E_\mu(t)\phi\|_{s+\lambda} \leq C_\lambda(e^{\mu t} + (\mu t)^{-\lambda/3})\|\phi\|_s\ , \tag{2.9}$$
para toda $\phi \in H^s(\mathbb{R})$, donde C_λ es una constante que depende sólo de λ.

Demostración. La prueba de la primera parte es estándar y se obtiene como consecuencia del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue y de la desigualdad $|e^{b_\mu(\xi)t}| = e^{\mu t(|\xi|-|\xi|^3)} \leq e^{\mu t}$. Esta desigualdad junto con las desigualdades:

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \xi^{2\lambda} e^{2\mu t(|\xi|-|\xi|^3)} \leq 2^\lambda e^{2\mu t} + \left(\frac{\lambda}{\mu t}\right)^{\frac{2}{3}} e^{-\frac{\lambda}{3}} \tag{2.10}$$

y

$$\begin{aligned}
\|E_\mu(t)\phi\|_{s+\lambda}{}^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \{(1+\xi^2)^\lambda e^{2\mu t(|\xi|-|\xi|^3)}\}(1+\xi^2)^s|\hat{\phi}(\xi)|^2\, d\xi \\
&\leq \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \{(1+\xi^2)^\lambda e^{2\mu t(|\xi|-|\xi|^3)}\}\|\phi\|_s{}^2 \\
&\leq C_\lambda \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \{(1+\xi^{2\lambda}) e^{2\mu t(|\xi|-|\xi|^3)}\}\|\phi\|_s{}^2 \\
&\leq C_\lambda (e^{2\mu t} + \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \{\xi^{2\lambda} e^{2\mu t(|\xi|-|\xi|^3)}\})\|\phi\|_s{}^2 \\
&\leq C_\lambda (e^{2\mu t} \ + \ (\mu t)^{-2\lambda/3})\|\phi\|_s{}^2
\end{aligned}$$

implican (2.9), pues de (2.8) y la desigualdad $1 - \frac{1}{\xi^2} > \frac{1}{2}$ si $\xi^2 > 2$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\xi^{2\lambda} e^{2\mu t(|\xi|-|\xi|^3)} &\leq \sup_{|\xi|\leq\sqrt{2}} \xi^{2\lambda} e^{2\mu t(|\xi|-|\xi|^3)} + \sup_{|\xi|\geq\sqrt{2}} \xi^{2\lambda} e^{2\mu t(|\xi|-|\xi|^3)} && (2.11)\\
&\leq 2^\lambda \sup_{|\xi|\leq\sqrt{2}} e^{2\mu t(|\xi|-|\xi|^3)} + \sup_{|\xi|\geq\sqrt{2}} \xi^{2\lambda} e^{-2\mu t|\xi|^3} && (2.12)\\
&\leq 2^\lambda e^{2\mu t} + \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \xi^{2\lambda} e^{-2\mu t|\xi|^3)} && (2.13)
\end{aligned}$$

□

Proposición 2.1. *La única solución de (2.7) es*

$$u(t) = E_\mu(t)\phi. \tag{2.14}$$

Es decir, la aplicación $t \in (0, +\infty) \longmapsto u(t) = E_\mu(t)\phi \in H^s(\mathbb{R})$ *es la única que satisface que*

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - B_\mu u(t) \right\|_{s-3} = 0. \tag{2.15}$$

Demostración. Sean ϕ, $\psi \in H^s(\mathbb{R})$ y u, $v \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}))$ dos soluciones del problema (2.7) tal que $u(0) = \phi$ y $v(0) = \psi$. Entonces, $w(t) = u(t) - v(t)$

satisface (2.7) con dato inicial $w(0) = \phi - \psi$, luego

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|_{s-3}{}^2 &= -(\sigma\Lambda^{s-3}w_{xx}, \Lambda^{s-3}w)_0 - \mu(\sigma\Lambda^{s-3}w_x + \sigma\Lambda^{s-3}w_{xxx}, \Lambda^{s-3}w)_0 \\ &= -\mu\int_{\{|\xi|\le 1\}\cup\{|\xi|>1\}}(|\xi|^3 - |\xi|)(1+\xi^2)^{s-3}|\widehat{w}(\xi)|^2\,d\xi \\ &\le \mu\int_{|\xi|\le 1}(|\xi| - |\xi|^3)(1+\xi^2)^{s-3}|\widehat{w}(\xi)|^2\,d\xi \\ &\le \mu\int_{|\xi|\le 1}(1+\xi^2)^{s-3}|\widehat{w}(\xi)|^2\,d\xi \\ &\le \mu\|w(t)\|_{s-3}{}^2, \end{aligned} \tag{2.16}$$

donde hemos usado que $\sigma\partial_{xx}$ es un operador antisimétrico en $H^s(\mathbb{R})$. Ahora, integrando desde 0 hasta t y aplicando la desigualdad de Gronwall obtenemos

$$\|u(t) - v(t)\|_{s-3} \le \|\phi - \psi\|_{s-3}e^{\mu t}, \tag{2.17}$$

que implica la unicidad, como consecuencia de hacer $\phi = \psi$. La prueba de (2.15) es estándar y es consecuencia del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, de las propiedades del semigrupo $\{E_\mu(t)\}$ y de la desigualdad del valor medio. □

Nuestra intuición nos llevaría a pensar que $u(t) = E_\mu(t)\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ si $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Desafortunadamente esto no ocurre. Para ver esto, estudiaremos el problema (2.7) en los espacios de Sobolev con peso $\mathcal{F}_{s,r} = H^s(\mathbb{R}) \cap L^2_r(\mathbb{R})$, pues las normas de estos espacios forman un sistema fundamental de seminormas para $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (a este respecto vea por ejemplo [11] o [17]). Comenzaremos esta labor con:

Lema 2.1. *Sea* $F_\mu(t,\xi) = e^{tb_\mu(\xi)}$ *donde* $b_\mu(\xi) = i\xi|\xi| + \mu(|\xi| - |\xi|^3)$. *Entonces,*

$$\partial_\xi F_\mu(t,\xi) = t[\mu\, sgn(\xi) + |\xi|(2i - 3\mu\xi)]F_\mu(t,\xi) \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}\partial_\xi^2 F_\mu(t,\xi) &= 2\mu t\delta + t[2i\, sgn(\xi) - 6\mu|\xi|]F_\mu(t,\xi)+\\ &+ t^2[\mu\, sgn(\xi) + |\xi|(2i - 3\mu\xi)]^2 F_\mu(t,\xi)\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}\partial_\xi^3 F_\mu(t,\xi) &= 2\mu t\delta' + 4it\delta - 6\mu t\, sgn(\xi)F_\mu(t,\xi)+\\ &+ t^2[6i\mu + 6(\mu^2 - 2)\xi - 54i\mu\xi^2 + 54\mu^2\xi^3]F_\mu(t,\xi)+\\ &+ t^3[\mu\, sgn(\xi) + |\xi|(2i - 3\mu\xi)]^3 F_\mu(t,\xi)\end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}\partial_\xi^4 F_\mu(t,\xi) &= 2\mu t\delta'' + 4it\delta' + 2(\mu^3 t^3 - 6\mu t)\delta+\\ &+ t^2[6(\mu^2 - 2) - 108i\mu\xi + 162\mu^2\xi^2]F_\mu(t,\xi)+\\ &+ t^3[12i\mu^2 + 12\mu(\mu^2 - 4)\xi - 24i(2 + 3\mu^2)\xi^2 + \mu(288 - 72\mu^2)\xi^3+\\ &\quad + 324i\mu^2\xi^4 - 324\mu^3\xi^5]\, sgn(\xi)F_\mu(t,\xi)+\\ &+ t^4[\mu\, sgn(\xi) + |\xi|(2i - 3\mu\xi)]^4 F_\mu(t,\xi)\end{aligned} \tag{2.21}$$

Además, para $j \geq 4$ *la* j*-ésima derivada de* $F_\mu(t,\xi)$ *tiene la forma:*

$$\begin{aligned}\partial_\xi^j F_\mu(t,\xi) =& 2\mu t\delta^{(j-2)} + 4it\delta^{(j-3)} + \sum_{k=0}^{j-4} p_k(t)\delta^{(k)} + \sum_{k=0}^{j-1} t^k[q_k(\xi)\\ &+ s_k(\xi)\, sgn(\xi)]F_\mu(t,\xi) + t^j[\mu\, sgn(\xi) + |\xi|(2i - 3\mu\xi)]^j F_\mu(t,\xi),\end{aligned} \tag{2.22}$$

donde δ *es la función delta de Dirac,* $p_k(t)$, $q_k(\xi)$ *y* $s_k(\xi)$ *son polinomios tales que* $grad(p_k(t)) \leq j - 1$, $grad(q_k(\xi)) \leq 2j - 3$ *y* $grad(s_k(\xi)) \leq 2j - 3$.

