UNA ALTERNATIVA A LA INTEGRAL DE RIEMANN

Pilar Turégano Moratalla

Pilar Turégano Moratalla.
Licenciada en Ciencias Matemáticas.
Profesora Titular de Escuela Universitaria.
Albacete

EL PROBLEMA

La aritmética y la geometría son, en el desarrollo habitual de la educación matemática, aprehendidas primero a nivel experimental. Tanto en la primera como en la segunda etapa de E.G.B. los alumnos se encuentran con multitud de fenómenos numéricos y geométricos y se familiarizan con ellos. Es sólo en un estudio ulterior cuando se les propone una teoría matemática, en la que los conceptos toman forma y son utilizados en razonamientos de los que se descarta el punto de vista empírico por lo general. La enseñanza habitual de análisis procede de otro modo. Hasta que no tienen 16 años aproximadamente, los alumnos no oyen ni siquiera hablar del infinito, de la idea de límite, etc. La enseñanza del análisis no pasa por ninguna fase previa de carácter experimental. El resultado es que a partir de los 16 años, los alumnos deben asimilar, al mismo tiempo, los fenómenos asociados a las apariciones del infinito y de los límites, y los conceptos y las teorías formales que los expresan y desarrollan matemáticamente. Interviene ahí una teoría que no tiene como función ordenar un conjunto rico de experiencias previas, simplemente porque tal conjunto no existe. H. Freudenthal (1973) ha puesto en evidencia las dificultades que resultan de este estado de cosas.

Tras un análisis exhaustivo de la bibliografía sobre las investigaciones en ese campo, podemos afirmar que los alumnos no tienen un rendimiento aceptable en los cursos de cálculo, ni siquiera en la universidad. Las causas que explican esta realidad las encontramos en el terreno *epistemológico* (Sierpinska, 1985, 1987, 1989), en el terreno *didáctico* (Orton, 1983a, 1983b), y en el terreno *psicológico* (Tall y Vinner, 1981).

Como ocurre con todo hecho didáctico, éste se presta a múltiples interpretaciones. Los psicólogos, pedagogos, profesores de matemáticas y alumnos darían sus explicaciones, todas ellas, a priori, dignas de interés. Pero ninguna de esas razones, considerada aisladamente, es suficiente para dar cuenta de la totalidad del fenómeno. Esto no impide que toda investigación presuponga la elección de un punto de vista particular, forzosamente reductor, pero que permita cuestionar eficazmente la realidad de uno u otro de sus aspectos. En las ciencias llamadas clásicas, esta selección viene determinada por el paradigma en curso en cada una de esas disciplinas y que, en una época dada, constituye el objeto de un consenso en el seno de una comunidad científica reconocida como tal. Pero, ¿se puede hablar de paradigmas en didáctica de la matemática? Pensamos que el objeto de esta disciplina se encuentra en la encrucijada de muchas otras disciplinas y suscita todavía, en el momento actual, múltiples debates.

Enfrentados a esa doble realidad, hemos optado por reconocer *la complejidad de la teoría para desentrañarla y tratar de construir presentaciones accesibles sin perder la claridad de las nociones centrales.*

Hecha nuestra elección, creemos que un primer paso sería establecer la fenomenología intrínseca del concepto, es decir, aquellos elementos que lo caracterizan en su génesis histórica. Todos esos fenómenos que capturan las distintas facetas de la naturaleza del concepto o del campo conceptual que lo soporta son percibidos en el estudio sistemático de su génesis histórica, fenómenos que fueron sepultados y que impiden percibir hoy los significados esenciales que posibilitaron su construcción.

Esta búsqueda nos ha permitido encontrar que es posible reconstruir el estudio de la integración, tomando como idea central el cálculo de áreas planas. En este sentido, es posible rediseñar el currículum y el trabajo con los alumnos en torno a lo que es esencial para su comprensión. Necesitamos volver a los fundamentos del cálculo: es preciso desarrollarlo de nuevo a lo largo de la educación matemática de los estudiantes. Sin duda, cada nuevo enfoque debe ser más formal y riguroso que el precedente, y el primero puede ser muy informal.

Pensamos que el punto de vista que, a menudo, es «impuesto» al estudiante de instituto y de universidad es el de la integral de Riemann, en la que el área ya no es definida como un objeto geométrico, sino como el resultado de un cálculo según un procedimiento dado. ¿Por qué no pensamos en la dificultad que puede suponer para el alumno el relacionar el área con el proceso de sumación que permite sumar infinitas cantidades «infinitamente pequeñas»? Y, aunque sea una forma de razonar sugestiva y útil, frecuentemente, desde el punto de vista lógico, adolece del defecto de no poder atribuir un significado exacto al concepto de «cantidad infinitamente pequeña».

