

LA PENDIENTE DE LA CURVA DE DILATACIÓN COMO CONTRASTE PARA MODELOS BOOLEANOS

F. Montes

M. Plaza

*F. Montes está en la Universitat de València y M. Plaza
en la Universidad de Castilla-La Mancha. ESPAÑA.*

ABSTRACT

After a short introduction to the RACS concept according to Matheron, the authors are hereby defining the Boolean models and its major characteristics in order to deal with the problems associated with the inferences on such model later. The core work involved consists of the construction of a test based on derivative at the origin of the function of dilatation which enables the Boolean model versus its natural alternatives to be counterchecked: the models which process of germs is a hardcore process and the models which process of germs is a Poisson's cluster. The test asymptotic behaviour is studied and several simulated and real images are applied.

RACS; INFERENCE ON BOOLEAN MODELS;
DILATION FUNCTION; DERIVATIVE TEST

AMS 1991 SUBJECT CLASSIFICATION: 60D05

1. CONJUNTOS ALEATORIOS

Describir la porosidad de un medio, estudiar la distribución de un arbusto en una determinada región, modelizar el crecimiento y distribución de un tumor canceroso en un tejido sano, analizar las distintas fases de la imagen proporcionada por un satélite o de un mineral, la distribución de microaneurismas en la retina de un paciente, son ejemplos de fenómenos cuyo estudio requiere herramientas más sofisticadas que el simple recurso a las características numéricas asociadas. Si suponemos además aleatoriedad en todos ellos, estamos afirmando que los modelos probabilísticos numéricos, variables o vectores aleatorios, son insuficientes.

La teoría de los conjuntos aleatorios, consolidada durante la primera mitad de los años sesenta, pretende dar adecuada respuesta a los ejemplos anteriores. Las publicaciones de Kendall (1974) [9] y Matheron (1975) [11] son seminales; el trabajo de Kendall es una aproximación introductoria, mientras que el libro de Matheron supone la exposición de una teoría elaborada y en el que muchas de las conjeturas planteadas por Kendall hallan respuesta. Desde su publicación en 1975, el libro de Matheron ha sido referencia obligada para cualquier trabajo posterior y fuente, todavía sin agotar, de ideas para posteriores desarrollos. Para introducir brevemente el concepto de conjunto aleatorio en \mathbb{R}^d , lo haremos siguiendo a Matheron.

1.1. Conjuntos aleatorios cerrados: RACS

1. Sea \mathcal{F} la familia de los subconjuntos cerrados de \mathbb{R}^d . Para $B \subset \mathbb{R}^d$ definimos las familias,

$$\mathcal{F}_B = \{F \in \mathcal{F}: F \cap B \neq \emptyset\},$$

de todos los cerrados que *tocan* a B , y

$$\mathcal{F}^B = \{F \in \mathcal{F}: F \cap B = \emptyset\},$$

de todos los cerrados que *no tocan* a B .

2. A partir de estas familias podemos dotar a \mathcal{F} de una topología, $\tau_{\mathcal{F}}$, engendrada por la base

$$\mathcal{F}_{G_1, \dots, G_n}^K = \mathcal{F}^K \cap \mathcal{F}_{G_1} \cap \dots \cap \mathcal{F}_{G_n},$$

donde $K \in \mathcal{K}$ es un compacto cualquiera de \mathbb{R}^d y los $G_i \in \mathcal{G}$, $\forall i$, son abiertos cualesquiera. Esta topología es conocida como *hit or miss*, puesto que los elementos de su base están constituidos por familias de cerrados que *no tocan* a K y *tocan* simultáneamente a todos los G_i , $i = 1, \dots, n$, y con ella \mathcal{F} es un espacio compacto, Hausdorff y separable.

3. El siguiente paso consistirá en dotar a \mathcal{F} de la σ -álgebra de Borel, $\sigma_{\mathcal{F}}$, asociada a $\tau_{\mathcal{F}}$. Se comprueba fácilmente que $\sigma_{\mathcal{F}}$ puede engendrarse a partir de la familia $\{\mathcal{F}^K, K \in \mathcal{K}\}$ o bien de la familia $\{\mathcal{F}_G, G \in \mathcal{G}\}$. Sobre el espacio medible $(\mathcal{F}, \sigma_{\mathcal{F}})$ podemos definir ahora el RACS.

Definición 1. Un *conjunto aleatorio cerrado*, RACS, es cualquier aplicación medible, A , entre un espacio de probabilidad abstracto y el espacio medible $(\mathcal{F}, \sigma_{\mathcal{F}})$,

$$A: (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathcal{F}, \sigma_{\mathcal{F}}).$$

El RACS A induce sobre $(\mathcal{F}, \sigma_{\mathcal{F}})$ una probabilidad, P_A , de manera que $(\mathcal{F}, \sigma_{\mathcal{F}}, P_A)$ es un espacio de probabilidad.

4. Para una variable aleatoria X , su función de distribución es una utilísima herramienta que nos permite conocer su comportamiento probabilístico. ¿Existe una noción similar para los RACS? La respuesta se obtiene de la definición y del teorema que siguen.

