Revista Galega de Economía, Vol.2, Núm.2 (1993), pp.145-158

A FUNCIÓN INTENSIDADE DE RENDA: MODELOS PARA A CURVA DE LORENZ E A DISTRIBUCIÓN PERSOAL DA RENDA

JULIO MIRÁS
Instituto Galego de Estatística

Palabras clave: *Curva de Lorenz, Distribución persoal da renda.*

Key words: *Lorenz curve; Individual distribution of income.*

Resumo

Se $Y=F(x)=P(X \leq x)$ é a función de distribución persoal da renda nunha determinada poboación, defino a Función Intensidade de Renda q(Y) como a renda medida en unidades de renda media e expresada como función da orde Y da devandita renda na distribución. Esta función é igual á primeira derivada (ou densidade) da Curva de Lorenz que corresponde á distribución F(x) e tamén é igual á función inversa desta función de distribución da renda, dividida pola renda media. Desta forma, ó tomar como elemento clave o modelo de función q(Y), quedan simultaneamente determinados o modelo de curva de Lorenz e o modelo de función de distribución da renda. Propóñense e estúdianse dous modelos xerais para q(Y) que denomino modelo Potencial-beta (C;A,B) e modelo Complementario-potencial-beta (C; A,B), que presentan casos particulares interesantes, algúns xa coñecidos e outros novos, e bos axustes ós datos empíricos.

Abstract

If Y=F(x)=P(XSx) is a function of the individual distribution of income in a given population, let q (Y) Income Intensity Function be defined as the income measured in units of average income and expressed as Y order function of the said income in the distribution. That function is equal to the first derivative (or density) of Lorenz curve that corresponds with F(x) distribution and it is also equal to the inverse function of that function of distribution of income. In this way, on taking the model of q(Y) function of the distribution of income as a key element, the model of Lorenz curve and the function model of distribution of income are simultaneously determined. Two general models for q(Y) are proposed an discussed. They are here termed (C;A,B) Potential-beta model and (C;A,B) Complementary-potential-beta model and both show some already well-known, peculiar and interesting cases a good agreement with empirical data.

1. A FUNCIÓN INTENSIDADE DA RENDA

1.1. A CURVA DE LORENZ EMPÍRICA

Se $x_1 < x_2 < ... < x_j < ... < x_n$ é unha mostra ordenada das rendas de n individuos, e

$$x = \sum_{1}^{n} x_j$$

é o total desas rendas, a proporción da renda total que corresponde ós j individuos con menores rendas é:

$$Q_j = \sum_{1}^{j} x_i / x \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

Se agora denotamos por Y_j; j=1,2,...,n a frecuencia acumulada de individuos con renda menor ou igual ca x_j (Y_j=j/n), a liña poligonal que une os puntos (0,0)...(Y_j,Q_j)...(1,1) denomínase Curva Empírica de Lorenz.

Xeralmente, os datos sobre ingresos ou rendas dos individuos ou familias, procedentes de estimacións obtidas a través de fontes fiscais e/ou enquisas de presupostos familiares, preséntanse baixo a forma de frecuencias agrupadas. Imos seguir empregando a mesma notación (Y_j,Q_j) para representar por Y_j a frecuencia relativa de individuos con renda inferior ou igual a un valor $0<x_1<\ldots<x_j<\ldots$ e por Q_j a proporción de renda total que corresponde a eses individuos.

No caso extremo en que tódalas n rendas son iguais, os puntos (Y_j,Q_j) atópanse na diagonal do cadrado unidade que adoita denominarse Liña de Equidistribución. En tódolos demais casos, a curva de Lorenz é unha poligonal situada por debaixo da liña de equidistribución; canto máis se separa desta, maior é a desigualdade da distribución das rendas.

1.2. A CURVA DE LORENZ CONTINUA

Admitimos que a función de distribución da renda Y=$F(x)$ verifica as condicións analíticas habituais nos modelos continuos:

(i) $F(x)$ é continua e monótona crecente para $x > 0$.
(ii) $0<F(x)<1$ para $x > 0$.
(iii) lim $F(x)$=0 para $x \to 0$.
(iv) lim $F(x)$=1 para $x \to \infty$.
(v) Existe a media $\mu=E\{x\}$.
(vi) Existe a densidade $f(x)=dF(x)/dx$ para $x>0$.

Tendo en conta que para unha distribución deste tipo a media é igual a

$$\mu=E\{X\}=\int_0^1 F^{-1}(y)\, dy$$

a definición usual da curva de Lorenz na súa versión continua é:

$$Q(Y) = \frac{1}{\mu} \int_0^Y F^{-1}(y)\, dy \qquad [1.2.1.]$$

Está claro que se a función de distribución Y=$F(x)$ verifica as condicións (i)...(vi), a correspondente curva de Lorenz é continua e monótona crecente de 0 a 1 para $0<Y<1$; polo tanto, pode ser formalmente considerada como unha función de distribución no intervalo unidade. Sen embargo, non toda función de distribución en $0 \leq Y \leq 1$ pode ser unha curva de Lorenz. Habemos ver, en 1.3.2., que ademais $Q(Y)$ ha cumpri-las seguintes condicións:

a) $Q(Y)$ é cóncava; $Q''(Y)>0$, en $0<Y<1$.

b) $Q'(0) = \lim_{Y\to 0} Q'(Y) = 0$ a tanxente a $Q(Y)$ na orixe é horizontal.

c) $Q'(1) = \lim_{Y\to 1} Q'(Y) = \infty$ a tanxente a $Q(Y)$ no punto Y=1 é vertical.

1.3. A FUNCIÓN INTENSIDADE DE RENDA

1.3.1. Intensidade de Renda

Chamamos Intensidade de Renda dun individuo w da poboación á súa renda expresada en unidades de renda media; isto é: $X(w)/\mu$, abreviadamente X/μ. A intensidade de renda dun individuo da poboación considerada vale 1 se a súa renda é igual á renda media; vale tanto menos ou máis ca 1 canto menor ou maior cá renda media sexa a súa renda.

1.3.2. Función Intensidade de Renda

Definímo-la Función Intensidade de Renda como a intensidade de renda $X(Y)/\mu$, expresada en función da orde Y=$F(X)$ desa renda na distribución. Denotámola por $q(Y)$.