Demostración. Un cálculo directo prueba (2.18)-(2.21). El principio de inducción nos permite obtener (2.22). □

Teorema 2.2. *Sea* $\mu > 0$. $E_\mu : [0, +\infty) \longrightarrow \boldsymbol{B}(\mathcal{F}_{s,r})$ *es un* C^0*-semigrupo para* $s, r \in \mathbb{N}$, $s \geq r$ *y satisface que*

(a.) Si $r = 0, 1$

$$\|E_\mu(t)\phi\|_{\mathcal{F}_{s,r}} \leq \Theta_r(t)\|\phi\|_{\mathcal{F}_{s,r}} \quad \textit{para todo } \phi \in \mathcal{F}_{s,r} \tag{2.23}$$

donde $\Theta_r(t)$ *es de la forma*

$$p_{\mu,r}(t)e^{\mu t} + \sum_{l=1}^{3r-1} k_{l,\mu} t^{l/3}$$

tal que $k_{l,\mu}$ es una constante que depende de μ y $p_{\mu,r}(t)$ es un polinomio en t de grado r con coeficientes positivos dependiendo sólo de μ.

(b.) Si $r \geq 2$ y $\phi \in \mathcal{F}_{s,r}$, $E_\mu \in C([0,\infty];\mathcal{F}_{s,r})$, si y sólo si,

$$(\partial_\xi^j \widehat{\phi})(0) = 0, \qquad\qquad j = 0, 1, 2, \cdots, r-2. \tag{2.24}$$

En este caso, también se tiene una estimación como (2.23).

Demostración. El lema anterior junto con la desigualdad

$$\begin{aligned}
\|E_\mu(t)\phi\|_{\mathcal{F}_{s,r}}{}^2 &= \|E_\mu(t)\phi\|_s{}^2 + \|E_\mu(t)\phi\|_{L^2_r}{}^2 \\
&\leq e^{2\mu t}\|\phi\|_s{}^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} (1+x^2)^r |E_\mu(t)\phi|^2\,dx \\
&\leq Ce^{2\mu t}\|\phi\|_{\mathcal{F}_{s,r}}{}^2 + c_r \int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_\xi^r (F_\mu(t,\xi)\widehat{\phi}(\xi))|^2\,d\xi
\end{aligned} \tag{2.25}$$

implican el resultado. □

Nótese que la unicidad del problema (2.7) en $\mathcal{F}_{s,r}$ es una consecuencia de la teoría en $H^s(\mathbb{R})$.

Teorema 2.3. *Sea $\mu > 0$ fijo y $\phi \in \mathcal{F}_{s,r}$ con $s, r \in \mathbb{N}$ y $s \geq r$. Si $r = 0, 1$ la solución única de (2.7) en $\mathcal{F}_{s,r}$ está dada por $u(t) = E_\mu(t)\phi$. Si $r \geq 2$, (2.7) tiene una solución en $\mathcal{F}_{s,r}$ si y sólo si (2.24) se cumple. En este caso la solución es única y está dada por $u(t) = E_\mu(t)\phi$.*

3. Teoría Local en $H^s(\mathbb{R})$ y en $\mathcal{F}_{2,1}(\mathbb{R})$

En esta sección probaremos que el problema (1.1) es localmente bien puesto en los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ y $\mathcal{F}_{s,r}$, para ciertos valores de los parámetros s y r.

Teorema 3.1. *Si $s > 1/2$, el problema (1.1) es equivalente a la ecuación integral*

$$u(t) = E_\mu(t)\phi - \int_0^t E_\mu(t-\tau)\,\partial_x u^2(\tau)\,d\tau \tag{3.1}$$

Más precisamente, si $u \in C([0,T];H^s(\mathbb{R}))$ con $s > 1/2$, es una solución de (1.1) entonces u satisface (3.1). Recíprocamente, si $u \in C([0,T];H^s(\mathbb{R}))$, con

$s > 1/2$, es una solución de (3.1) entonces $u \in C^1([0,T]; H^{s-3}(\mathbb{R}))$ y satisface (1.1) con derivada dada por

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{u(t+h)-u(t)}{h} - B_\mu u(t) + \frac{1}{2}(\partial_x u^2)(t) \right\|_{s-3} = 0. \tag{3.2}$$

Demostración. La primera parte de la prueba es consecuencia del método de variación de parámetros y de observar que el término no lineal $\partial_x u^2$ tiene sentido, pues puede considerarse como una distribución temperada, ya que u^2 es continua y se anula en infinito para $s > \frac{1}{2}$, en virtud del Lema de Sobolev. La segunda parte se obtiene por reemplazar la u de la ecuación ecuacion integral (3.1) en la parte derecha de (3.2) y luego usar las propiedades del semigrupo junto con el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue (para más detalles vea [13]). □

Teorema 3.2. *Sean $\mu > 0$ y $\phi \in H^s(\mathbb{R})$, con $s > 1/2$. Entonces, existe $T = T(\|\phi\|_s, \mu) > 0$ y una única solución $u \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}))$ de (1.1).*

Demostración. La idea de la prueba es aplicar el teorema de contracción de Banach a la función definida por el miembro derecho de (3.1) en un espacio adecuado. Con este fin, sean $M > 0$ y

$$(\mathcal{A}f)(t) := E_\mu(t)\phi - \frac{1}{2}\int_0^t E_\mu(t-t')\,\partial_x(f^2)\,dt' \tag{3.3}$$

definida en el espacio métrico completo

$$\mathfrak{X}_s(T) = \{f \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R})) \,:\, \|f(t) - E_\mu(t)\phi\|_s \leq M\}, \tag{3.4}$$

con métrica dada por

$$d(f,g) = \|f-g\|_{s,\infty} = \sup_{t\in[0,T]} \|f(t)-g(t)\|_s.$$

La prueba es consecuencia de observar que:

1. Si $f \in \mathfrak{X}_s(T)$ entonces $\mathcal{A}f \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}))$. Esto es consecuencia de la propiedades del semigrupo $\{E_\mu\}$ y del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue

2. Existe $T > 0$ tal que $\mathcal{A}(\mathfrak{X}_s(T)) \subset \mathfrak{X}_s(T)$. En efecto, para $u \in \mathfrak{X}_s(T)$, por (2.9) y la desigualdad del valor medio se tiene que

$$\begin{aligned}
\|(\mathcal{A}u)(t) - E_\mu(t)\phi\|_s &\leq \frac{1}{2}\int_0^t \left\|E_\mu(t-\tau)\partial_x u^2(\tau)\right\|_s d\tau \\
&\leq \frac{C}{\mu}(M^2 + e^{2\mu T}\|\phi\|_s{}^2)(e^{\mu T} - 1 + (\mu T)^{2/3}) \\
&\leq \frac{C}{\mu}(M^2 + e^{2\mu T}\|\phi\|_s{}^2)(\mu T e^{\mu T} + (\mu T)^{2/3}). \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Eligiendo $T > 0$ de tal manera que el lado derecho de (3.5) sea menor que M obtenemos lo querido.

3. Finalmente, probemos que existe $T > 0$ tal que $\mathcal{A}$ es una contracción sobre $\mathfrak{X}_s(T)$. Con esto en mente observemos primero que:

$$\begin{aligned}
\left\|(u^2 - v^2)(\tau)\right\|_s &= \|(u-v)(u+v)(\tau)\|_s \leq C\|(u-v)(\tau)\|_s(M + \|E_\mu(\tau)\phi\|_s) \\
&\leq C(M + e^{\mu T}\|\phi\|_s)\|u(t) - v(t)\|_{s,\infty}, \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

para $u \in \mathfrak{X}_s(T)$, con $s > \frac{1}{2}$. Por lo tanto, (3.6), la desigualdad del valor medio y (2.9) implican que

$$\begin{aligned}
\|(\mathcal{A}u)(t) - (\mathcal{A}v)(t)\|_s &\leq \frac{1}{2}\int_0^t \left\|E_\mu(t-\tau)[(u^2)_x(\tau) - (v^2)_x(\tau)]\right\|_s d\tau \\
&\leq \frac{C}{\mu}(M + e^{\mu T}\|\phi\|_s)(e^{\mu T} - 1 + (\mu T)^{2/3})\|u(t) - v(t)\|_{s,\infty} \\
&\leq \frac{C}{\mu}(M + e^{\mu T}\|\phi\|_s)(\mu T e^{\mu T} + (\mu T)^{2/3})\|u(t) - v(t)\|_{s,\infty}
\end{aligned}$$

Eligiendo $T > 0$ tal que $\frac{C}{\mu}(M + e^{\mu T}\|\phi\|_s)(\mu T e^{\mu T} + (\mu T)^{2/3}) < 1$, resulta que $\mathcal{A}$ es una contracción sobre $\mathfrak{X}_s(T)$.