Definición 2. Sea T una función sobre \mathcal{K} , la familia de los compactos de \mathbb{R}^d . Decimos que T es una *capacidad alternante de Choquet de orden infinito* si satisface:

- a) Si $K_n \downarrow K$ entonces $T(K_n) \downarrow T(K)$, y
 b) $S_n(K; K_1, \dots, K_n) \geq 0$, donde

$$S_n(K; K_1, \dots, K_n) = \\ = S_{n-1}(K; K_1, \dots, K_{n-1}) - S_{n-1}(K \cup K_n; K_1, \dots, K_{n-1}),$$

$S_1(K; K_1) = T(K \cap K_1) - T(K)$ y K, K_1, \dots, K_n son elementos de \mathcal{K} .

Teorema 1 (Choquet-Matheron). Sea T un funcional sobre \mathcal{K} . Existe una única distribución de probabilidad sobre σ_f con $P(\mathcal{F}_K) = T(K)$ si y sólo si T es una *capacidad alternante de Choquet de orden infinito* tal que, $0 \leq T(K) \leq 1, \forall K$, y $T(\emptyset) = 0$.

Esta introducción merece dos pequeñas observaciones, una acerca de la topología *hit or miss*, y la segunda acerca de la condición de cerrado que hemos impuesto al conjunto aleatorio.

- **Observación 1.** La topología τ_f viene impuesta por la forma en que queramos caracterizar el conjunto aleatorio. Cuando escribimos

$$T(K) = P(\mathcal{F}_K) = P(A \text{ toque a } K)$$

estamos utilizando el compacto K como *conjunto test* para describir A observando simplemente si *lo toca o no lo toca*. La inconveniencia de utilizar otras caracterizaciones para A (por ejemplo alguna *medida* del tamaño de $A \cap K$) es justificada por Kendall (1974) [9] en la introducción de su trabajo.

- **Observación 2.** La noción de conjunto aleatorio le es sugerida a Matheron a partir del estudio de medios porosos. En el prefacio de su libro se pregunta Matheron acerca de las características topológicas de A a través del siguiente comentario: «... *In other words, does a point of the boundary of A belong to A or not? From an experimental point of view, this question is absolutely senseless, because no physical reality corresponds perfectly to the notion of point belonging to the boundary...*». Más adelante reconocer que son razones de *comodidad* operativa y riqueza de resultados las que le llevan a elegir la familia \mathcal{F} .

Otras referencias de interés sobre el concepto de conjunto aleatorio son: Stoyan, Kendall & Mecke (1989) [23] (en adelante SKM), Serra (1982) [22] y Weil & Wiacker (1993) [25].

2. EL MODELO BOOLEANO

De entre los RACS el más conocido y extendido es el *modelo Booleano* y ello porque como señalan en su texto SKM [23], pág. 68, se trata de un modelo flexible, sencillo y manejable en cuanto a la expresión de sus características básicas, y útil tanto para describir y modelizar imágenes bifásicas como para explicar su génesis.

- **Definición 3 (Matheron).** Sea \mathcal{A} un proceso de Poisson sobre \mathcal{K}' , la familia de los compactos no vacíos de \mathbb{R}^d , tal que la medida asociada al proceso es σ -finita sobre \mathcal{K}' . Al RACS resultante de la unión de los elementos de \mathcal{A} se le denomina *modelo Booleano*.

Una definición más restrictiva, pero quizás más operativa puede encontrarse en el texto de SKM.

- **Definición 4 (Stoyan, Kendall & Mecke).** Sea $\Phi = \{x_1, x_2, \dots\}$ un proceso de Poisson estacionario en \mathbb{R}^d con intensidad λ . Sea X_1, X_2, \dots , una sucesión de RACS a. s. compactos, independientes idénticamente distribuidos como X_0 e independientes de Φ , verificando

$$E [v_d(X_0 \oplus K)] < +\infty, \quad \forall K \in \mathcal{K}, \quad (1)$$

donde v_d es la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^d . Entonces,

$$X = \bigcup_{n \geq 1} (X_n + x_n) \quad (2)$$

es un *modelo Booleano*, $X(X_0, \lambda)$, con *grano primario* X_0 e *intensidad* λ .

La condición (1) es la trasposición de la σ -finitud exigida a la medida asociada al proceso de Poisson en la definición de Matheron. Asegura que cualquier compacto K toque a lo sumo un número finito de granos, $X_n + x_n$ del modelo.

El modelo Booleano es un caso particular de lo que Hanhisch (1981) [8] denomina *modelos de germen-grano*, definidos como (2) pero en los que Φ es un proceso puntual cualquiera, y $\{X_n\}$ es una sucesión de RACS a. s. compactos.

2.1. Características del modelo Booleano

- **Funcional de capacidad.** Recordemos que para cualquier compacto K ,

$$T_X(K) = P(X \cap K \neq \emptyset).$$

Aplicando las propiedades del proceso de Poisson subyacente,

$$T_X(K) = 1 - \exp\{-\lambda E[v_d(X_0 \oplus \check{K})]\}, \quad (3)$$

donde $\check{K} = \{-x; x \in K\}$.