Utilizando o símbolo -1 para denota-la

función inversa, a Función Intensidade de Renda é:

$$q(Y) = \frac{1}{\mu} F^{-1}(Y) = \frac{X(Y)}{\mu} \qquad [1.3.1.]$$

De acordo con esta definición, a Función Intensidade de Renda é igual:

a) Á función inversa da función de distribución da renda, dividida pola renda media.

b) De acordo co [1.2.1], a Función Intensidade de Renda tamén é igual á primeira derivada da curva de Lorenz:

$$dQ(Y)/dY = \frac{1}{\mu} F^{-1}(Y) = q(Y) \qquad [1.3.2]$$

Ó introduci-la función $q(Y)$ no discurso, pretendemos manexar un elemento analítico e dèscritivo, susceptible de modelización, como imos ver máis adiante, que conecta siumultaneamente coa función de distribución persoal da renda e coa curva de Lorenz.

Das condicións esixidas a $F(x)$ e de [1.3.2] temos:

$dQ(Y)/dY=q(Y) \rightarrow \infty$ para $Y \rightarrow 1$; por ser $F^{-1}(Y) \rightarrow \infty$ para $Y \rightarrow 1$.

$dQ(Y)/dY=q(Y) \rightarrow 0$ para $Y \rightarrow 0$; por ser $F^{-1}(Y) \rightarrow 0$ para $Y \rightarrow 0$.

Ademais, $q(Y)$ é positiva e crecente para $0<Y<1$; en consecuencia

$$q'(Y)=d^2Q(Y)/dY^2=Q''(Y)$$

é positiva; polo tanto $Q(Y)$ é concava.

Con isto quedan probadas as condicións a), b) e c), enunciadas no parágrafo 1.2, que debe cumprir unha curva de Lorenz continua.

Tamén resulta que a Función Intensidade de Renda se representa por unha curva positiva e crecente, que vale cero para $Y=0$ e tende a infinito cando $Y \rightarrow 1$. A intersección desta curva cunha recta horizontal $q=1$ prodúcese nunha abscisa Y_1 que representa a proporción de individuos con renda menor ou igual á media (intensidade de renda = 1). Análoga interpretación teñen as interseccións con rectas horizontais de ordenada menor ou maior ca 1.

1.3.3. Función de densidade

A función de densidade da variable renda $f(x)=dF(x)/dx$ pode obterse a partir de $q(Y)$ expresada como función de Y que denominamos orde da renda. De [1.3.1] resulta

$$F^{-1}(Y)=\mu q(Y)$$

de modo que

$$f(x)=dF(x)/dY=\frac{1}{\mu q'(Y)};\ Y=F(x) \qquad [1.3.3]$$

2. MODELOS PARA A CURVA DE LORENZ

Existe unha longa tradición na busca de modelos descritivos da función de distribución persoal da renda; dende a distribución de Pareto, pasando pola logarítmico-normal, a Gamma, a logarítmico-loxística, ata, entre outros, os modelos de Dagum e de Singh e Maddala.

Menor atención tiveron os modelos para a curva de Lorenz, quizais pola dificultade de atopar funcións analíticas de doado manexo que representen ben os datos empíricos; sen embargo, ímonos deter nunha crítica ós dous propostos por Kakwani.

2.1. MODELO KAKWANI (1976)

Tomando como eixe de abscisas a diagonal do cadro unidade no sentido $(0,0) \rightarrow (1,1)$ e como eixe de ordenadas a perpendicular a esa diagonal no sentido $(0,1) \rightarrow (1,0)$, propón o modelo

$$\eta=a\pi^{\alpha}(\sqrt{2}-\pi)^{\beta};\ a>0;\ \alpha,\beta>0;\ <\pi<\sqrt{2} \qquad [2.1.1]$$

segundo o cal a curva de Lorenz queda determinada polos puntos (π,η), no que

π é a abscisa e η a ordenada. Isto equivale á transformación de coordenadas:

$$\pi = \frac{1}{2}(Y + Q(Y))$$

$$\eta = \frac{1}{2}(Y - Q(Y)) \qquad [2.1.2]$$

A derivada de η respecto π é:

$$\frac{d\eta}{d\pi} = a\,\pi^{\alpha-1}(\sqrt{2}-\pi)^{\beta-1} \times$$

$$\times \{\alpha\sqrt{2} - (\alpha+\beta)\,\pi\} \qquad [2.1.3]$$

resultando que viola as condicións dunha curva de Lorenz xa que neste sistema de coordenadas ha ser:

$$\lim_{\pi \to 0} \eta' = 1 \; ; \; \lim_{\pi \to \sqrt{2}} \eta' = -1$$

Calquera que sexa $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, $d\eta$ / $d\pi$ tende a cero, ou $a \to \infty$, para $\pi \to \sqrt{2}$ e tende a cero, ou a ∞, para $\pi \to 0$. En resumo, o modelo [2.1.1] de Kakwani non é formalmente unha curva de Lorenz. Kakwani (1980) responde nunha nota a esta obxección recoñecendo esta singularidade e afirmando que polos bos axustes obtidos non ten influencia práctica o incumprimento das condicións analíticas do seu modelo nos extremos.

2.2. MODELO DE KAKWANI (1980)

Kakwani propón outro modelo de curva de Lorenz que foi axustado por J. Baró (1991) ás distribucións empíricas dos ingresos das familias españolas para os anos 1964, 1970, 1974, 1981 e 1987, estimadas por A. e J. Alcaide (1990), a partir de datos procedentes das enquisas de presupostos familiares do INE. Estas distribucións empíricas reprodúcense no cadro 1.

Este modelo de Kakwani, é:

$$Q(Y) = Y - AY^{\alpha}(1-Y)\beta; \; A>0, \; 0<\alpha\leq 1, \; 0<\beta\leq 1 \qquad [2.2.1]$$

e os seus parámetros poden determinarse, mediante axuste lineal mínimo-cuadrático, tomando logaritmos da seguinte forma:

$$L(Y-Q) = L(A) + \alpha L(Y) + \beta L(1-Y) \qquad [2.2.2]$$

No cadro 2 aparecen os valores A, α, β obtidos por Baró para cada un dos anos considerados.