Se sabe, desde los trabajos de psicología de la forma, que la percepción visual no se reduce a la sensación registrada por la retina. Una misma imagen puede dar lugar a más de una percepción. Así, pues, una percepción es una interpretación, una estructuración mental. Cuando decimos a los alumnos que los rectángulos se reducen a segmentos, por ejemplo, estamos hablando de una manera sugerente de cómo se pintan las imágenes mentales de los alumnos, no lo que se imprime realmente en sus retinas.

¿Por qué no pensamos, también, en la dificultad de las tres magnitudes que hay presentes cuando definimos la integral de Riemann: los rectángulos, los segmentos a los que se reducen y el área curvilínea a determinar? ¿No evitaríamos esta dificultad con la integración en el análisis no estándar? Justificamos nuestra propuesta, ya que hoy día lo infinitesimal encuentra en el análisis no estándar un sitio principal bajo forma axiomatizada, y, puesto que no se pueden evitar, sería mejor hacerles intervenir adecuadamente, aunque, eso sí, en su momento.

El propósito de este trabajo es proponer a los profesores de cálculo una forma de presentación a nivel conceptual de la integral definida que difiere de la que usualmente aparece en los textos, y que permitiría a los estudiantes una transferencia inmediata de cálculo de áreas, que han trabajado en la geometría elemental, y de sus propiedades al análisis, evitando los problemas ya mencionados que presenta a nivel conceptual la integral de Riemann. Pensemos, por un momento, si los estudiantes, en un primer contacto con el análisis, no entenderían más fácilmente que, al pasar de la geometría al análisis, nada ha cambiado excepto el lenguaje, que era antes más geométrico y después es más analítico.

Dos requisitos nos parecen necesarios para afrontar esta propuesta: el uso de un sencillo programa de ordenador que permita visualizar el proceso y realizar cálculos, y un buen trabajo previo sobre los aspectos cualitativo y cuantitativo del área.

LA INTEGRAL DEFINIDA

1. Definición

Consideremos una función real f definida en un intervalo cerrado $[a,b]$ acotada y, de momento, no negativa.

Se trata de calcular el área limitada por la curva, el eje x y las ordenadas correspondientes a los puntos de abscisas a y b. La sugerencia que se le hace al estudiante es la de encontrar una figura rectangular cuya área sea igual a la de la figura originál, con lo que el problema queda reducido al cálculo de la «altura media» de la función f en todo el intervalo $[a,b]$ y, a continuación, calcular el área pedida como el producto de esta altura por la longitud $b - a$ del intervalo cerrado $[a,b]$. Comenzaremos por definir con precisión la «altura media». Para ello consideramos las bisecciones consecutivas del intervalo $[a,b]$, esto es, para cada natural 1, 2, 3... consideramos el intervalo dividido en 2, 4, 8... partes iguales. Así, para cada entero positivo n asociamos una subdivisión del intervalo en 2^n partes iguales, que llamaremos la n-ésima subdivisión. Consideremos una n-enésima subdivisión y denotemos con hi y Hi, respectivamente, el ínfimo y el supremo de la función f en el i-ésimo intervalo de la subdivisión ($i = 1,..., 2^n$). Estos números, hi y Hi, están bien definidos por la hipótesis de que f es acotada. A partir de ellos, podemos definir los números $h(f,a,b,n)$ y $H(f,a,b,n)$ por las relaciones

$$h(f,a,b,n) = \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{2^n} hi$$

y

$$H(f,a,b,n) = \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{2^n} Hi$$

que nos representan las «alturas medias» mínimas y máximas en relación con la n-ésima subdivisión.

De la definición de estos números se deducen las relaciones siguientes:

$$h(f,a,b,n) \leq h(f,a,b,n+1)$$

$$H(f,a,b,n) \geq H(f,a,b,n+1)$$

$$h(f,a,b,n) \leq H(f,a,b,n)$$

para todo natural n.

Esto nos indica que las sucesiones $h(f,a,b,n)$, y $H(f,a,b,n)$ para $n = 1, 2, 3...$ son sucesiones monótonas y acotadas, por lo que ambas tienen límite cuando $n \to \infty$, esto es:

$$h(f,a,b) = \lim_{n \to \infty} h(f,a,b,n) = \sup_n h(f,a,b,n)$$

y

$$H(f,a,b) = \lim_{n \to \infty} H(f,a,b,n) = \inf_n H(f,a,b,n)$$

con

$$h(f,a,b) \leq H(f,a,b).$$

Estos números, a los que identificamos como «altura media» mínima y máxima, respectivamente, no se puede asegurar que sean iguales, pero, en el caso de serlo, ese número que denotamos por $M(f,a,b)$, es la «altura media» de la función $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$.