Grano primario convexo. La convexidad del grano primario permite recurrir a la fórmula de Steiner para desarrollar $E[v_d(X_0 \oplus \check{K})]$, lo que proporciona para (3) expresiones más convenientes. Para el caso \mathbb{R}^2 , del que haremos abundante uso en lo que sigue, (3) tiene la forma

$$\begin{aligned} T_X(K) &= 1 - \exp\{-\lambda E[v_2(X_0 \oplus \check{K})]\} = \\ &= 1 - \exp\left\{-\lambda \left[\bar{A}(X_0) + \frac{1}{2\pi} \bar{U}(X_0) U(K) + A(B)\right]\right\}, \quad (4) \end{aligned}$$

donde $\bar{A}(\cdot)$ y $A(\cdot)$ indican, respectivamente, el área media y el área del correspondiente argumento, siendo $\bar{U}(\cdot)$ y $U(\cdot)$ los perímetros.

- **Fracción de volumen.** La fracción de volumen p representa el volumen medio ocupado por X en una región de volumen unidad. Dada la estacionariedad del modelo Booleano, heredada del proceso de Poisson, el valor de p es independiente de la región elegida y puede expresarse mediante

$$T_X(\{0\}) = P(0 \in X).$$

Si tomamos $K = \{0\}$ en (3) obtenemos

$$p = 1 - \exp\{-\lambda E[v_d(X_0)]\} \quad (5)$$

Su complementario, $v = 1 - p$, es conocida como la *fracción de vacío* o *porosidad* del modelo.

- **Función de distribución de contacto.** Si situamos un compacto cualquiera K de \mathbb{R}^d que contenga el origen, en el poro (X^c) de un RACS X y llevamos a cabo homotecias sucesivas, rK , hasta conseguir *tocar* a X , la forma de K y la distribución de los valores de r nos permitirán conocer la estructura de dicho poro. Para formalizar el procedimiento definimos la *variable de contacto* $D_K = \inf\{r; X \cap rK \neq \emptyset\}$. La distribución de probabilidad

de D_K , condicionada al suceso $\{D_K > 0\}$, recibe el nombre de *función de distribución de contacto* y se calcula mediante,

$$H_K(r) = P(D_K \leq r | D_K > 0) = 1 - \frac{P(X \cap rK = \phi)}{1 - p} \quad (6)$$

Para el caso de un modelo Booleano, (6), a partir de (3) y (5), adquiere la forma,

$$H_K(r) = 1 - \exp \{-\lambda (E[v_d(X_0 \oplus \check{K})] - E[v_d(X_0)])\} \quad (7)$$

La forma del elemento estructurante K juega un papel importante y de entre todas las posibles los casos *esférico* ($K = B$, bola unidad) y *lineal* ($K = L$, segmento unidad) son los de mayor interés. La distribución del contacto esférico es también llamada distribución del *primer contacto*, puesto que $D_B = \text{dist}(x, X)$, $x \in X^c$.

Más detalles acerca del modelo Booleano sus propiedades, características y aplicaciones pueden encontrarse en SKM (1989) [24], Serra (1982) [22] y Schmitt & Mattioli [21].

3. INFERENCIA SOBRE MODELOS BOOLEANOS

Los problemas generales asociados al uso de los modelos estadísticos son la *estimación de los parámetros* y el *contraste del modelo*. No es nuestro objetivo referirnos aquí al problema de la estimación paramétrica en modelos Booleanos, el lector interesado puede consultar los trabajos de Ayala, Ferrándiz & Montes (1993) [2], Molchanov & Stoyan (1993) [13], Molchanov (1993) [12] y Weil (1993) [224], provistos todos ellos de abundante bibliografía.

Los principales métodos de contraste para modelos Booleanos en el plano, siguiendo la descripción adoptada en Plaza & Montes (1992) [17], son:

- **Métodos basados en la función de contacto esférico.** En el texto de Diggle (1981) [5] se utiliza la función de distribución de contacto esférico, la teórica y la estimada a partir de un modelo Booleano simulado y con iguales características, en un test de Montecarlo basado en el rango de $T_0 = \int_0^a (H_B(r) - \check{H}_B(r))^2 dr$.
- **Métodos basados en ajustes mínimo-cuadráticos.** Serra (1982) [22] propone comparar la función experimental $g(r) = -\log(1 - \check{H}_B(r))$, o bien $h(r) = -\log(\check{Q}(rS_0))$, donde $\check{Q}(rS_0) = P(rS_0 \subset X^c)$, con un polinomio cuadrático, su contrapartida teórica bajo la hipótesis del modelo Booleano. En Hall (1988) [7] y

Cressie & Laslett (1987) [4] se aportan comentarios, sugerencias y mejoras del método.