De (1) - (3) se sigue el resultado. □

Teorema 3.3. *El problema (1.1) es* ***localmente bien puesto*** *en $H^s(\mathbb{R})$, para $s > \frac{1}{2}$. Más precisamente, para $\phi \in H^s(\mathbb{R})$, existen $T > 0$ y una única $u \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}))$ que satisface (1.1) y tal que $u \in C^1([0,T]; H^{s-3}(\mathbb{R}))$. Además, la aplicación $\phi \in H^s(\mathbb{R}) \longmapsto u \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}))$ es continua en el siguiente sentido: Sean $\phi_n \in H^s(\mathbb{R})$, $n = 1, 2, \cdots$, tales que $\phi_n \to \phi$ y sean $u_n \in C([0,T_n]; H^s(\mathbb{R}))$ soluciones de (1.1) con $u_n(0) = \phi_n$. Entonces, las soluciones u_n pueden ser extendidas si es necesario al intervalo $[0,T]$ para n*

suficientemente grande y

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{[0,T]} \|u(t) - u_n(t)\|_s = 0.$$

Demostración. Del teorema 3.2 vemos que sólo resta probar la dependencia continua. Con esto en mente, observemos que de la forma como se eligió el T en las partes 2 y 3 de la demostración del teorema 3.2 se obtiene que $T = T(\mu, \|\phi\|_s) > 0$ es una función continua de $\|\phi\|_s$, por lo tanto, las soluciones u_n pueden ser definidas en el intervalo $[0, T]$ para n suficientemente grande. Las desigualdades (2.8) y (2.9), junto con el hecho de ser H^s una álgebra de Banach, para $s > \frac{1}{2}$, implican que

$$\begin{aligned}
\|u_n(t) - u(t)\|_s &\le e^{\mu T}\|\phi_n - \phi\|_s + \frac{1}{2}\int_0^t \left\|E_\mu(t-\tau)\partial_x(u_n^2 - u^2)(\tau)\right\|_s d\tau \\
&\le e^{\mu T}\|\phi_n - \phi\|_s + C\int_0^t (e^{\mu(t-\tau)} + (\mu(t-\tau))^{-1/3})\left\|(u_n^2 - u^2)(\tau)\right\|_s d\tau \\
&\le e^{\mu T}\|\phi_n - \phi\|_s + C\int_0^t (e^{\mu T} + (\mu(t-\tau))^{-1/3})\|(u_n - u)(\tau)(u_n + u)(\tau)\|_s d\tau \\
&\le e^{\mu T}\|\phi_n - \phi\|_s + C\int_0^t (e^{\mu T} + (t-\tau)^{-1/3})\|(u_n + u)(\tau)\|_s\|(u_n - u)(\tau)\|_s d\tau \\
&\le e^{\mu T}\|\phi_n - \phi\|_s + K\int_0^t (e^{\mu T} + (t-\tau)^{-1/3})\|u_n(\tau) - u(\tau)\|_s d\tau,
\end{aligned}$$

donde, $K = K(\|\phi\|_s) = C(M + e^{\mu T}\|\phi\|_s) \ge \|u_n(t) + u(t)\|_s$ que es consecuencia de que $u, u_n \in \mathfrak{X}_s(T)$. Por lo tanto, la desigualdad tipo Gronwall del Lema 7.1.2 de [6] implica que

$$\|u_n - u\|_{s,\infty} \le e^{\mu T}\|\phi_n - \phi\|_s \mathbf{E}((K\Gamma(\frac{2}{3}))^{\frac{3}{2}}T), \tag{3.7}$$

donde $\mathbf{E}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k s^{\frac{2k}{3}}$, con $C_0 = 1$, $\frac{C_{m+1}}{C_m} = \frac{\Gamma(\frac{2m}{3}+1)}{\Gamma(\frac{2m}{3}+\frac{5}{3})}$ y Γ la bien conocida función Gamma. Esto prueba el teorema. □

Teorema 3.4. *Sea $\mu > 0$ y $\phi \in \mathcal{F}_{2,1}(\mathbb{R})$. Entonces, existe $T(\|\phi\|_{\mathcal{F}_{2,1}}, \mu) > 0$ y una única $u \in C([0, T]; \mathcal{F}_{2,1}(\mathbb{R}))$ que satisface la ecuación integral (3.1).*

Demostración. La prueba de este resultado sigue los mismos lineamientos de la demostración del teorema 3.2, salvo que la aplicación en (3.3) es definida en el espacio métrico completo $\mathfrak{X}_{2,1}(T) = \{f \in C([0, T]; \mathcal{F}_{2,1}(\mathbb{R})) : \|f(t) - E_\mu(t)\phi\|_{\mathcal{F}_{2,1}} \le$

$M\}$ cuya métrica viene dada por

$$d(f,g) = \|f(t) - g(t)\|_{\mathcal{F}_{2,1,\infty}} = \sup_{t\in[0,T]} \|f(t) - g(t)\|_{\mathcal{F}_{2,1}}.$$

Los detalles restantes, salvo ligeras modificaciones, son los mismos que los realizados en la prueba del teorema 3.2 y se dejarán a cargo del lector curioso. □

La prueba de que $\partial_t u \in C((0,T]; L_1^2(\mathbb{R}))$ es consecuencia de los siguientes resultados cuyas pruebas son las mismas, salvo leves modificaciones que las presentadas en [4] para el Lema 5.3 página 41 y el corolario 5.1 página 44 y por lo tanto las omitiremos.

Lema 3.1. *Sea $\mu > 0$ y $\phi \in \mathcal{F}_{2,1}(\mathbb{R})$. Sea $u \in C((0,T]; \mathcal{F}_{2,1}(\mathbb{R}))$ la solución de la ecuación integral (3.1). Entonces $\partial_x^k u \in C((0,T]; L_1^2(\mathbb{R}))$, para $k = 0,1,2,3$. Además, $\sigma\partial_x^k u \in C((0,T]; L_1^2(\mathbb{R}))$ con $k = 1,2,3$.*

Corolario 3.1. *Sean $\mu > 0$ y $u \in C([0,T]; \mathcal{F}_{2,1}(\mathbb{R}))$ la solución de la ecuación (1.1). Entonces $\partial_t u \in C((0,T]; L_1^2(\mathbb{R}))$.*

4. Teoría global en $H^s(\mathbb{R})$

En esta sección obtendremos cotas a priori para las normas $\|u\|_s$ con $s \geq 1$, donde u es la solución de (1.1) obtenida en el teorema 3.2, lo que implicaría que la solución puede extenderse a cualquier intervalo de tiempo $[0,T]$. Este resultado global se obtendrá a partir de estimativas a priori para las normas $\|u\|_1$ y $\|u\|_2$, la estimativa del conmutador de Kato-Ponce [12] y la desigualdad (2.9). Empezaremos esta labor con:

Lema 4.1. *Sean $\phi \in H^2(\mathbb{R})$ y $u \in C([0,T]; H^2(\mathbb{R}))$ la solución de (1.1) con $u(0) = \phi$. Entonces*

$$\|u\|_0 \leq \|\phi\|_0 e^{\mu T} \tag{4.1}$$

$$\|u_x\|_0 \leq \|\phi'\|_0 exp\{T(\mu^{-3}\|\phi\|_0{}^4 e^{4\mu T} + 5\mu)\} \tag{4.2}$$

$$\|u_{xx}\|_0 \leq \|\phi''\|_0 exp\{T(\mu^{-3}5^4\|\phi\|_0{}^4 e^{4\mu T} + 5\mu)\} \tag{4.3}$$