A Función Intensidade de Renda deste modelo de Kakwani, é

$$q(Y) = \frac{dQ(Y)}{dY} = 1 - A\,Y^{\alpha-1}(1-Y)^{\beta-1} \times$$

$$\times \{\alpha - (\alpha+\beta)\,Y\} \qquad [2.2.3]$$

e obsérvase inmediatamente que, en todo caso, $0<\alpha\leq 1$, $0<\beta\leq 1$; $q(Y) \to -\infty$ para $Y \to 0$. En consecuencia, este modelo de Kakwani tampouco é formalmente unha curva de Lorenz. Nas proximidades de Y=0, $q(Y)$ faise negativa implicando que tamén $Q(Y)$ é negativa nun certo contorno $0<Y<\varepsilon$. Estas condicións son imposibles para calquera curva de Lorenz.

3. O MODELO POTENCIAL-BETA PARA A FUNCIÓN INTENSIDADE DE RENDA

O punto de vista que propoñemos neste traballo consiste en tomar como elemento clave do problema a Función Intensidade de Renda que, por unha banda, admite unha interpretación moi intuitiva (xa que é a renda expresada en unidades de renda media) e, por outra, se conecta simultaneamente coa curva de Lorenz (por se-la súa derivada primeira) e coa función de distribución persoal da renda (por se-la súa función inversa dividida pola renda media).

Posto que $Q(Y)$ é formalmente unha función de distribución no intervalo $0<Y<1$ (aínda que non toda distribución en $0<Y<1$, como vimos, pode representa-la curva de Lorenz) investigamos, en primeiro lugar, o modelo de función de densidade Beta (A,B) para representar $q(Y)$. Resulta que, na rexión $A>1$; $0<\beta<1$ do espacio paramétrico, a función de densidade Beta (A,B) cumpre as condicións para tomala

DECILAS	1964	1967	1970	1974	1981	1987
	ANOS					
1ª	0,0143	0,0133	0,0144	0,0176	0,0241	0,0264
2ª	0,0331	0,0303	0,0313	0,0318	0,0398	0,0421
3ª	0,0466	0,0402	0,0431	0,0447	0,0520	0,0533
4ª	0,0612	0,0552	0,0529	0,0511	0,0631	0,0645
5ª	0,0723	0,0664	0,0642	0,0634	0,0748	0,0745
6ª	0,0846	0,0773	0,0790	0,0804	0,0880	0,0863
7ª	0,0918	0,0839	0,0859	0,0906	0,1001	0,1008
8ª	0,1035	0,0972	0,0990	0,1009	0,1153	0,1146
9ª	0,1241	0,1212	0,1226	0,1228	0,1505	0,1490
10ª	0,3685	0,4132	0,4076	0,3957	0,2923	0,2885

Alcaide, J. (ver bibliografía).

Cadro 1
PROPORCIÓN DO INGRESO TOTAL DE CADA DECILA DE FAMILIAS ORDENADAS SEGUNDO O SEU INGRESO. ESPAÑA

	1964	1967	1970	1974	1981	1987
A	0,6022807	0,6405494	0,6502127	0,6604120	0,6455964	0,6207202
α	0,8202644	0,8466061	0,8599466	0,8820910	0,9042686	0,9033740
β	0,3243400	0,2799395	0,2936579	0,3169530	0,4857061	0,4755726

Baró, J. (1991).

Cadro 2
PARÁMETROS AXUSTADOS DO MODELO DE KAKWANI

como modelo da Función Intensidade de Renda. Neste caso, a curva de Lorenz será a correspondente función de distribución Beta.

Máis adiante habemos formular dous modelos que xeneralizan o Beta, introducindo un terceiro parámetro C ós que lle imos chamar Modelo Potencial-Beta $(C;A,B)$ e Modelo Complementario-Potencial-Beta.

3.1. O MODELO BETA (A,B)

3.1.1. Formulación

Supón que a curva de Lorenz responde a unha función de distribución Beta (A,B) con $A>1$; $0<B<1$. A Función Intensidade de Renda é neste caso

$$q\,(Y)=K\ Y^{A-1}\,(1-Y)^{B-1};\ 0<Y<1;\ A>1;\ 0<B<1 \qquad [3.1.1]$$

sendo $K=\Gamma(A+B)/\Gamma(A)\Gamma(B)$ a constante de integración e $\Gamma(.)$ o valor da función gamma completa.

Posto que

$$q\,(Y)=\frac{K\,Y^{A-1}}{(1-Y)^{1-B}}$$

podemos dicir que este modelo supón que a intensidade de renda dun individuo con renda X de orde Y é directamente proporcional a unha potencia positiva de Y, e inversamente proporcional a outra potencia positiva de $(1-Y)$.

Vexamos que o modelo cumpre as condicións analíticas dunha curva de Lorenz.

Para $A>1$; $0<B<1$ en [3.1.1], cúmprese $q(0)=0$, $q(1)=\infty$. Ademais

$$dq(Y)/dY = q'(Y) = \frac{KY^{A-2}}{(1-Y)^{2-B}} \times$$

$$\times \{(A-1)(1-Y)+(1-B)Y\}$$

de modo que para $0<Y<1$ é:

$$q'(Y)=d^2Q(Y)/dY^2>0$$

polo tanto $Q(Y)$ é cóncava. Polo demais, $Q(Y)$ é continua e monótona crecente en $0<Y<1$, por se-la distribución Beta.