- **Métodos basados en transformaciones morfológicas.** En los trabajos de Ripley (1986, 1988) [19, 20] se sugiere comparar cualitativamente las curvas de dilatación, erosión, apertura y cierre de la imagen observada con las mismas curvas estimadas sobre una imagen simulada a partir de los parámetros estimados en la imagen a estudiar. Las curvas asociadas a las funciones de dilatación, erosión, apertura y cierre, se definen como sigue: ...

TABLA 1.
Funcionales resumen de Ripley.

Función	Expresión
dilatación	$d_B(r) = \text{vol frac}(X \oplus r\check{B})$
cierre	$c_B(r) = \text{vol frac}((X \oplus r\check{B}) \ominus rB)$
apertura	$o_B(r) = \text{vol frac}((X \ominus r\check{B}) \oplus rB)$
erosión	$e_B(r) = \text{vol frac}(X \ominus r\check{B})$

donde $X \oplus B = \{z = x + y, x \in X, y \in B\}$ y $X \ominus B = \bigcap_{y \in B} X_y$ son la adición y sustracción de Minkowski, respectivamente; siendo X_y el trasladado de X mediante y .

En las anteriores expresiones B es el elemento estructurante con el que llevamos a cabo la transformación morfológica. Moore & Archambault (1991, 1993) [15, 1] han utilizado las ideas de Ripley para construir un test que permita contrastar si el proceso estocástico subyacente en la imagen es uno determinado. Estudian, en las referencias citadas, las características del test y sus propiedades asintóticas.

4. ALTERNATIVAS AL MODELO BOOLEANO

Utilizando los recursos de Ripley y en sentido próximo al de los trabajos de More y Archambault nos proponemos obtener un contraste para el modelo Booleano. Deseamos además que nuestro test nos proporcione información, en el caso de rechazo, de cuál es la alternativa aceptable para la imagen analizada, y ello nos obliga a definir cuáles son las posibles alternativas al modelo Booleano.

Recordemos que el modelo Booleano es un caso particular de lo que Hanisch (1981) [8] denomina *modelos de germen-grano*: un proceso puntual Φ cualquiera y una sucesión $\{X_n\}$ de RACS a. s. compactos implantados sobre los puntos de Φ . La forma más *natural* y *senci-*

lla de alterar el modelo es variar el proceso puntual y, siguiendo este razonamiento, las alternativas al proceso de Poisson que caracteriza el modelo Booleano vienen de sustituirlo por un proceso *hardcore*, que representa una mayor tendencia a la *regularidad*, o por un proceso *cluster*, que describe patrones de puntos *menos regulares*.

Esta manera de proceder es similar a la utilizada en procesos puntuales. Los test que vamos a proponer intentan, en definitiva, actuar sobre las localizaciones x_n de los granos X_n , aun cuando éstas no están disponibles, pues la información sobre el modelo viene dada generalmente a través de una o varias imágenes bifásicas.

Como modelo representativo de los *procesos hardcore*, se ha tomado el proceso resultante de aplicar a un proceso puntual de Poisson de intensidad λ el segundo método de inhibición de Matérn para una distancia de rechazo d . Y como modelo característico de la amplia familia de *procesos cluster* se ha tomado el proceso en el que el número de puntos de cada cluster sigue una distribución de Poisson con media μ , estando dichos puntos repartidos uniformemente en una bola de radio fijo R y centro un proceso puntual estacionario de Poisson de intensidad λ (Matérn (1986) [10], cap. 3; SKM (1989) [23], págs. 143 ss.; Diggle (1983) [6], pág. 61). La figura 1 nos muestra modelos de germen y grano cuyos procesos subyacentes son, respectivamente, cluster, hardcore y Poisson.

La figura 2 muestra la representación conjunta de las curvas empíricas de dilatación para los modelos hardcore, Booleano y cluster.

Esta figura nos sugiere que podemos utilizar la pendiente de la curva de dilatación con el fin de discriminar entre las alternativas que antes hemos comentado. Como se observa en la imagen, y en concordancia con el resultado de Hall (1988) [7], págs. 183-187, se espera intuitivamente que un modelo de germen y grano con germen de tipo hardcore proporcione mayor pendiente en la curva de dilatación que un germen de Poisson, y éste a su vez una pendiente mayor para dicha curva que un modelo con germen de tipo cluster, en el caso de que los granos sean idénticos para los tres tipos distintos de germen.

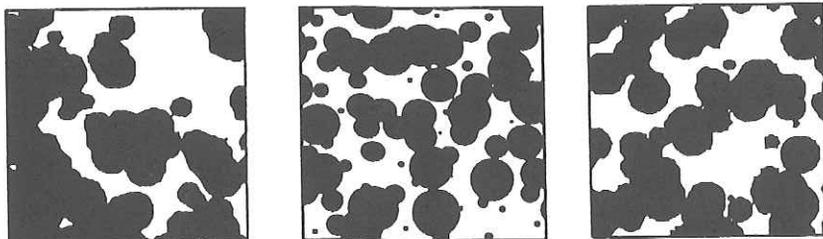


FIGURA 1.

De izquierda a derecha modelos con germen de tipo cluster y hardcore, y un modelo booleano.