Demostración. Comenzamos probando (4.1), para ello multiplicamos la ecuación (1.1) por u y usamos (2.16) con $s = 0$ para obtener:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_0{}^2 &= -(u, uu_x)_0 - (u, \sigma u_{xx})_0 - \mu(u, \sigma u_x)_0 - \mu(u, \sigma u_{xxx})_0 \\ &\leq \mu \int_{|\xi|\leq 1} |\hat{u}(\xi)|^2\, d\xi \leq \mu\|u\|_0{}^2. \end{aligned}\tag{4.4}$$

Integrando esta desigualdad entre 0 y t y aplicando la desigualdad de Gronwall se deduce (4.1). Para probar (4.2) hacemos $w := u_x$ y derivamos respecto a x (1.1) para obtener:

$$w_t + w^2 + uw_x + \sigma w_{xx} + \mu(\sigma w_x + \sigma w_{xxx}) = 0; \quad w(\cdot, 0) = \phi'(\cdot). \tag{4.5}$$

Multiplicamos esta ecuación por w para obtener la siguiente identidad:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|_0{}^2 = -(w, w^2)_0 - (w, uw_x)_0 - (w, \sigma w_{xx})_0 - \mu(w, \sigma w_x) - \mu(w, \sigma w_{xxx}), \tag{4.6}$$

por lo tanto (4.6) se transforma en

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|_0{}^2 \leq \|u\|_0(\epsilon\|w\|_0{}^2 + \epsilon^{-1/3}\|w_x\|_0{}^2) + \mu\int_{\mathbb{R}}(|\xi| - |\xi|^3)|\hat{w}(\xi)|^2\, d\xi \tag{4.7}$$

donde hemos usado que $2(w, uw_x)_0 = \int_{\mathbb{R}} u(w^2)_x\, dx = -(w, w^2)$ y que

$$\begin{aligned}(w, uw_x)_0 &\leq \|w\|_\infty\|u\|_0\|w_x\|_0 \leq (\|w\|_0{}^{1/2}\|w_x\|_0{}^{1/2})\|u\|_0\|w_x\|_0\\ &= \|w\|_0{}^{1/2}\|w_x\|_0{}^{3/2}\|u\|_0 \leq \|u\|_0(\epsilon\|w\|_0{}^2 + \epsilon^{-1/3}\|w_x\|_0{}^2)\end{aligned}$$

que se obtienen a partir de la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg junto con la desigualdad de Young. La desigualdades (4.1) y

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}(|\xi| - |\xi|^3)|\hat{w}(\xi)|^2\, d\xi &\leq \int_{|\xi|\leq 2}(|\xi| - |\xi|^3)|\hat{w}(\xi)|^2\, d\xi + \int_{|\xi|>2}(|\xi| - |\xi|^3)|\hat{w}(\xi)|^2\, d\xi\\ &\leq C\|w\|_0{}^2 + \int_{|\xi|>2}(|\xi| - |\xi|^3)|\hat{w}(\xi)|^2\, d\xi\\ &\leq \|w\|_0{}^2 - \int_{|\xi|>2}\xi^2|\hat{w}(\xi)|^2\, d\xi,\end{aligned}$$

que se obtiene de observar que $x - x^3 \leq -x^2$, para $x \geq 2$, transforman (4.7) en:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|_0{}^2 &\leq \|u\|_0(\epsilon\|w\|_0{}^2 + \epsilon^{-1/3}\|w_x\|_0{}^2) + \mu\Big(\|w\|_0{}^2 - \int_{|\xi|>2}\xi^2|\hat{w}(\xi)|^2\, d\xi\Big)\\ &\leq (\epsilon\|\phi\|_0 e^{\mu T} + \mu)\|w\|_0{}^2 + \epsilon^{-1/3}\|\phi\|_0 e^{\mu T}\|w_x\|_0{}^2 - \mu\int_{|\xi|>2}\xi^2|\hat{w}(\xi)|^2\, d\xi\end{aligned}$$

Si hacemos, $\epsilon := \Big(\dfrac{\|\phi\|_0 e^{\mu T}}{\mu}\Big)^3 > 0$, esta última desigualdad se transforma en:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}{\|w\|_0}^2 &\leq \Big(\frac{{\|\phi\|_0}^4 e^{4\mu T}}{\mu^3} + \mu\Big){\|w\|_0}^2 + \mu\Big\{{\|w_x\|_0}^2 - \int_{|\xi|>2} \xi^2|\hat{w}(\xi)|^2\, d\xi\Big\}\\ &= (\mu^{-3}{\|\phi\|_0}^4 e^{4\mu T} + \mu){\|w\|_0}^2 + \mu\int_{|\xi|\leq 2} \xi^2|\hat{w}(\xi)|^2\, d\xi\\ &\leq (\mu^{-3}{\|\phi\|_0}^4 e^{4\mu T} + 5\mu){\|w\|_0}^2. \end{aligned}\tag{4.8}$$

Integrando entre 0 y t ambos lados de (4.8) y aplicando la desigualdad de Gronwall, se deduce (4.2). Resta probar (4.3), para ello, hagamos $v := w_x = u_{xx}$ y derivemos (4.5) con respecto a x para obtener:

$$v_t + 3wv + uv_x + \sigma v_{xx} + \mu(\sigma v_x + \sigma v_{xxx}) = 0; \quad v(0) = \phi''. \tag{4.9}$$

Haciendo el producto interno de esta E. D. P. con v obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}{\|v\|_0}^2 &= -3(v, wv)_0 - (v, uv_x)_0 - (v, \sigma v_{xx})_0 - \mu(v, \sigma v_x)_0 - \mu(v, \sigma v_{xxx})_0\\ &= 5(v, uv_x) - \mu((v, \sigma v_x)_0 + (v, \sigma v_{xxx})_0),\end{aligned}\tag{4.10}$$

donde hemos usado: $-2(v, uv_x)_0 = -2(vv_x, u)_0 = -((v^2)_x, u)_0 = ((v^2), u_x)_0 = (v, vw)_0$ para obtener la última igualdad. Siguiendo el mismo procedimiento que se empleó para probar (4.2) se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}{\|v\|_0}^2 &\leq 5\|u\|_0(\epsilon{\|v\|_0}^2 + \epsilon^{-1/3}{\|v_x\|_0}^2) + \mu\Big({\|v\|_0}^2 - \int_{|\xi|>2} \xi^2|\hat{v}(\xi)|^2\, d\xi\Big)\\ &\leq (5\epsilon\|\phi\|_0 e^{\mu T} + \mu){\|v\|_0}^2 + 5\epsilon^{-1/3}\|\phi\|_0 e^{\mu} T{\|v_x\|_0}^2 - \mu\int_{|\xi|>2} \xi^2|\hat{v}(\xi)|^2\, d\xi.\end{aligned}$$

Esta desigualdad se transforma en :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}{\|v\|_0}^2 \leq (\mu^{-3}5^4{\|\phi\|_0}^4 e^{4\mu T} + 5\mu){\|v\|_0}^2, \tag{4.11}$$

si $\epsilon := \Big(\dfrac{5\|\phi\|_0 e^{\mu T}}{\mu}\Big)^3 > 0$. Integrando (4.11) sobre $[0, t]$ y aplicando la desigualdad de Gronwall se obtiene (4.3). $\square$

Lo siguiente que haremos es obtener estimativas a priori para las normas $\|u\|_s$, de la solución de (1.1) con $s \geq 1$. Con esto en mente, sea $s \geq 2$. Aplicando el operador Λ^s a la E.D.P. en (1.1) y haciendo el producto interno en $L^2(R)$ con $\Lambda^s u$ obtenemos que:

$$\begin{aligned}(\partial_t(\Lambda^s u), \Lambda^s u)_0 = &- (\Lambda^s(uu_x), \Lambda^s u)_0 - (\sigma\Lambda^s u_{xx}, \Lambda^s u)_0\\ &- \mu(\sigma\Lambda^s u_x + \sigma\Lambda^s u_{xxx}, \Lambda^s u)_0.\end{aligned}\tag{4.12}$$