3.1.2. Axuste

Un procedemento de axuste do modelo Beta para $Q(Y)$ consiste en interpretar, de acordo con [1.3.1], $\mu q(Y)$ como a inversa da función de distribución da renda. Deste modo, se témo-la distribución empírica de frecuencias da variable renda Y_j = frecuencia relativa de $X \leq x_j$, temos

$$x_j=\mu q(Y_j)=\mu KY_j^{A-1}(1-Y_j)^{B-1}$$

e tomando logaritmos:

$$L(x_j)=L(\mu K)+(A-1)\ L(Y_j)+(B-1)\ L(1-Y_j)$$

de xeito que ó aplicar regresión lineal mínimo-cuadrática, se son r_0, r_1, r_2 os coeficientes estimados, temos

$$r_0=L(\mu K)\ ;\ r_1=A-1\ ;\ r_2=B-1$$

de onde resulta:

$$A=1+r_1\ ;\ B=1+r_2\ ;\ \mu=\exp(r_0)/K$$

3.1.3. Un caso particular. A distribución logarítmico-loxística

Se no modelo Beta para $q(Y)$ admitímo-la relación $A=2-B$, resulta que a función de distribución persoal da renda que corresponde á curva de Lorenz Beta $(2-B,B)$ se pode obter explicitamente e é, precisamente, a distribución logarítmico-loxística. En efecto:

$$q(Y) = K\left[\frac{Y}{1-Y}\right]^{1-B};$$

$$0<Y<1\ ;\ 0<B<1 \qquad [3.1.2]$$

que se obtén de [3.1.1] tomando $A=2-B$. Se agora, tendo en conta que $q(Y)=x/\mu$, despexamos Y en [3.1.2], resulta

$$Y=F(x)\ \frac{ax^b}{1+ax^b};$$

$$x>0\ ;\ a,b>0 \qquad [3.1.3.]$$

onde os novos parámetros son

$$b=\frac{1}{1-B}\ ;\ a=(1/K\mu)^b \qquad [3.1.4]$$

e, neste caso particular, $K=\Gamma(2)/\Gamma(B)\Gamma(2-B)$.

A función de distribución obtida [3.1.3] é a logarítmico-loxística. En resumo, a aceptación do modelo de densidade Beta $(2-B,B)$ para a Función Intensidade de Renda condúcenos a admitir que:

a) O logaritmo da variable renda distribúese segundo a loxística.

Compróbase inmediatamente que se a variable renda X se distribúe segundo [3.1.3], por admiti-la densidade Beta $(2-B,B)$ para $q(Y)$, o seu logaritmo $Z=L(X)$ se distribúe segundo:

$$H(z)=P\{Z\leq z\}=\frac{ae^{bz}}{1+ae^{bz}};$$

$$-\infty<z<\infty \qquad [3.1.5]$$

que é a distribución loxística.

b) O logit da orde da renda $L\left[\dfrac{Y}{1-Y}\right]$

é función lineal do logaritmo da renda. Por ser

$$Y = F(x) = \frac{a x^b}{1 + a x^b}$$

resulta:

$$\frac{Y}{1 - Y} = a x^b$$

polo tanto:

$$L \left[\frac{Y}{1 - Y} \right] = L(a) + b\, L(x) \qquad [3.1.6]$$

Esta propiedade de linealidade [3.1.6] da función de distribución logarítmico-loxística permite un rápido axuste por regresión lineal mínimo-cuadrática, se dispoñemos da distribución empírica de frecuencias relativas acumuladas Y_j en intervalos de renda de extremos superiores x_j. Ademais, permite unha doada análise gráfica, representando a nube de puntos de abscisa L (x_j) e ordenada $L \left[\frac{Y_j}{1 - Y_j} \right]$.

A experiencia observada con datos de España e doutros países mostra que este modelo se axusta bastante ben ás distribucións empíricas procedentes de enquisas de presupostos familiares. Non obstante, tamén se observan desviacións e mencionaremos (a título de proposición que require unha investigación máis profunda) o seguinte: cando a nube de puntos se aparta da liña recta, xeralmente presenta unha forma lixeiramente convexa ou cóncava; ademais, o primeiro caso adoita presentarse en distribucións correspondentes a países considerados como máis atrasados no seu desenvolvemento económico (ou nunha data pretérita cando comparamos distribucións do mesmo país). Isto suxire que a distribución logarítmico-loxística podería tomarse como un modelo fronteira na transición (ó longo do tempo, ou do desenvolvemento económico) dende modelos con logit convexo cara a modelos con logit cóncavo.

3.2. O MODELO POTENCIAL-BETA

3.2.1. Formulación

Unha xeneralización interesante do modelo Beta consiste en admitir que a Función Intensidade de Renda responde ó modelo de función de densidade

$$q(Y) = JY^{CA-1} (1-Y)^{B-1};\ 0<Y<1 \qquad [3.2.1]$$

con $A>0$; $0<B<1$; $C>0$; $AC>1$; sendo J a constante de integración determinada por A,B,C. Este modelo supón que a variable $V=Y^C$ ten densidade Beta. En efecto, se en [3.2.1] se fai o cambio de variable $V=Y^C$, resulta como densidade de V:

$$h(V) = KV^{A-1} (1-V)^{B-1}$$

con $J=CK$, sendo K a constante de integración Beta (A,B).

Vexamos que o modelo Potencial-beta $(C;A,B)$ dado en [3.2.1] cumpre as condicións para que a súa correspondente integral

$$Q(Y) = \int_0^Y q(y)\, dy$$

poida ser unha curva de Lorenz. En [3.2.1], dentro do espacio paramétrico indicado, cúmprese que $q(0)=0$; $q(1)=\infty$; ademais, a segunda derivada de $Q(Y)$, primeira de $q(Y)$,

$$\frac{d^2 Q(Y)}{dY^2} = \frac{d q(Y)}{dY} = J \frac{Y^{CA-2}}{(1 - Y^C)^{2-B}} \times$$

$$\times \left\{ (CA-1)(1-Y^C) + C(1-B)\, Y^C \right\}$$

é positiva, de modo que $Q(Y)$ é cóncava.