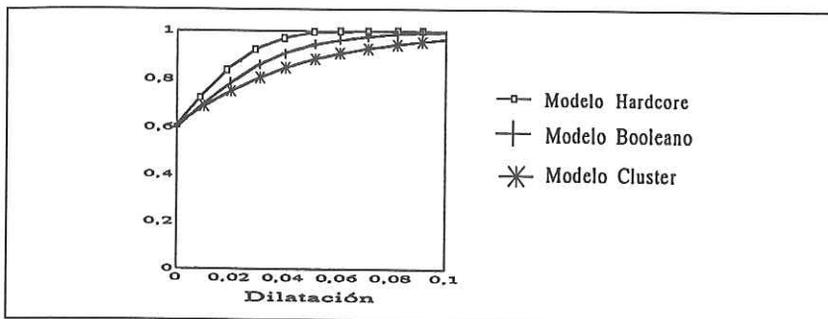


FIGURA 2.
Representación conjunta de la curva de dilatación para los modelos de la Figura 1.

5. EL TEST DE LA DERIVADA

En efecto, si tenemos en cuenta que $d_B(r) = P(0 \in X \oplus r\check{B})$, para el caso del modelo Booleano con grano primario convexo la fórmula (4) nos permite escribir,

$$\begin{aligned}
 d_B(r) &= P(0 \in X \oplus r\check{B}) = \\
 &= 1 - P(0 \notin X \oplus r\check{B}) = \\
 &= 1 - \exp\{-\lambda E[v_2(X_0 \oplus r\check{B})]\} = \\
 &= 1 - \exp\left\{-\lambda \left[\bar{A}(X_0) + \frac{r}{2\pi} \bar{U}(X_0) U(B) + r^2 A(B) \right]\right\}.
 \end{aligned}$$

El valor de su derivada en $r=0$ viene dado por

$$d'_B(0) = \lambda \bar{U}(X_0) U(B) (1 - d_B(0)) / 2\pi.$$

Si se toma B como la bola unidad, entonces

$$d'_B(0) = \lambda \bar{U}(X_0) \nu, \tag{8}$$

siendo $\nu = 1 - d_B(0)$ la *porosidad* o *fracción de vacío*. La ventaja de esta expresión es que puede calcularse numéricamente a partir de las estimaciones de la fracción de vacío ν .

Para el cálculo empírico de la derivada en el origen se tiene la fórmula (Burden & Faires (1985) [3])

$$f'(0) = \frac{-3f(0) + 4f(h) - f(2h)}{2h} + \frac{h^2 f^{(3)}(\epsilon)}{3}, \quad 0 \leq \epsilon \leq h. \tag{9}$$

5.1. Un test de Montecarlo con $d'_B(0)$

En los ejemplos siguientes vamos a utilizar la derivada en el origen de la función de dilatación como estadístico de contraste a través de un test de Montecarlo. El procedimiento será como sigue:

1. Simulamos una realización de un modelo de germen y grano, con germen cluster de Poisson o hardcore y grano circular de radio fijo. Estimamos su fracción de volumen p y calculamos $d'_B(0)$ mediante (9), tomando $h = 0.01$.
 2. A partir de p y de la fórmula (5), como el grano es conocido, podemos determinar la intensidad λ de un modelo Booleano con esa p .
 3. Simulamos 49 realizaciones de este modelo Booleano, calculando para cada una de ellas el valor de $d'_B(0)$ mediante la fórmula (9). Estos valores se comparan con el obtenido para la realización original, determinando cuál es su rango entre los 50. También se ha calculado $d'_B(0)$ mediante (8) con el objeto de comprobar el similar comportamiento de ambas fórmulas.
 4. El resultado del test no depende de la realización elegida de nuestro modelo original, como lo prueba el hecho de que en otras 25 simulaciones se obtienen resultados similares.
- **Ejemplo 1 (Modelo Cluster).** Como ejemplo se puede considerar un modelo de germen y grano con un proceso de gérmenes de tipo cluster de parámetros $\lambda = 45$, $\mu = 3$ y $R = 0.1$ y grano circular de radio fijo igual a 0.05. El modelo ha sido simulado sobre un cuadrado de 8 unidades de lado, con una franja adicional de 0.1 unidades para evitar el efecto arista, y un grid de muestreo de 200×200 . Su fracción de vacío es igual a 0.4316. Para ese modelo se tiene $d'_B(0) = 12.05$. Si se tratara de un modelo Booleano con ese grano, supuesto conocido, y con esa fracción de volumen, entonces le correspondería una intensidad $\lambda = 107.0$ y un valor de $d'_B(0) = 14.51$. Al realizar 50 simulaciones en las mismas condiciones que en el modelo cluster original, se obtiene los resultados de la siguiente tabla,

	media	min	max
$d'_B(0)$ empírica	14.74	14.10	15.37
$d'_B(0)$ teórica	14.58	14.27	14.97
25 simulaciones	11.72	11.28	12.29

corresponde a 25 realizaciones de dicho modelo, siempre con la misma ventana y el mismo grid de muestreo.