El segundo término de (4.12) es cero pues el operador $\sigma\partial_{xx}$ es antisimétrico. Para estimar el primer término de (4.12) utilizamos la estimativa del conmutador de Kato-Ponce [12], para obtener:

$$\begin{aligned}
-(\Lambda^s(uu_x), \Lambda^s u)_0 &= -([\Lambda^s, u]\partial_x u, \Lambda^s u)_0 - (u\partial_x \Lambda^s u, \Lambda^s u)_0 \\
&= -([\Lambda^s, u]\partial_x u, \Lambda^s u)_0 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u_x(\Lambda^s u)^2\, dx \\
&\leq \|[\Lambda^s, u]\partial_x u\|_0 \|\Lambda^s u\|_0 + \frac{1}{2}\|u_x\|_\infty {\|u\|_s}^2 \\
&\leq C\|u_x\|_\infty {\|\Lambda^s u\|_0}^2 + \frac{1}{2}\|u_x\|_\infty {\|u\|_s}^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto, 4.12 se transforma en:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}{\|u\|_s}^2 &\leq C\|u_x\|_\infty {\|u\|_s}^2 + \mu \int_{|\xi|\leq 1} (|\xi| - |\xi|^3)(1+\xi^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2\, d\xi \\
&\leq C\|u_x\|_\infty {\|u\|_s}^2 + \mu \int_{|\xi|\leq 1} (1+\xi^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2\, d\xi.
\end{aligned}$$

Integrando esta última desigualdad desde 0 hasta t, resulta que

$$ {\|u\|_s}^2 \leq {\|\phi\|_s}^2 + \int_0^t 2(\mu + C\|u_x\|_\infty){\|u(\tau)\|_s}^2\, d\tau \tag{4.13}$$

Como $\|u_x\|_\infty \leq \|u\|_2 \leq K = K(\|\phi\|_2, \mu, T)$, que se obtiene a partir de los lemas de Sobolev y 4.1, (4.13) se transforma en:

$$ {\|u\|_s}^2 \leq {\|\phi\|_s}^2 + \int_0^t 2(\mu + CK){\|u(\tau)\|_s}^2\, d\tau,$$

por lo tanto, la desigualdad de Gronwall implica que:

$$ {\|u(t)\|_s}^2 \leq {\|\phi\|_s}^2 exp(2\int_0^t (\mu + CK)\, d\tau) = {\|\phi\|_s}^2 e^{2t(\mu+CK)}, \tag{4.14}$$

Teorema 4.1. *Sea $\phi \in H^s(\mathbb{R})$, con $s \geq 2$ o $s = 1$. Entonces, (1.1) es globalmente bien puesto en $H^s(\mathbb{R})$.*

Demostración. Este resultado es consecuencia directa de la ecuación (4.14), del lema 4.1 y del teorema 3.3 de la buena colocación local de (1.1). □

Teorema 4.2. *Sean $\mu > 0$ y $\phi \in H^s(\mathbb{R})$, con $s \geq 1$. Entonces, el problema (1.1) es globalmente bien puesto en $H^s(\mathbb{R})$.*

Demostración. Del teorema 4.1 vemos que sólo resta obtener estimativas a priori para la norma $\|u\|_s$ de la solución de (1.1) con $1 < s < 2$. En virtud del teorema 3.2 tenemos que

$$u(t) = E_\mu(t)\phi - \frac{1}{2}\int_0^t E_\mu(t-\tau)\,\partial_x(u^2(\tau))\,d\tau$$

Sea $\lambda \in (0,1)$. La desigualdad (2.9) con $s = 0$ y $1+\lambda$, en lugar de λ, junto con (4.1), (4.2) implican que:

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{1+\lambda} &\leq \|E_\mu(t)\phi\|_{1+\lambda} + \frac{1}{2}\int_0^t \left\|E_\mu(t-\tau)\,\partial_x(u^2(\tau))\right\|_{1+\lambda} d\tau \\
&\leq e^{\mu t}\|\phi\|_{1+\lambda} + C_\lambda \int_0^t (e^{\mu(t-\tau)} + (\mu(t-\tau))^{-(1+\lambda)/3})\left\|\partial_x(u^2(\tau))\right\|_0 d\tau \\
&\leq e^{\mu t}\|\phi\|_{1+\lambda} + C_\lambda \int_0^t (e^{\mu(t-\tau)} + (\mu(t-\tau))^{-(1+\lambda)/3})\|u(\tau))\|_1{}^2\, d\tau \\
&\leq e^{\mu t}\|\phi\|_{1+\lambda} + C(\lambda,T)\int_0^t (e^{\mu(t-\tau)} + (\mu(t-\tau))^{-(1+\lambda)/3})\, d\tau \\
&\leq e^{\mu t}\|\phi\|_{1+\lambda} + C(\lambda,T)\Big(Te^{\mu T} + \frac{3}{(2-\lambda)\mu^{\frac{1+\lambda}{3}}}t^{\frac{2-\lambda}{3}}\Big) \\
&\leq e^{\mu T}\|\phi\|_{1+\lambda} + C(\lambda,T)\Big(Te^{\mu T} + \frac{3}{(2-\lambda)\mu^{\frac{1+\lambda}{3}}}T^{\frac{2-\lambda}{3}}\Big),
\end{aligned} \tag{4.15}$$

donde $C(\lambda,T) = C_\lambda\left(\|\phi\|_0{}^2 e^{2\mu T} + \|\phi'\|_0{}^2 e^{2T(\mu^{-3}\|\phi\|_0{}^4 e^{4\mu T}+5\mu)}\right)$ que se obtiene como lo mencionamos anteriormente a partir de (4.1) y (4.2). Por lo tanto, la estimativa (4.15) muestra que la norma $\|u\|_{1+\lambda}$ permanece acotada. $\square$

5. Propiedades de decaída de la solución

En esta sección obtendremos ciertas propiedades interesantes correspondientes a las soluciones del problema (1.1) en los espacios $\mathcal{F}_{2,1}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{F}_{r,r}(\mathbb{R}) = \mathcal{F}_r(\mathbb{R})$, con $r = 2, 3$. Las demostraciones de los siguientes resultados, salvo por leves modificaciones, son semejantes a las hechas por Iório en [8] y en [9] para la ecuación de Benjamin-Ono. Sin embargo, presentamos un esbozo de las demostraciones.

Teorema 5.1. *Sea $\phi \in \mathcal{F}_{2,1}(\mathbb{R})$. Entonces, existe una única solución $u \in C([0,+\infty);\mathcal{F}_{2,1}(\mathbb{R}))$ del problema (1.1) tal que $\partial_t u \in C((0,+\infty);\mathcal{F}_{-1,1}(\mathbb{R}))$.*

Demostración. Sólo resta obtener una estimativa a priori para la norma $\|xu(t)\|_0$, pues el resto es consecuencia del teorema 4.2 y el corolario 3.1. Con esto en mente, multiplicamos la ecuación (1.1) por x y luego hacemos el producto interno en $L^2(\mathbb{R})$ con xu, para obtener:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|xu(t)\|_0^{\,2} = -(xu, xuu_x)_0 - (xu, x\sigma u_{xx})_0 - \mu(xu, x(\sigma u_x + \sigma u_{xxx}))_0. \tag{5.16}$$

Ahora obtendremos estimativas para cada uno de los términos del lado derecho de (5.16). Con este fin, observemos que el primer término es estimado a partir de la desigualdad de Hölder. En efecto,

$$|(xu, xuu_x)_0| \leq \|u_x\|_{L^\infty}\|xu\|_0^{\,2} \leq c\|u\|_2\|u\|_{L_1^2}^{\,2}. \tag{5.17}$$

La estimación del segundo término es:

$$\begin{aligned}
-(xu, x\sigma u_{xx})_0 &= -(xu, [x, \sigma\partial_{xx}]\, u + \sigma\partial_{xx}(xu))_0 \\
&= -(xu, [x, \sigma\partial_{xx}]\, u)_0 - (xu, \sigma\partial_{xx}(xu))_0 \\
&= -(xu, [x, \sigma\partial_{xx}]\, u)_0 \\
&= -(xu, [x, \sigma]\, \partial_{xx}u - 2\sigma\partial_x u)_0 \\
&= 2(xu, \sigma\partial_x u)_0 \leq 2\|\sigma\partial_x u\|_0\|xu\|_0 \\
&\leq 2\|u\|_2\|u\|_{L_1^2},
\end{aligned} \tag{5.18}$$

donde hemos usado que el operador $\sigma\partial_{xx}$ es antisimétrico y que el conmutador $[x, \sigma]\, \partial_{xx}u = 0$. La estimación para el tercer término de (5.16) se obtiene esencialmente de la misma forma que se empleó para obtener la estimativa del segundo término y es:

$$\begin{aligned}
-(xu, x\sigma u_x)_0 &= -(xu, [x, \sigma\partial_x]\, u + \sigma\partial_x(xu))_0 \\
&= -(xu, [x, \sigma]\, \partial_x u - \sigma\, [\partial_x, x]\, u)_0 - (xu, \sigma\partial_x(xu))_0 \\
&= (xu, \sigma\, [x, \partial_x]\, u)_0 - (xu, \sigma\partial_x(xu))_0 \\
&= -(xu, \sigma u)_0 - (xu, \sigma\partial_x(xu))_0 \\
&\leq \|\sigma u\|_0\|xu\|_0 - (xu, \sigma\partial_x(xu))_0.
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Resta estimar el último término, para ello procedemos de igual manera como se hizo para obtener la estimativa (5.19), luego

$$\begin{aligned}
-(xu, x\sigma u_{xxx})_0 &= -(xu, [x, \sigma\partial_{xxx}]\, u + \sigma\partial_{xxx}(xu))_0 \\
&= -(xu, [x, \sigma]\, \partial_{xxx} u - \sigma\, [\partial_{xxx}, x]\, u)_0 - (xu, \sigma\partial_{xxx}(xu))_0 \\
&= (xu, \sigma\, [x, \partial_{xxx}]\, u)_0 - (xu, \sigma\partial_{xxx}(xu))_0 \\
&= -(xu, \sigma\partial_{xx} u)_0 - (xu, \sigma\partial_{xxx}(xu))_0 \\
&\leq \|\sigma\partial_{xx} u\|_0 \|xu\|_0 - (xu, \sigma\partial_{xxx}(xu))_0 \\
&\leq \|u\|_2 \|u\|_{L_1^2} - (xu, \sigma\partial_{xxx}(xu))_0. \qquad (5.20)
\end{aligned}$$

De las estimativas (5.17),(5.18),(5.19),(5.20), la identidad (5.16) se transforma en

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|xu(t)\|_0{}^2 &\leq c\|u\|_2 \|u\|_{L_1^2}{}^2 + 2\|u\|_2\|u\|_{L_1^2} + \|u\|_0\|xu\|_0 + \|u\|_2\|u\|_{L_1^2} \\
&\quad - (xu, \sigma\partial_x(xu))_0 - (xu, \sigma\partial_{xxx}(xu))_0 \\
&\leq K(T)\|u\|_{L_1^2} + C(T), \qquad (5.21)
\end{aligned}$$

donde $C(T)$, $K(T)$ son funciones de T que se obtienen de la estimativa de la norma $\|u\|_2$. En esta estimativa también usamos que $(xu, -\sigma\partial_x(xu) - \sigma\partial_{xxx}(xu))_0 \leq \|xu\|_0{}^2$ que es una consecuencia de la identidad de Parseval y de la desigualdad $|\xi| - |\xi|^3 \leq 0$, si $\xi \geq 1$. Por lo tanto, el resultado se obtiene de la desigualdad de Gronwall y de (5.21). $\square$

Teorema 5.2. *Sean $\mu > 0$ y $T > 0$. Supongamos que $u \in C([0,T]; \mathcal{F}_2(\mathbb{R}))$ es la solución de (1.1). Entonces $\widehat{u}(t, 0) = 0$, para todo $t \in [0, T]$.*

Demostración. Multiplicando (1.1) por x^2 obtenemos

$$\partial_t(x^2 u) = -x^2 u\partial_x u - x^2\sigma\partial_x^2 u - \mu x^2(\sigma\partial_x u + \sigma\partial_x^3 u) \qquad (5.22)$$

Por hipótesis, $x^2 u(t) \in L^2(\mathbb{R})$, para todo $t \in [0, T]$. Luego

$$\left\|x^2 u\partial_x u\right\|_0 \leq \|\partial_x u\|_{L^\infty} \left\|x^2 u\right\|_0 \leq \|u\|_2 \left\|x^2 u\right\|_0, \qquad (5.23)$$

y por lo tanto $\gamma(t) := x^2(u\partial_x u)(t) \in L^2(\mathbb{R})$, para todo $t \in [0, T]$. De esto se sigue que $\gamma \in C([0, T]; L^2(\mathbb{R}))$, pues

$$\begin{aligned}
\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|_0 &\leq \left\|x^2 u(t)\right\|_0 \|\partial_x(u(t) - u(t_0))\|_{L^\infty} + \|\partial_x(t_0)\|_{L^\infty} \left\|x^2(u(t) - u(t_0))\right\|_0 \\
&\leq \|u(t)\|_{\mathcal{F}_2} \|u(t) - u(t_0)\|_2 + \|u(t_0)\|_2 \|u(t) - u(t_0)\|_{\mathcal{F}_2}. \qquad (5.24)
\end{aligned}$$

Aplicando la transformada de Fourier en (5.22) se obtiene:

$$\partial_t \partial_\xi^2 \widehat{u}(t,\xi) = \widehat{\gamma(t)}(\xi) - i\partial_\xi^2(\, sgn(\xi)\xi^2 \widehat{u}(t,\xi)) - \mu \partial_\xi^2[\, sgn(\xi)(-\xi+\xi^3)\widehat{u}(t,\xi)]. \tag{5.25}$$

Como $u(t) \in \mathcal{F}_2(\mathbb{R})$ para todo $t \in [0,T]$, se tiene que

$$\begin{aligned}\widehat{\beta(t)}(\xi) &:= \partial_\xi^2(\, sgn(\xi)\xi^2 \widehat{u}(t,\xi)) \\ &= sgn(\xi)(2\widehat{u}(t,\xi) + 4\xi\partial_\xi \widehat{u}(t,\xi) + \xi^2 \partial_\xi^2 \widehat{u}(t,\xi)) \in C([0,T]; L^2_{-2}(\mathbb{R})).\end{aligned} \tag{5.26}$$

De la misma manera, se cumple que

$$\partial_\xi^2[\, sgn(\xi)(-\xi+\xi^3)\widehat{u}(t,\xi)] = -2\delta(\xi)\widehat{u}(t,0) + \widehat{\kappa(t)}(\xi), \tag{5.27}$$

donde

$$\begin{aligned}\widehat{\kappa(t)}(\xi) &= -2\, sgn(\xi)\partial_\xi \widehat{u}(t,\xi) - \xi\, sgn(\xi)\partial_\xi^2 \widehat{u}(t,\xi) + 6\xi\, sgn(\xi)\widehat{u}(t,\xi) + \\ &\quad + 6\xi^2\, sgn(\xi)\partial_\xi \widehat{u}(t,\xi) + \xi^3\, sgn(\xi)\partial_\xi^2 \widehat{u}(t,\xi) \in C([0,T]; L^2_{-3}(\mathbb{R})).\end{aligned} \tag{5.28}$$

De (5.25), (5.26), (5.27) y (5.28) se obtiene que

$$\partial_t \partial_\xi^2 \widehat{u}(t,\xi) = \widehat{\gamma(t)}(\xi) - i\widehat{\beta(t)}(\xi) + 2\mu\delta(\xi)\widehat{u}(t,0) - \mu\widehat{\kappa(t)}(\xi). \tag{5.29}$$

Integrando ahora (5.29) entre 0 y t, encontramos que

$$2\mu\delta(\xi)\int_0^t \widehat{u}(t',0)\,dt' \in C([0,T]; L^2_{-3}(\mathbb{R})), \tag{5.30}$$

lo cual implica que

$$\int_0^t \widehat{u}(t',0)\,dt' = 0, \qquad \text{para todo } t \in [0,T], \tag{5.31}$$

y por lo tanto $\widehat{u}(t,0) = 0$, para todo $t \in [0,T]$. □

Observe que la ecuación $u_t = -uu_x - \sigma u_{xx} - \mu(\sigma u_x + \sigma u_{xxx})$ junto con el teorema anterior implican que

$$\partial_t \widehat{u}(t,\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (-uu_x - \sigma u_{xx} - \mu(\sigma u_x + \sigma u_{xxx}))e^{-i\xi x}\,dx$$

y en particular que

$$\partial_t \widehat{u}(t,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (-uu_x - \sigma u_{xx} - \mu(\sigma u_x + \sigma u_{xxx}))\,dx = 0.$$

Por lo tanto, $\widehat{u}(t,0)$ es una cantidad conservada para el problema (1.1).