3.2.2. Axuste

Un procedemento de axuste do modelo Potencial-beta $(C;A,B)$ é o seguinte: ó tomar logaritmos en [3.2.1], de forma análoga a como o fixemos en 3.1.2 co modelo Beta, temos:

$L(x_j)=L\ (\mu\ J)+(CA-1)\ L\ (Y_j)+(B-1)\ L\ (1-Y_j^C)$ [3.2.2]

se agora lle asignamos un valor inicial a C, por exemplo $C=1$ (equivalente a estar no modelo Beta), podemos, por regresión lineal mínimo-cuadrática, determina-los coeficientes de regresión [3.2.2]. Se conservámo-la suma de desviacións cuadráticas obtida para $C=1$, variando o valor asignado C e aplicando a estimación mínimo cuadrática, obtemos un proceso que detemos cando observamos un mínimo da suma de desviacións cuadráticas. Se son $\hat{r}_0, \hat{r}_1, \hat{r}_2$ os coeficientes de regresión obtidos e $\hat{C}$ o último valor asignado a C no proceso de aproximacións sucesivas, temos:

$$B = 1 + \hat{r}_2\ ;\ A = \frac{1+\hat{r}_1}{\hat{C}}\ ;\ \mu = \frac{1}{J}\exp\left(\hat{r}_0\right) \quad [3.2.3]$$

onde

$$J = \hat{C}\ \Gamma(A+B)\,/\,\Gamma(A)\ \Gamma(B)$$

4. CASOS PARTICULARES DO MODELO POTENCIAL-BETA

4.1. O MODELO BETA (*A,B*)

Para $C=1$ témo-lo modelo Beta que estudiamos no parágrafo 3.1. Só debemos lembrar que contén, como caso particular $A=2-B$, o modelo de función de distribución persoal da renda logarítmico-loxística estudiado no parágrafo 3.1.3.

4.2. O MODELO DE PARETO COMO CASO LÍMITE

Se no modelo $q(Y)$ Potencial-beta $(C;A,B)$ tomamos $A=C=1$ (que é un caso extremo non incluído no modelo, xa que esiximos $CA>1$) resulta como caso límite o modelo de curva de Lorenz que corresponde á función de distribución de Pareto. Temos:

$q(Y)=B(1-Y)^{B-1}\ ;\ 0<Y<1\ ;\ 0<B<1$ [4.2.1]

de onde, integrando

$Q(Y)=1-(1-Y)^{B}$ [4.2.2]

e, por outra banda, a distribución de Pareto, definida sen perda de xeneralidade para renda $X>1$, é

$$F(x) = 1 - \frac{1}{x^{\theta}}\ ;\ x>1\ ;\ \theta>1 \quad [4.2.3]$$

de xeito que a curva de Lorenz

$Q(Y)=1-(1-Y)^{(\theta-1)/\theta};\ 0<Y<1;\ \theta>1$ [4.2.4]

se identifica no modelo Potencial-beta $(C;A,B)$ como caso límite $A=C=1$; $B=(\theta-1)/\theta$. A media é $\mu=\theta/(\theta-1)$ e o Índice de Gini, $G=1/(2\theta-1)$ decrecente cando aumenta θ. Mencionemos que este cálculo da curva de Lorenz foi utilizado por Gini para defende-la idea de que a distribución de Pareto é tanto máis igualitaria canto maior é θ (diminúe G) nun tempo en que algúns defendían o contrario.

4.3. O MODELO POTENCIAL-BETA I

Se facemos $A=1$, mantendo $C>1$; $0<B<1$, resulta o modelo Potencial-beta $(C;\ 1,\ A)$

$q(Y)=CB\ Y^{C-1}\ (1-Y^C)^{B-1};\ C>1;0<B<1;0<Y<1$ [4.3.1]

que imos denominar Potencial-beta I. Presenta características interesantes na práctica. En primeiro lugar, $q(Y)$ é integrable elementalmente, de modo que a ecuación da curva de Lorenz é

$q(Y)=1-\ (1-Y^C)^B;\ 0<Y<1;\ C>1;\ 0<B<1$ [4.3.2]

e a primeira derivada da Función Intensidade de Renda [4.3.1] é:

$q'(Y)=CBY^{C-2}(1-Y^C)^{B-2}\{(C-1)(1-Y^C)+C(1-B)Y^C\}$ [4.3.3]

Obsérvese que este modelo pode considerarse como unha xeneralización sinxela do modelo de Pareto. Ó compara-las curvas de Lorenz [4.2.4] e [4.3.2] vemos que agora aparece Y afectado dun expoñente $C>1$. O modelo de Pareto supón que a razón

$$\frac{L(1-Q)}{L(1-Y)} = B$$

é constante e o modelo Potencial-beta I supón que é constante a razón:

$$\frac{L(1-Q)}{L(1-Y^C)} = B$$

Esta propiedade permite un procedemento sinxelo de axuste do modelo [4.3.2], ademais do procedemento xeral para o modelo Potencial-beta. Se témo-los puntos (Y_j,Q_j) da curva empírica de Lorenz, consiste en determinar C de modo que as razóns $L(1-Q_j)/L(1-Y_j^C)$ teñan variación mínima; asignámoslle a B a media destas razóns.

Como exemplo de aplicación, axustamos este modelo ás distribucións empíricas de España do cadro 1. No cadro 3 aparecen os valores dos parámetros axustados. No cadro 4 aparece unha comparación co modelo de Kakwani (1980) axustado por Baró ós mesmos datos. Utilizo dous indicadores da bondade do axuste: a Desviación Relativa Media, en porcentaxe, entre os Q_j empíricos e os $\hat{Q}_j$ axustados

$$\mathrm{DRM} = \mathrm{Media}\left|Q_j - \hat{Q}_j\right| / Q_j x100$$

e a Derivación Relativa Máxima, tamén en porcentaxe:

$$\mathrm{DRX} = \mathrm{Máx}\left|Q_j - \hat{Q}_j\right| / Q_j x100$$

Obsérvase que a DRX obtida co modelo Potencial-beta I é, nos seis casos, menor cá obtida co modelo de Kakwani. A DRM é menor en catro casos e maior nos outros dous. En resumo, o modelo Potencial-beta I proporciona mellores axustes (alomenos non peores) có citado modelo de Kakwani, pero, ademais, ten a vantaxe de que utiliza só dous parámetros en vez de tres e que cumpre as condicións analíticas necesarias para as curvas de Lorenz.

Na gráfica 1 móstrase a curva de Lorenz axustada para os datos do ano 1987; na gráfica 2 a Función Intensidade de Renda, e nas gráficas 3 e 4 as correspondentes funcións de distribucións e de densidade tomando en abscisas, como unidade de renda, a renda media.