- **Ejemplo 2 (Modelo Cluster).** Se puede considerar el mismo modelo cluster del ejemplo anterior y simularlo en un cuadrado de lado 2.1, con un grid de muestreo de 100×100 . Se obtiene una realización con fracción de vacío 0.4358 y un valor $d'_B(0) = 11.64$. El modelo Booleano equivalente, supuesta conocida la distribución del grano, tendría una intensidad $\lambda = 105.75$ y un valor $d'_B(0) = 14.48$. Al realizar 50 simulaciones se obtienen los resultados expresados en la tabla:

	media	min	max
$d'_B(0)$ empírica	14.79	13.74	15.80
$d'_B(0)$ teórica	14.54	13.39	16.30
25 simulaciones	11.72	10.42	12.62

- **Ejemplo 3 (Modelo Hardcore).** En una ventana de las características de la del ejemplo 2, se simuló una realización de un modelo hardcore con parámetros $\lambda = 200$, distancia de rechazo $d = 0.075$ y grano circular de radio 0.05. Se obtuvo $\nu = 0.4667$ y $d'_B(0) = 18.60$. Supuesto conocido el radio del grano, para un modelo Booleano de estas características resultaría $\lambda = 97.03$, con un valor para $d'_B(0)$ de 14.22. En 50 simulaciones de un modelo Booleano con esos parámetros se han obtenido los siguientes resultados:

	media	min	max
$d'_B(0)$ empírica	14.45	13.66	15.52
$d'_B(0)$ teórica	14.32	13.04	15.57
25 simulaciones	18.43	17.45	19.84

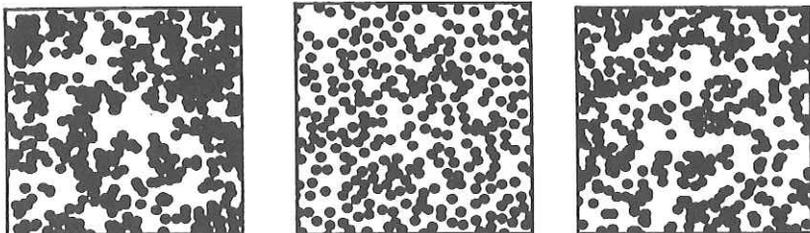


FIGURA 3.

De izquierda a derecha imágenes correspondientes a los ejemplos 2 y 3, y a una de las 49 simulaciones del modelo booleano para el ejemplo 3.

5.2. Aplicación a imágenes digitalizadas

Cuando hayamos de aplicar el test a imágenes reales digitalizadas, deberemos utilizar la versión digitalizada de la curva de dilatación,

$$d_H(i) = 1 - \exp \{-\lambda f_a \bar{A}_D(X_0 \oplus iH)\}.$$

Para la clase H de conjuntos acotados y convexos sobre trama hexagonal se tiene que, $\bar{A}_D(X_0 \oplus iH) = \bar{A}_D(X_0) + \bar{U}_D(X_0) i + 3i + 3i^2$, (Serra 1982, pág. 193 [22]), donde $\bar{A}_D(\cdot)$ y $\bar{U}_D(\cdot)$ son, respectivamente, el área y el perímetro digitales. Así, podemos calcular $d_H(1) - d_H(0)$ empíricamente sobre la imagen, o a través de la fórmula siguiente si conocemos los parámetros del modelo:

$$d_H(1) - d_H(0) = \exp \{-\lambda f_a \bar{A}_D(X_0)\} [1 - \exp \{-\lambda f_a \bar{U}_D(X_0) + 6\}].$$

El valor de la constante f_a que aparece en las expresiones anteriores, depende de la trama de digitalización, y permite el paso entre las versiones euclídea y digital de áreas y perímetros (Serra (1982) [22]).

Presentamos a continuación la aplicación del test a tres imágenes correspondientes a otros tantos fenómenos: la distribución de un arbusto llamado *Combretum*, la distribución de impurezas de carbono en un acero y la distribución de un alga fanerógama llamada *Thalassia* (Plaza (1991) [16]).

- **Imagen del Combretum.** Para la imagen digital del Combretum se obtuvo $d_H(1) - d_H(0) = 0.087$. Utilizando el método de estimación paramétrica propuesto por Ayala, Ferrándiz & Montes 1993 [2] con la imagen analizada, y siempre bajo la hipótesis del modelo Booleano, se obtienen las siguientes estimaciones: $\lambda = 332.6$, $\hat{A}(X_0) = 2.53 E - 3$, y $\hat{U}(X_0) = 1.729 E - 1$. Un test de Montecarlo con 19 simulaciones de modelos Booleanos con características como las estimadas, da lugar a valores comprendidos entre 0.0933 y 0.1046, todos ellos mayores que 0.087.