Teorema 5.3. *Sean $\mu > 0$ y $T > 0$. Supongamos que $u \in C([0,T]; \mathcal{F}_{3,3}(\mathbb{R}))$ es la solución de (1.1). Entonces $u(t) = 0$, para todo $t \in [0,T]$.*

Demostración. Multiplicando (1.1) por x^3 obtenemos:

$$\partial_t(x^3u) = -x^3u\partial_x u - x^3\sigma\partial_x^2 u - \mu x^3(\sigma\partial_x u + \sigma\partial_x^3 u). \tag{5.32}$$

Como $x^3u(t) \in L^2(\mathbb{R})$, para todo $t \in [0,T]$, entonces

$$\left\|x^3u\partial_x u\right\|_0 \leq \|\partial_x u\|_{L^\infty}\left\|x^3u\right\|_0 \leq \|u\|_2\left\|x^3u\right\|_0, \tag{5.33}$$

y por lo tanto, $\gamma(t) := x^3(u\partial_x u)(t) \in L^2(\mathbb{R})$, para todo $t \in [0,T]$. De manera similar al teorema 5.2 se sigue que $\gamma \in C([0,T];L^2(\mathbb{R}))$. Tomando la transformada de Fourier en (5.32) se obtiene que:

$$\partial_t\partial_\xi^3\widehat{u}(t,\xi) = -i\widehat{\gamma(t)}(\xi) + i\partial_\xi^3(\,sgn(\xi)\xi^2\widehat{u}(t,\xi)) + i\mu\partial_\xi^3[\,sgn(\xi)(-\xi+\xi^3)\widehat{u}(t,\xi)]. \tag{5.34}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}\partial_\xi^3(\xi^3\widehat{u}(t,\xi)) &= 6\widehat{u}(t,\xi) + 18\xi\partial_\xi\widehat{u}(t,\xi) + 9\xi^2\partial_\xi^2\widehat{u}(t,\xi) + \xi^3\partial_\xi^3\widehat{u}(t,\xi)\\ &\in C([0,T];L^2_{-3}(\mathbb{R})),\end{aligned} \tag{5.35}$$

y que

$$\begin{aligned}\partial_\xi^3[\,sgn(\xi)(-\xi+\xi^3)\widehat{u}(t,\xi)] &= \partial_\xi(-2\delta(\xi)\widehat{u}(t,0) - 2\,sgn(\xi)\partial_\xi\widehat{u}(t,\xi)\\ &\quad - \xi\,sgn(\xi)\partial_\xi^2\widehat{u}(t,\xi) + 6\xi\,sgn(\xi)\widehat{u}(t,\xi)+\\ &\quad + 6\xi^2\,sgn(\xi)\partial_\xi\widehat{u}(t,\xi) + \xi^3\,sgn(\xi)\partial_\xi^2\widehat{u}(t,\xi))\\ &= -2\delta'(\xi)\widehat{u}(t,0) - 4\delta(\xi)\partial_\xi\widehat{u}(t,0) + \widehat{\Gamma(t)}(\xi),\end{aligned} \tag{5.36}$$

donde

$$\begin{aligned}\widehat{\Gamma(t)}(\xi) &= -\,sgn(\xi)\partial_\xi^2\widehat{u}(t,\xi) - \xi\,sgn(\xi)\partial_\xi^3\widehat{u}(t,\xi)+\\ &\quad + 6\,sgn(\xi)\widehat{u}(t,\xi) + 18\xi\,sgn(\xi)\partial_\xi\widehat{u}(t,\xi) + 9\xi^2\,sgn(\xi)\partial_\xi^2\widehat{u}(t,\xi)+\\ &\quad + \xi^3\,sgn(\xi)\partial_\xi^3\widehat{u}(t,\xi) \in C([0,T];L^2_{-3}(\mathbb{R})).\end{aligned} \tag{5.37}$$

De (5.34)-(5.36) obtenemos que:

$$\begin{aligned}-i\partial_t\partial_\xi^3\widehat{u}(t,\xi) &= -\,\widehat{\gamma(t)}(\xi) + \partial_\xi^3(\,sgn(\xi)\xi^2\widehat{u}(t,\xi)) + i\mu\widehat{\Gamma(t)}(\xi) - 2i\mu\delta'(\xi)\widehat{u}(t,0)\\ &\quad - 4i\mu\delta(\xi)\partial_\xi\widehat{u}(t,0).\end{aligned} \tag{5.38}$$

Integrando (5.38) entre 0 y t, tenemos que:

$$-2i\mu\delta'(\xi)\int_0^t \widehat{u}(t',0)\,dt' - 4i\mu\delta(\xi)\int_0^t \partial_\xi\widehat{u}(t',0)\,dt' \in C([0,T];L^2_{-3}(\mathbb{R})). \tag{5.39}$$

Entonces
$$\int_0^t \widehat{u}(t',0)\,dt' = \int_0^t \partial_\xi \widehat{u}(t',0)\,dt' = 0,$$
para todo $t \in [0,T]$. La última expresión implica que
$$\widehat{u}(t,0) = \partial_\xi \widehat{u}(t,0) = 0, \tag{5.40}$$
para todo $t \in [0,T]$. De otro lado, tenemos que u satisface la ecuación integral
$$u(t,\cdot) = E_\mu(t)\phi(\cdot) - \frac{1}{2}\int_0^t E_\mu(t-\tau)\,\partial_x(u^2)(\tau,\cdot)\,d\tau \tag{5.41}$$
para $t \in [0,T]$. Haciendo, $v = u^2$ y $w = \partial_x v$, tomando la transformada de Fourier de $u(t)$ en (5.41) se obtiene que
$$\widehat{u}(t,\xi) = F_\mu(t,\xi)\widehat{\phi}(\xi) - \frac{1}{2}\int_0^t F_\mu(t-\tau,\xi)\,\widehat{w}(\tau,\xi)\,d\tau. \tag{5.42}$$
Derivando tres veces (5.42) respecto a ξ, se tiene que:
$$\begin{aligned}
\partial_\xi^3 \widehat{u}(t,\cdot) &= \partial_\xi(\partial_\xi^2 F_\mu(t,\xi)\widehat{\phi}(\xi) + 2\partial_\xi F_\mu(t,\xi)\partial_\xi\widehat{\phi}(\xi) + F_\mu(t,\xi)\partial_\xi^2\widehat{\phi}(\xi)\\
&- \frac{1}{2}\int_0^t \partial_\xi^2 F_\mu(t-\tau,\xi)\widehat{w}(\tau,\xi)\,d\tau - \int_0^t \partial_\xi F_\mu(t-\tau,\xi)\partial_\xi\widehat{w}(\tau,\xi)\,d\tau\\
&- \frac{1}{2}\int_0^t F_\mu(t-\tau,\xi)\partial_\xi^2\widehat{w}(\tau,\xi)\,d\tau)\\
&= \partial_\xi^3 F_\mu(t,\xi)\widehat{\phi}(\xi) + 3\partial_\xi^2 F_\mu(t,\xi)\partial_\xi\widehat{\phi}(\xi) + 3\partial_\xi F_\mu(t,\xi)\partial_\xi^2\widehat{\phi}(\xi)\\
&+ F_\mu(t,\xi)\partial_\xi^3\widehat{\phi}(\xi) - \frac{1}{2}\int_0^t \partial_\xi^3 F_\mu(t-\tau,\xi)\widehat{w}(\tau,\xi)\,d\tau\\
&- \frac{3}{2}\int_0^t \partial_\xi^2 F_\mu(t-\tau,\xi)\partial_\xi\widehat{w}(\tau,\xi)\,d\tau - \frac{3}{2}\int_0^t \partial_\xi F_\mu(t-\tau,\xi)\partial_\xi^2\widehat{w}(\tau,\xi)\,d\tau\\
&- \frac{1}{2}\int_0^t F_\mu(t-\tau,\xi)\partial_\xi^3\widehat{w}(\tau,\xi)\,d\tau.
\end{aligned} \tag{5.43}$$
Como $\mu > 0$, $\phi, u, v \in \mathcal{F}_3$ y usando el lema (2.1) resulta que:
$$\partial_\xi F_\mu(t,\xi)\partial_\xi^2\widehat{\phi}(\xi) = t[\mu\, sgn(\xi) + |\xi|(2i - 3\mu\xi)]F_\mu(t,\xi)\partial_\xi^2\widehat{\phi}(\xi) \in C([0,T];L^2(\mathbb{R})) \tag{5.44}$$
y
$$F_\mu(t,\xi)\partial_\xi^3\widehat{\phi}(\xi) \in C([0,T];L^2(\mathbb{R})). \tag{5.45}$$
Además
$$\partial_\xi^2\widehat{w}(\tau,\xi) = i(2\partial_\xi\widehat{v}(\tau,\xi) + \xi\partial_\xi^2\widehat{v}(\tau,\xi))$$

y

$$\partial_\xi^3\widehat{w}(\tau,\xi) = i(3\partial_\xi^2\widehat{v}(\tau,\xi) + \xi\partial_\xi^3\widehat{v}(\tau,\xi)).$$