4.4. O MODELO DE DAGUM

Dagum (1977), facendo hipótese sobre a elasticidade de $F(x)$ respecto de F expresada como función de F, chega ó seguinte modelo de tres parámetros para a función de distribución persoal da renda

$$Y=F(x)=(1+\lambda x^{-\delta})^{-\beta};\ 1;\ \delta;\ \beta>0;\ x>0 \qquad [4.4.1]$$

que tomando como parámetros

$$a=1/\lambda\ ;\ b=\delta\ ;\ 1/C=\beta \qquad [4.4.2]$$

queda na forma

$$Y=F(x)\left[\frac{ax^b}{1+ax_p}\right]^{1/C};\ a,b,c>0\ ;\ x>0 \qquad [4.4.2]$$

onde se observa que é a distribución logarítmico-loxística elevada a unha potencia positiva.

Se despexamos en [4.4.2] Y^C e calculámo-lo logit de Y^C, resulta

$$L\left\{\frac{Y^C}{1-Y^C}\right\} = L(a) + b\,L(x) \qquad [4.4.3]$$

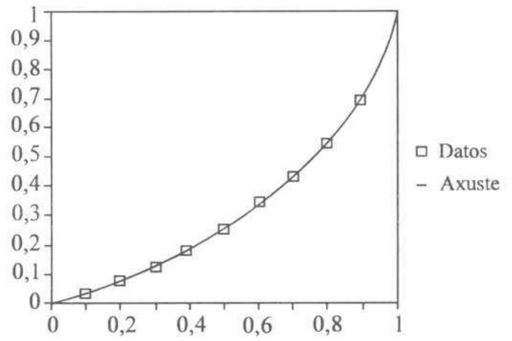
que xeneraliza a [3.1.6] introducindo o terceiro parámetro C como expoñente de Y. Obviamente, para $c=1$ coincide coa distribución logarítmico-loxística.

	1964	1967	1970	1974	1981	1987
C	1,5941	1,5682	1,5340	1,4593	1,4230	1,3800
B	0,6054	0,5310	0,5240	0,5125	0,6265	0,6229

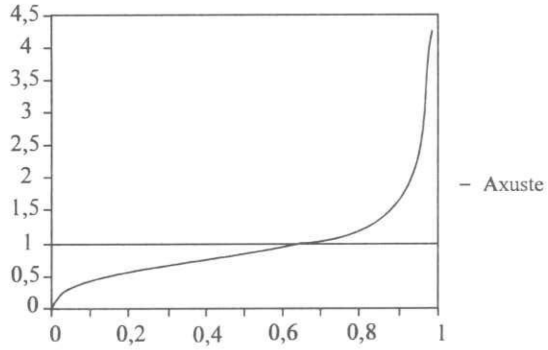
Cadro 3
PARÁMETROS AXUSTADOS DO MODELOPOTENCIAL-BETA I

ANOS	1964	1967	1970	1974	1981	1987
DRM (%)						
— Potencial-beta I	4,01	4,17	3,47	1,85	0,66	0,44
— Kakwani	4,49	3,93	3,03	2,78	0,80	0,54
DRX (%)						
— Potencial-beta I	7,70	7,91	6,69	4,38	1,21	0,90
— Kakwani	19,59	16,05	11,03	8,72	2,40	1,54

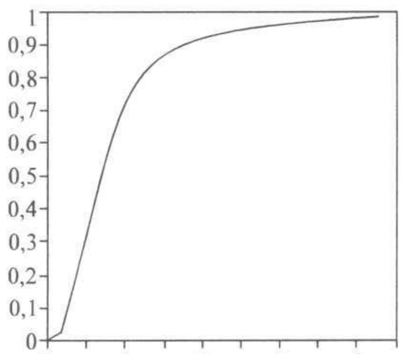
Cadro 4
MEDIDAS DA BONDADE DO AXUSTE DO MODELO DE KAKWANI E DO MODELO POTENCIAL-BETA I



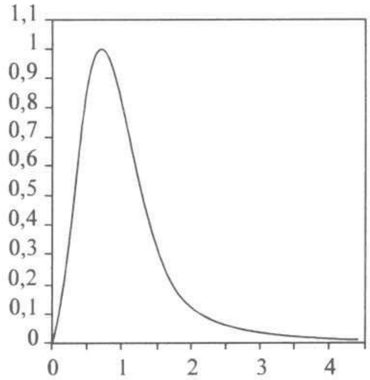
Gráfica 1
CURVA DE LORENZ.
POTENCIAL-BETA I.
ESPAÑA 1987



Gráfica 2
FUNCIÓN INTENSIDADE DE RENDA.
POTENCIAL-BETA I.
ESPAÑA 1987



Gráfica 3
FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN.
POTENCIAL-BETA I.
ESPAÑA 1987



Gráfica 4
FUNCIÓN DE DENSIDADE.
POTENCIAL-BETA I.
ESPAÑA 1987

Vexamos que este modelo de Dagum está incluído como caso particular do modelo Potencial-beta $(C;A,B)$. Se neste modelo admitímo-la seguinte relación entre os tres parámetros

$$A = 1 + \frac{1}{C} - B \qquad [4.4.4]$$

resulta a Función Intensidade de Renda

$$q(Y) = D\left[\frac{Y^C}{1-Y^C}\right]^{1-B};$$

$$C>0\,;\,0<B<1\,;\,0<Y<1 \qquad [4.4.5]$$

onde D é a constante de integración determinada por C,B. A función [4.4.5] obténse substituíndo [4.4.4] no modelo xeral [3.2.1]. Comparando con [3.1.2] obsérvase a xeneralización do modelo logarítmico-loxístico. Posto que sendo $\mu=E[X]$ a media da distribución da renda, é $x=\mu q(Y)$ para $Y=F(x)$ de [4.4.5] obténse a función de distribución persoal da renda que lle corresponde ó modelo Potencial-beta con $A = 1 + \frac{1}{C} - B$:

$$F(x) = \left[\frac{ax^b}{1+ax^b}\right]^{1/C};\, c>0\,;\, a,b>0\,;\, x>0$$

con $a=(1/D\mu)^b$; $b=1/(1-B)$ que, como queriamos probar, coincide co modelo [4.4.2] de Dagum:

$$F(x) = \left\{\frac{\frac{1}{\lambda}x^{\delta}}{1+\frac{1}{\lambda}x^{\delta}}\right\}^{\beta}$$

tomando como parámetros:

$$a=1/\lambda\,;\; b=\delta\,;\; 1/C=\beta$$

A curva de Lorenz que lle corresponde ó modelo de Dagum, que este calcula por outros métodos, resulta inmediatamente de [4.4.5]. Trátase dunha distribución Potencial-beta e, máis concretamente, da distribución dunha variable Y tal que Y^C se distribúe segundo a Beta (A,B), existindo a relación [4.4.4] entre os tres parámetros.