Definimos la integral de la función f en el intervalo $[a,b]$ como el producto de la «altura media» por la longitud del intervalo $[a,b]$. Es decir,

$$\int_a^b f = M(f,a,b)\,(b-a).$$

La definición es independiente del signo de la función f e, incluso, del signo de $b-a$, de manera que se verifica:

$$\int_a^b (-f) \;=- \int_a^b f$$

y

$$\int_a^b f \;=- \int_b^a f$$

2. Existencia

La demostración de la existencia de la integral se reduce a demostrar la existencia de la «altura media», o sea, demostrar que las alturas mínima $h(f,a,b)$ y máxima $H(f,a,b)$ coinciden, hecho que se consigue cuando f es monótona en $[a,b]$. Veámoslo: consideremos una n-ésima subdivisión en 2^n intervalos iguales de $[a,b]$; designamos con

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_{2^n_{-1}} < x_{2^n} = b$$

los puntos de subdivisión.

En el caso de que f sea, por ejemplo, monótona no decreciente, se tendrá

$$h(f,a,b,n) = \frac{1}{2^n} \quad [f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{2^n_{-1}})] \tag{1}$$

y

$$H(f,a,b,n) = \frac{1}{2^n} \quad [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{2^n})] \tag{2}$$

ya que los ínfimos y los supremos se obtienen, por ser monótoma, no decreciente, en los extremos izquierdos y derechos, respectivamente, en cada subintervalo. Restando (1) de (2):

$$H(f,a,b,n) - h(f,a,b,n) = \frac{f(x_{2^n}) - f(x_0)}{2^n} = \frac{f(b) - f(a)}{2^n}$$

Si tomamos el límite cuando $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} [H(f,a,b,n) - h(f,a,b,n)] = \lim_{n\to\infty} \frac{f(b) - f(a)}{2^n} = 0$$

de donde

$$H(f,a,b) = h(f,a,b)$$

con lo cual queda probada la existencia de la integral. Concluimos que, si la función f es monótoma (y acotada) en *[a,b]*, entonces la integral $\int_a^b f$ existe, y, puesto que, con la integrabilidad de funciones monótonas se puede justificar la integrabilidad de, prácticamente, todas las funciones manejadas en el cálculo (a pesar de que son pocas las funciones monótonas, la mayoría son monótonas a trozos), no habría necesidad de más en los cursos de cálculo introductorio.

La demostración de existencia de la integral para el caso de funciones continuas requiere hacer uso del concepto de continuidad uniforme, concepto difícil para el estudiante, por lo que no consideramos necesaria su demostración en el curso de cálculo introductorio, sobre todo si queremos evitar los problemas que le causan los infinitesimales.

Si f es continua en *[a,b]*, $\int_a^b f$ existe. Por las hipótesis, f es uniformemente continua, lo que nos indica que, dado un real arbitrario $\delta > 0$, existe otor real $\in > 0$, tal que

$$| f(x_1) - f(x_2) | < \in \text{ si } | x_1 - x_2 | < \delta.$$

Escogemos un n_0 tal que $\frac{b-a}{2^{n_0}} < \delta$

$$H(f,a,b,n) - h(f,a,b,n) = \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{2^n} (Hi - hi) < \in$$

para todo $n > n_0$, ya que por la continuidad los valores ínfimos y supremos son valores de la función. De la desigualdad anterior se deduce que $H(f,a,b) = h(f,a,b)$, con lo cual queda demostrado que existe esa «altura media», y de ello deducimos la existencia de la integral.

Dejamos para un trabajo posterior hablar de las propiedades y aplicaciones de la integral definida, así como de los resultados obtenidos al llevar al aula esta propuesta didáctica que llevamos poniendo en práctica durante 3 años con alumnos de Magisterio.

BIBLIOGRAFÍA

BIRHOFF, G. (1973): *A source book in classical analysis*, Cambridge, Mass., Harvard University Press.

BOYER, C. (1949): *The history of the calculus and its conceptual development*, Dover Publications, New York.

EDWARDS, CH. (1979): *The historical development of the calculus*, Springer-Verlag, New York.

FREUDENTAL, H. (1973): *Mathematics as an Educational Task*, Reidel Dordrecht.

LEBESGUE, H. (1966): *Measure and the integral*, Holden-Day, Berkeley, California.

ORTON, A. (1983a): *Students' understanding of integration*, Educational Studies in Mathematics, 14, 1-18.

—(1983b): *Students' understanding of differentiation*, Educational Studies in Mathematics, 14, 235-250.

SIERPINSKA, A. (1989): *How & when attitudes towwards mathematics & infinity become constituted into obstacles in students?* Actes PME 13, 166-173.

—(1987): *Humanities students and epistemological obstacles related to limits*, Educational Studies in Mathematics, 18, 4, 371-197.

—(1985): *Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite*, Recherches en Didactiques de Mathematiques, 6, 1, 5-7.

STRUIK, A. (1969): *A source bood in mathematics 1200-1800*, Harvard University Press, Cambridge, M.A.

TALL, D. and VINNER, S. (1981): *Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity*, Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169.

TUREGANO, P., PENALVA, C. (1990): *Alumnos universitarios ante el infinito: intuición y formalización*, Actas del Primer Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, Sevilla.