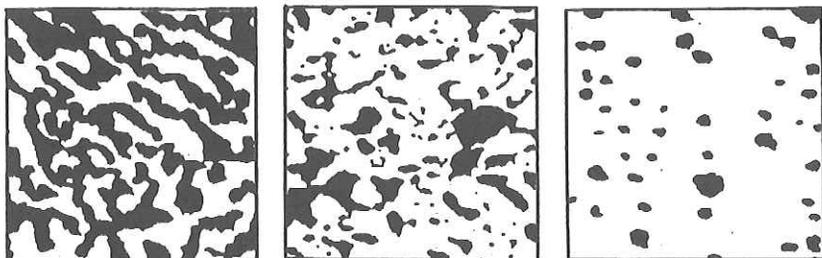


FIGURA 4.
Imágenes del Combretum, del corte de acero, y de la fanerógama Thalassia.

- **Imagen del corte del acero.** Para esta imagen el valor de la diferencia es $d_H(1) - d_H(0) = 0.0852$. Para estimar los parámetros del hipotético modelo Booleano correspondiente a esta imagen, utilizamos nuevamente el método de las dilataciones propuesto por Ayala, Ferrándiz & Montes 1993 [2], obteniendo $\lambda = 280.6$, $\hat{A}(X_0) = 1.458 E - 3$, y $\hat{U}(X_0) = 1.261 E - 1$. Al realizar 19 simulaciones de un modelo booleano con las mismas características y radio circular uniforme, los valores de $\Delta d_H(0)$ estuvieron comprendidos entre 0.0955 y 0.1076.
- **Imagen de la fanerómaga Thalassia.** Una situación diferente de las dos anteriores es la correspondiente a la fanerógama Thalassia, para la que $d_H(1) - d_H(0) = 0.0317$, y las estimaciones de los parámetros del modelo Booleano, obtenidas siempre mediante el método de las dilataciones, son $\lambda = 58.28$, $\hat{A}(X_0) = 1.975 E - 3$, y $\hat{U}(X_0) = 0.1405$. Al realizar 19 simulaciones de un modelo Booleano de las mismas características y grano circular de radio uniforme, el valor observado en la imagen fue el séptimo, estando los valores de las imágenes simuladas comprendidos entre 0.0227 y 0.0396.

5.3. Resultados asintóticos

Para las estimaciones de la fracción de vacío se dispone de resultados relativos a su varianza y su distribución asintótica. Para un modelo Booleano $X = (X_0, \lambda)$, y para $W \subset \mathbb{R}^2$, conjunto de Borel acotado, pueden encontrarse en Hall (1988) [7], pág. 147, los siguientes resultados:

- **Teorema 2.** Sea $W_l \equiv lW$ y V_l la región de vacío de X en W_l , entonces

$$\frac{v_2(V_l)}{v_2(W_l)} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \exp\{-\lambda \bar{A}(X_0)\} \quad \text{a.s.}$$

- **Teorema 3.** Si $E(X_0^2) < +\infty$, entonces $\text{var}(v_2(V_l)) \sim \sigma^2 v_2(W_l)$ y

$$\frac{v_2(V_l) - E(v_2(V_l))}{[v_2(W_l)]^{1/2}} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} N(0, \sigma^2)$$

en distribución y

$$\sigma^2 = \exp\{-2\lambda \bar{A}(X_0)\} \int_{\mathbb{R}^2} (\exp\{\lambda \bar{A}((x + X_0) \cap X_0)\} - 1) dx.$$

Estos resultados nos permiten obtener un test asintóticamente exacto para contrastar si nuestro modelo de germen y grano es un modelo Booleano, basado en $d'_B(0)$. En efecto, del teorema 3 y de (8) se deduce

$$Z = \frac{d'_B(0) - E(d'_B(0))}{\frac{\lambda \bar{U}(X_0) \sigma}{(v_2(W_l))^{1/2}}} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} N(0, 1). \quad (10)$$

La única dificultad en la aplicación de (10) proviene del cálculo de σ^2 . En este caso para modelos planos con grano formado por discos de radio fijo r se tiene:

$$\sigma^2 = (2r)^2 2\pi \exp\{-2\pi\lambda r^2\} \int_0^1 x [\exp\{\lambda r^2 B(x)\} - 1] dx. \quad (11)$$

donde $B(x) = 2(\text{arc cos } x - x\sqrt{1-x^2})$ es el área de la lente de intersección de dos círculos unitarios con los centros a distancia $2x$. Véase Hall (1988) [7], pág. 146. Y podemos calcular la integral de (11) mediante el método de Montecarlo o algún método numérico. La aproximación obtenida para la integral:

$$I = \int_0^1 x [\exp\{\lambda r^2 B(x)\} - 1] dx$$

nos permite calcular con cierta seguridad σ^2 , y la varianza de $d'_B(0)$ que es:

$$\text{var}(d'_B(0)) = \frac{(\lambda \bar{U}(X_0))^2 \sigma^2}{v_2(W_l)}.$$

De esta manera se tiene para cada ejemplo un estadístico de contraste que nos orienta sobre el sentido de la inadecuación del modelo booleano a la imagen objeto de estudio. Como consecuencia de todo ello se tiene la tabla:

ejemplo	λ	$d'_B(0)$	$E(d'_B(0))$	Integral	$\text{var}(d'_B(0))$	Z
1 CL	107.00	12.05	14.51	0.1291	2.668E-2	-15.06
2 CL	105.75	11.64	14.48	0.1273	4.191E-1	-4.39
3 HC	97.03	18.60	14.22	0.1147	3.647E-1	7.25

Es importante señalar cómo el signo de las desviaciones nos indica la tendencia al agrupamiento (*cluster*) o al rechazo (*hardcore*) en los procesos de gérmenes, y cómo el tamaño de la ventana de muestreo influye en la potencia del contraste.