5. CATRO EXEMPLOS DE AXUSTE POTENCIAL-BETA

No cadro 5 aparecen as distribucións empíricas do ingreso anual das familias de varios países en datas distintas. Os datos de España proceden da Enquisa de Presupostos Familiares 1980-1981 realizada polo INE; os datos dos outros países tomáronse de Nacións Unidas (1983). No cadro 6 móstranse os parámetros do modelo Potencial-beta, axustado segundo 3.2.2. Tamén figura a media das desviacións relativas, en porcentaxe, entre os valores empíricos $\hat{X}_j$ e os axustados X_j nos puntos $\hat{Y}_j$ da correspondente distribución empírica.

Obténense excelentes axustes, con desviación media inferior ó 1% no caso de España (1980-81) e Francia (1975); inferior ó 2% para o exemplo de Canadá (1977) e inferior ó 3% no de USA (1971). As gráficas 5 e 6 mostran as distribucións axustadas para España (1980-81) e Canadá (1977).

6. O MODELO COMPLEMENTARIO-POTENCIAL-BETA

6.1. DESCRICIÓN XERAL DO MODELO

Se no modelo $q(Y)$ Potencial-beta [3.2.1] substituímos Y polo seu complementario $(1-Y)$, resulta o modelo que denominamos complementario-potencial-beta $(C;A,B)$

$$q(Y)=J(1-Y)^{CA-1}\{1-(1-Y)^C\}^{B-1};\quad 0<Y<1 \qquad [6.1.1]$$

definido no espacio paramétrico

$$B>1;\; 0<CA<1\;;\; C>0\;;\; A>0 \qquad [6.1.2]$$

e onde J é a constante de integración determinada polos tres parámetros:

$$J=C\Gamma(A+B)/\Gamma(A)\Gamma(B) \qquad [6.1.3]$$

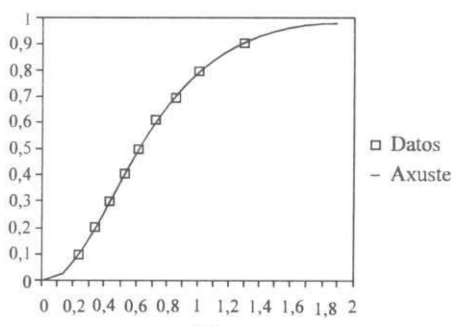
España 1980-81 (1)		Francia 1975 (2)		Canadá 1977 (3)		USA 1971 (4)	
X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i
260	0,1	3,0	0,024	3	0,023	1,0	0,0201
364	0,2	6,5	0,064	5	0,062	2,0	0,0489
468	0,3	15,0	0,191	7	0,120	3,0	0,1006
560	0,4	20,0	0,275	9	0,176	4,0	0,1609
662	0,5	30,0	0,460	11	0,230	5,0	0,2213
761	0,6	40,0	0,609	12	0,259	6,0	0,2859
886	0,7	60,0	0,804	13	0,291	7,5	0,3822
1.057	0,8	100,0	0,942	14	0,328	10,0	0,5359
1.373	0,9			15	0,363	15,0	0,7701
				16	0,400	20,0	0,8922
				17	0,440	25,0	0,9425
				18	0,479	50,0	0,9899
				20	0,555		
				22	0,628		
				25	0,716		
				30	0,833		
				35	0,903		

(1) Miles de pesetas; (2) Miles de francos; (3) Miles de dólares canadenses; (4) Miles de dólares USA.

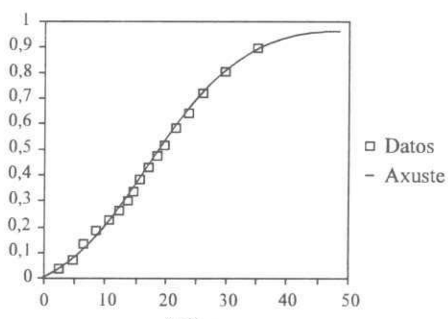
Cadro 5
DISTRIBUCIÓNS EMPÍRICAS DO INGRESO DAS FAMILIAS. $Y_j = P\ (X \leq x_j)$

	España 1980-81	Francia 1975	Canadá 1977	USA 1971
A	1,1075	0,6746	1,5200	0,4505
B	0,7050	0,6428	0,8115	0,6182
C	1,351	2,615	1,028	3,721
μK *	0,7971	52,4518	24,0078	14,2993
DRM (%)	0,57	0,84	1,61	2,51

Cadro 6
PARÁMETROS DO AXUSTE POTENCIAL-BETA E DESVIACIÓN RELATIVA MEDIA. VARIOS PAÍSES



Gráfica 5
FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN.
POTENCIAL-BETA. ESPAÑA 1980-81



Gráfica 6
FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN.
POTENCIAL-BETA. CANADÁ 1977

De forma análoga ó modelo Potencial-beta, neste caso [6.1.1] pode obterse como a función de densidade dunha variable Y tal que $(1-Y)^C$ ten densidade Beta (A,B). A primeira derivada de $q(Y)$ é

$$q'(Y) = \frac{J\{1-(1-Y)^2\}^{B-2}}{(1-Y)^{2-AC}} \times$$

$$\times \left\{(1-CA)\{1-(1-Y)^C\} + C(B-1)(1-Y^C)\right\} \qquad [6.1.4.]$$

e compróbase doadamente, como en casos anteriores, que $q(Y)$ dado en [6.1.1] tamén verifica as condicións necesarias para que a correspondente $Q(Y)$ sexa unha curva de Lorenz.