Entonces

$$-\frac{3}{2}\int_0^t \partial_\xi F_\mu(t-\tau,\xi)\partial_\xi^2\widehat{w}(\tau,\xi)\,d\tau \in C([0,T];L^2(\mathbb{R})), \tag{5.46}$$

y

$$-\frac{1}{2}\int_0^t F_\mu(t-\tau,\xi)\partial_\xi^3\widehat{w}(\tau,\xi)\,d\tau \in C([0,T];L^2(\mathbb{R})). \tag{5.47}$$

Igualmente obtenemos que

$$\partial_\xi^3 F_\mu(t,\xi)\widehat{\phi}(\xi) = f_1(t,\xi) + 4it\delta(\xi)\widehat{\phi}(\xi) + 2\mu t\delta'(\xi)\widehat{\phi}(\xi), \tag{5.48}$$

donde $f_1(t,\xi) \in C([0,T];L^2(\mathbb{R}))$. Utilizando (5.44)-(5.48) y consideraciones similares con los otros términos de (5.43), deducimos que

$$\begin{aligned}\partial_\xi^3\widehat{u}(t,\xi) = {}& f(t,\xi) + 2\mu t\delta'(\xi)\widehat{\phi}(\xi) + 4it\delta(\xi)\widehat{\phi}(\xi) + 6\mu t\delta(\xi)\partial_\xi\widehat{\phi}(\xi)\\ &- \frac{1}{2}\int_0^t 2\mu(t-\tau)\delta'(\xi)\widehat{w}(\tau,\xi)\,d\tau - \frac{1}{2}\int_0^t 4i(t-\tau)\delta(\xi)\widehat{w}(\tau,\xi)\,d\tau\\ &- \frac{3}{2}\int_0^t 2\mu(t-\tau)\delta(\xi)\partial_\xi\widehat{w}(\tau,\xi)\,d\tau \end{aligned} \tag{5.49}$$

donde $f(\cdot,\xi) \in C([0,T];L^2(\mathbb{R}))$. Como $\delta(\xi)\partial_\xi\widehat{\phi}(\xi) = \delta(\xi)\partial_\xi\widehat{\phi}(0) = 0$, se cumple que

$$\begin{aligned}\partial_\xi^3\widehat{u}(t,\xi) = {}& f(t,\xi) + (2\mu t\widehat{\phi}(\xi) - \mu\int_0^t (t-\tau)\widehat{w}(\tau,\xi)\,d\tau)\delta'(\xi)\\ &+ (4it\widehat{\phi}(\xi) - 2i\int_0^t (t-\tau)\widehat{w}(\tau,\xi)\,d\tau - 3\mu\int_0^t (t-\tau)\partial_\xi\widehat{w}(\tau,\xi)\,d\tau)\delta(\xi)\end{aligned} \tag{5.50}$$

Como $\partial_\xi^3\widehat{u}(t,\xi)$ y $f(t,\xi)$ son funciones medibles para todo $t \in [0,T]$, se sigue de la ecuación (5.50) que

$$2\mu t\widehat{\phi}(0) - \mu\int_0^t (t-\tau)\widehat{w}(\tau,0)\,d\tau = 0 \tag{5.51}$$

$$4it\widehat{\phi}(0) - 2i\int_0^t (t-\tau)\widehat{w}(\tau,0)\,d\tau - 3\mu\int_0^t (t-\tau)\partial_\xi\widehat{w}(\tau,0)\,d\tau = 0. \tag{5.52}$$

Pero, $\widehat{w}(\tau, 0) = \widehat{\partial_x v}(\tau, 0) = 0$ y $\widehat{\phi}(0) = 0$ por (5.40), entonces

$$\int_0^t (t-\tau)\partial_\xi \widehat{w}(\tau, 0)\, d\tau = 0 \tag{5.53}$$

Sea $t \in [0, T]$. Como $u(t) \in \mathcal{F}_3$ se puede ver que $xu(t) \in L_2^2(\mathbb{R})$. Entonces, $\widehat{xu(t)} \in H^2(\mathbb{R})$ y por lo tanto, $xu(t, \cdot) \in L^1(\mathbb{R})$. Así que

$$\begin{aligned}\int |x\partial_x u(t)^2|\, dx = 2\int |xu(t)\partial_x u(t)|\, dx &\leq 2\|\partial_x u(t)\|_{L^\infty} \int |xu(t,x)|\, dx \\ &\leq 2\|u(t)\|_2 \|xu(t,\cdot)\|_{L^1} < +\infty. \end{aligned} \tag{5.54}$$

Como

$$\widehat{xw}(t,\xi) = i\partial_\xi \widehat{w}(t,\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x(\partial_x u^2)(t,x) e^{-i\xi x}\, dx,$$

entonces

$$\partial_\xi \widehat{w}(t, 0) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x(\partial_x u^2)(t,x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|u(t)\|_0{}^2. \tag{5.55}$$

Combinando (5.53) y (5.55) obtenemos que

$$\int_0^t (t-\tau)\|u(\tau)\|_0{}^2\, d\tau = 0, \tag{5.56}$$

para todo $t \in [0, T]$. De (5.56) se concluye que $\|u(t)\|_0 = 0$ para todo $t \in [0, T]$. Esto completa la demostración. □

Referencias

[1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Nerw York-San Francisco-London, AP, (1975).

[2] Bao-Feng Feng, T. Kawahara, *Multi-hump stationary waves for a Korteweg-de Vries equation with nonlocal perturbations*, Physica D, 137, (2000), pp. 237-246.

[3] J. Bona and R. Scott, *Solutions of the Korteweg-de Vries Equation in Fractional Order Sobolev Spaces*, Duke Mathematical Journal, Vol. 43, No. 1, (1976), pp. 87-99.

[4] Borys Y. Alvarez S., *On the Cauchy problem for a nonlocal perturbation of the KdV equation*, Tesis Doctoral, IMPA, 2002. http://www.preprint.impa.br/Shadows/SERIE_C/2002/10.html

[5] J. Duoandikoetxea, *Análisis de Fourier*, Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid, 1991.

[6] D. Henry. *Geometric Theory of semilinear Parabolic Equations*, Lec. Notes in Math., 840, Springer-Verlag,1981.

[7] R. J. Iório, Jr.,*On the Cauchy problem for the Benjamin-Ono Equation*, Comm. PDE, 11, (1986), pp. 1031-1081.

[8] R. J. Iório, Jr.,*The Benjamin-Ono Equation in Weighted Sobolev Spaces*, J. Math. Anal. Appl., Vol.157, No. 2, (1991), pp. 577-590.

[9] R. J. Iório, Jr., *KdV, BO and Friends in Weighted Sobolev Spaces, Function Analytic Methods for Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, vol. 1450(1990) pp. 105-121.

[10] R. J. Iório, Jr., Valéria de Magalhães Iório, *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*, Cambridge studies in avanced mathematics, 70, (2001).

[11] T. Kato, *On the Cauchy problem for the (Generalized) Korteweg-de Vries Equation*, Studies in Applied Mathematics, Advances in Mathematics Supplementary Studies, Vol. 8,(1983), pp. 93-128.

[12] T. Kato, G. Ponce, *Commutator estimates and the Euler and Navier-Stokes equations*, Comm. Pure Appl. Math. 41 (7)(1988) 891-907.

[13] R. Pastrán, *El problema de Cauchy asociado a una perturbación no local de la ecuación de Benjamín Ono*, Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia, 2005.

[14] G. Ponce, *On the global well-posedness of the Benjamin-Ono equation*, Differential Integral Eqs. 4, (1991), 527-542.

[15] S. Quian, Y.C. Lee, H.H. Chen, *A study of non linear dynamical models of plasma turbulence*, Phys. Fluids B 1 (1) (1989), pp. 87-98.

[16] S. Quian, Y.C. Lee, H.H. Chen, *A turbulence model with stochastic soliton motion*, J. Math. Phys. 31 (1990) pp. 506-516.

[17] M. Reed, B. Simon *Methods of modern Mathematical Physics I: Functional Analysis*, Academic Press, INC. 1980

[18] T. Tao, *Global well-posedness of the Benjamin-Ono equation in* $H^1(\mathbb{R})$, J. Hyperbolic Differ. Equ. 1, No.1, 27-49 (2004).

Recibido: Noviembre de 2005. Aceptado para publicación: Abril de 2006