6. FUTURAS LÍNEAS DE TRABAJO

El futuro desarrollo del trabajo deberá intentar extender los resultados de la sección anterior al tratamiento de imágenes digitales. Sería muy valioso poder obtener un test sencillo y con comportamiento asintótico conocido, aunque los resultados del test de Montecarlo ya nos permiten, como se ha visto en los ejemplos, una solución satisfactoria para los modelos de germen y grano.

REFERENCIAS

- [1] ARCHAMBAULT, S. and MOORE, M. (1993): «Statistiques morphologiques pour l'ajustement d'images». *Int. Stat. Rev.*, 61: 283-297.
- [2] AYALA, G., FERRÁNDIZ, J. and MONTES, F. (1993): «On parametric estimation in boolean models». In Racugno, V., editor, *Rassegna di Metodi Statistici ed Applicazioni* 8, pages 1-17. CNR Cagliari.
- [3] BURDEN, R. L. and FAIRES, J. D. (1985): *Numerical Analysis*. PWS.
- [4] CRESSIE, N. and LASLETT, G. M. (1987): «Random sets theory and problems of modelling». *SIAM Review*, 29: 557-574.
- [5] DIGGLE, P. J. (1981): «Binary mosaics and the spatial pattern of heather». *Biometrics*, 37: 531-539.
- [6] DIGGLE, P. J. (1983): *Statistical Analysis of Spatial Point Processes*. Academic Press.
- [7] HALL, P. (1988): *Introduction to the Theory of Coverage Processes*. John Wiley and Sons.
- [8] HANISCH, K. H. (1981): «On classes of random sets and point processes». *Serdica*, 7: 160-166.
- [9] KENDALL, D. G. (1974): «Foundations of a theory of random sets». In Harding, E. and Kendall, D., editors, «Stochastic Geometry», pages 322-376. John Wiley and Sons.
- [10] MATÉRN, B. (1986): *Spatial Variation* 2nd Edition, volume 36 of *Lectures Notes in Statistics*. Springer Verlag.
- [11] MATHERON, G. (1975): *Random Sets and Integral Geometry*. John Wiley and Sons.
- [12] MOLCHANOV, I. S. (1993): «Statistics of the boolean models: from the estimation of means to the estimation of distributions». *6th International Workshop on Stochastic Geometry, Stereology and Image Analysis*. In honour to Prof. Santaló. Valencia (Spain).
- [13] MOLCHANOV, I. S. and STOYA, D. (1993): *Asymptotic properties of estimators for parameters of the boolean model*. Submitted.
- [14] MONTES, F. and PLAZA, M. (1994): *Statistical inference on boolean models: A test germ based on morphological transformations*. Submitted.
- [15] MOORE, M. and ARCHAMBAULT, S. (1991): «On the asymptotic behavior of some statistics based on morphological operations». In A. Possolo, editor, *IMS Lecture Notes, Monograph Series*, pages 258-275. proceedings of the 1988 AMS-IMS-SIAM Joint Conference on Spatial Statistics and Imaging.
- [16] PLAZA, M. (1991): *Contrastes en modelos de germen y grano*. PhD thesis, Universitat de València.

- [17] PLAZA, M. and MONTES, F. (1992): «Un contraste en modelos de germen y grano». *QÜESTIÓ*, 16: 117-133.
- [18] PLAZA, M. and MONTES, F. (1993): *A test in germ-grain models*. SPA93. Amsterdam.
- [19] RIPLEY, B. D. (1986): «Statistics, images and pattern recognition». «The Canadian Jour. of Statist.», 14: 83-111.
- [20] RIPLEY, B. D. (1988): *Statistical Inference for Spatial Processes*. Cambridge University Press.
- [21] SCHMITT, M. and MATTIOLI, J. (1993): *Morphologie Mathématique*. Masson.
- [22] SERRA, J. (1982): *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press.
- [23] STOYAN, D., KENDALL, W. S. and MECKE, J. (1989): *Stochastic Geometry and its applications*. 2nd Edition. John Wiley and Sons.
- [24] WEIL, W. (1993): «The estimation of mean shape and mean particle number in overlapping particle systems in the plane». *6th International Workshop on Stochastic Geometry, Stereology and Image Analysis*. In honour to Prof. Santaló. Valencia (Spain).
- [25] WEIL, W. and WIEACKER, J. A. (1993): «Stochastic geometry». In Gruber, P. and Wills, J., editors, *Handbook of Convex Geometry*, pages 1391-1438. Elsevier.