Tamén se pode axustar este modelo a partir de datos empíricos, tomando logaritmos:

$$L(X_j)=L(\mu J)+(CA-1)L(1-Y_j)+(B-1)L\{1-(1-Y)^C\} \qquad [6.1.5]$$

No cadro 7 dánse os resultados dos exemplos de axuste deste modelo.

	España 1980-81	Francia 1975	Canadá 1977	USA 1971
A	0,5462	0,3446	0,7201	0,3016
B	1,4836	1,7523	1,5640	1,6615
C	1,255	1,762	1,105	2,040
μK *	0,6846	32,7935	22,7803	8,5262
DRM (%)	0,53	1,16	1,61	2,16

Cadro 7
PARÁMETROS DO AXUSTE COMPLEMENTARIO-POTENCIAL-BETA E DESVIACIÓN RELATIVA MEDIA. VARIOS PAÍSES

6.2. CASOS PARTICULARES DO MODELO COMPLEMENTARIO-POTENCIAL-BETA

6.2.1. O modelo Beta e o logarítmico-loxístico

Se en [6.1.1] se toma C=1, resulta o modelo Beta (A,B) xa estudiado. Tamén, e á súa vez como caso particular deste, se admite, ademais, $A=2-B$ e se obtén o modelo xa estudiado que corresponde á distribución persoal da renda logarítmico-loxística.

6.2.2. O modelo de Pareto como caso límite

Tamén do modelo complementario-potencial-beta se obtén o modelo de Pareto como caso límite. Se en [6.1.1] se toma B=1, resulta $q(Y)$ proporcional a $(1-Y)^{CA-1}$ onde queda de feito un só parámetro $\gamma=CA$, resultando a correspondente curva de Lorenz de Pareto $Q(Y)=1-(1-Y)^\gamma$.

6.2.3. O modelo complementario-potencial-beta I

Se, de forma análoga ó estudio do modelo Potencial-beta, facemos A=1 en [6.1.1,] resulta un modelo similar ó Potencial-beta I, que imos denominar Complementario-potencial-beta I. Queda $q(Y)$ proporcional a $\{1-(1-Y)^C\}^B$, de modo que integrando resulta a curva de Lorenz:

$$Q(Y)=\{1-(1-Y)^C\}^B \qquad [6.2.1]$$

e a Función Intensidade de renda

$$q(Y)=CB\,(1-Y)^{C-1}\,\{1-(1-Y)^C\}^{B-1} \qquad [6.2.2]$$

que tamén pode interpretarse como unha xeneralización do modelo de Pareto (análoga ó Potencial-beta I) xa que agora [6.2.1] verifica a relación

$$\frac{\mathrm{L}\,(1-Q^{b})}{\mathrm{L}\,(1-Y)} = 1/C = \text{constante}\ ;\ b = 1/B \quad [6.2.3]$$

que se diferencia do modelo de Pareto no expoñente "b" aplicado a Q.

6.2.4. O modelo de Singh e Maddala

Singh e Maddala (1976), utilizando o concepto de función de proporción de fracasos (que se aplicou para deducir distribucións de tempo de vida e en teoría da fiabilidade), propoñen o modelo de función de distribución da renda caracterizado pola ecuación diferencial

$$dY/dx = a\, x^{b}\, (1-Y)^{C}\ ;\ x>0;\ a>0;\ b>-1;\ c>1$$

cunha solución que conduce ó modelo de función de distribución

$$F(x) = 1-(1+\alpha x^{\beta})^{-\gamma}\ ;\ x>0 \qquad [6.2.4]$$

con:

$$\alpha = a(c-1)/(1+b)>0$$
$$\beta = 1+b>0$$
$$\gamma = 1/(c-1)>0$$

Se de [6.2.4] despexamos x como función de $Y=F(x)$, obtense

$$x = \left[\frac{1}{\alpha}\right]^{1/\beta} (1-Y)^{-1/\gamma\beta} \left\{1-(1-Y)^{1/\gamma}\right\}^{1/\beta} \quad [6.2.5]$$

resultando que o modelo de Singh e Maddala é un caso particular do modelo complementario-potencial-beta, dado pola Función Intensidade de Renda [6.1.1] cando se cumpre a relación

$$CA = 1-B \qquad [6.2.6]$$

entre os tres parámetros de [6.1.1]. A identificación faise tomando

$$C = 1/\gamma\ ;\ B = 1+C/B\ ;\ \beta = C/(B-1) \qquad [6.2.7]$$

que elevados a [6.2.5]

$$x = \left[\frac{1}{\alpha}\right]^{1/\beta} \left\{\frac{1-(1-Y)^{C}}{(1-Y)^{C}}\right\}^{(B-1)/C}$$

de onde se obtén

$$(1-Y)^{C} = \{1+\alpha x^{C/(B-1)}\}^{-1}$$

resultando

$$Y = 1-\{1+\alpha x^{C/(B-1)}\}^{-1/C}$$

e con [6.2.7]

$$Y = F(x) = 1-\{1+\alpha x^{\beta}\}^{-\gamma}$$

que é o modelo [6.2.4] de Singh e Maddala.

BIBLIOGRAFÍA

ALCAIDE, J. (1980): "Políticas de rentas", *ICE*, N. 676-677.

BARÓ, J. (1991): "Aplicaciones del modelo de Kakwani al análisis de la distribución de la renta", *Anuario 1991*. Fundación Ciutat de Lleida.

DAGUM, C. (1977): "A new model of personal income distribution: Specification and estimation", *Economie Appliquée*, 30.

KAKWANI, N.C.; PODDER, N. (1976): "Efficient estimation of the Lorenz curve and associated inequality measures form grouped observations", *Econometrica*, Vol. 44, N. 1.

KAKWANI, N.C. (1980): "On a class of poverty measures", *Econometrica*, Vol. 48, N. 2.

KAKWANI, N.C. (1980): "Functional forms for estimating the Lorenz curve: a reply", *Econometrica*, Vol. 48, N. 4.

NACIONES UNIDAS (1983): "Estudio de las fuentes nacionales de estadísticas de distribución de los ingresos", *Informes Estadísticos*, serie M, N. 72.

SINGH; MADDALA (1976): "A function for size distribution of incomes", *Econometrica*, Vol. 44, N. 5.