

# Propuesta alternativa para la inclusión de un criterio de igualación de riesgos en el cálculo del despacho de generación en el mercado de energía eléctrica colombiano

Jesús M. López L.<sup>1</sup>, Carlos E. Murillo S.<sup>2</sup>,  
Luis J. Zuluaga L.<sup>3</sup> y Jorge F. Gutiérrez G.<sup>4</sup>

*Recepción: 29 de julio de 2005 — Aceptación: 28 de julio de 2006*  
*Se aceptan comentarios y/o discusiones al artículo*

---

## Resumen

En Colombia, el cálculo del despacho de generación es realizado en cuatro etapas. En cada una de ellas se adicionan restricciones de seguridad y confiabilidad. Una de las características más importantes del cálculo del despacho es la inclusión de una política de igualación de riesgos. El despacho debe ser tal que los racionamientos relativos esperados en cada una de las sub-áreas del sistema, sean mínimos y cercanos al promedio aritmético. En este artículo se presenta un modelo de optimización lineal que permite calcular el despacho de generación en una sola etapa y que incluye esta política de igualación de riesgos

**Palabras claves:** flujo de potencia óptimo, optimización en sistemas de potencia, modelamiento del sistema de potencia.

---

<sup>1</sup> Magíster en Ingeniería, lezama@udea.edu.co, docente, Universidad de Antioquia.

<sup>2</sup> PhD Electrical Engineering, carlos\_murillo@ieee.org, decano de la Facultad de Ingenierías, Universidad Autónoma de Manizales.

<sup>3</sup> Magíster en Potencia Eléctrica, ljzuluaga@isa.com.co, especialista en Proyectos-Gerencia Centro Nacional de Despacho, ISA.

<sup>4</sup> Magíster en Potencia Eléctrica, jfgutier@nevado.manizales.unal.edu.co, profesor asistente, Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales.

## Abstract

The energy dispatch process in Colombia is carried out in four different stages. Electrical and reliability constraints are added at each stage. One of the most important characteristics of the dispatch process is the inclusion of a balanced risk policy. The dispatch must be calculated so that the expected relative load sheddings in the different sub-areas of the system are minimized and equalized. This paper presents a lineal optimization model that solves the dispatch problem in one single stage and incorporates the balanced risk policy mentioned above.

**Key words:** optimal power flow, power systems optimization, power systems modeling.

---

## 1 Introducción

El problema de la optimización en sistemas eléctricos de potencia, surge a partir del momento en que dos o más generadores deben alimentar varias cargas obligando al operador a decidir cómo se reparte la carga de forma óptima entre las distintas unidades. Históricamente, los primeros esfuerzos de optimización se hicieron respecto del control de la generación, lo que se conoce hoy como *despacho económico clásico* [1]. Posteriormente, la inclusión de criterios de seguridad dentro de los objetivos de explotación complicó en gran medida el problema de optimización, obligando al desarrollo de técnicas adecuadas a la complejidad del problema. El perfeccionamiento de las técnicas computacionales, fundamentalmente la introducción de técnicas para el tratamiento eficiente de matrices ralas, y el desarrollo de algoritmos matemáticos de optimización, junto con la mayor capacidad de procesamiento de los computadores, ha permitido la resolución de problemas cada vez más complejos. Esta evolución ha conducido a lo que hoy se conoce con el nombre de Flujo de Potencia Óptimo (OPF, *Optimal Power Flow*) [2].

El concepto de OPF es usado en Colombia por el Centro Nacional de Despacho (CND), organismo responsable de realizar un despacho de generación económico, teniendo en cuenta restricciones de confiabilidad y seguridad. Las restricciones de confiabilidad se consideran al aplicar el criterio del Valor Esperado de Racionamiento Programado Condicionado (VERPC), mediante el cual se busca minimizar y nivelar los racionamientos esperados en las diferentes sub-áreas del sistema tras una contingencia simple. Dada la complejidad

del cálculo del VERPC (pues se deben tener en cuenta los nuevos flujos tras cada una de las contingencias, y los racionamientos producidos por éstas), este criterio no se considera actualmente de manera implícita dentro del problema de optimización realizado por el CND.

La contribución fundamental de este trabajo es la introducción del criterio del VERPC dentro de la formulación del problema de optimización. Para ello, se combinó la formulación de flujo óptimo seguro con las restricciones adicionales lineales impuestas por la metodología de cálculo de VERPC

## 2 Metodología de despacho usada por el CND

En Colombia, el CND es la empresa encargada del despacho de generación. Para tal efecto, los generadores hacen sus ofertas de precio en pesos por megawatt-hora ( $\$/MWh$ ) y declaran la disponibilidad ( $MW$ ) de cada uno de sus recursos de generación. Con esta información el CND elabora el despacho programado. Para su cálculo, el CND sigue las directrices dadas por la resolución 062 de 2.000, de la Comisión de Regulación de Energía y Gas (CREG). A continuación se describen los pasos establecidos por la CREG para el cálculo del despacho, los cuales han sido tomados directamente de la resolución en mención.

### 2.1 Predespacho Ideal

En esta primera etapa no se tienen en cuenta las restricciones eléctricas, simplemente se cumple con la demanda pronosticada asignando carga a los generadores en orden de mérito. En esta etapa el CND resuelve el siguiente problema de optimización

$$\text{Minimizar } \sum_i Pof_{it} * Q_{it} \quad (1)$$

$$\text{sujeto a } D_t \leq \sum Q_{it}.$$

Donde:

$Pof_{it}$ : precio de oferta del generador  $i$  para la hora  $t$

$Q_{it}$ : asignación de carga del generador  $i$  para la hora  $t$

$D_t$ : demanda pronosticada para la hora  $t$ .

## 2.2 Predespacho Programado

Para el cálculo del Predespacho Programado se modifica el Predespacho Ideal, con el fin de incluir restricciones eléctricas e inflexibilidades de las unidades. En este caso el CND resuelve el problema de optimización, planteado en (1), sujeto a estas nuevas restricciones:

- Límites de flujo de potencia en las líneas
- Límites mínimos y máximos de generación
- Límites de tensión en las barras
- Límites de velocidad de toma de carga de las unidades.

Al incluir estas restricciones dentro del problema de optimización (1), se obtiene un esquema de despacho más costoso. La diferencia en el valor de la función objetivo para ambos problemas (con y sin restricciones) representa el costo de las restricciones eléctricas para el sistema, también llamado *costo de seguridad del sistema*.

## 2.3 Despacho Programado Preliminar

El cálculo del Despacho Programado Preliminar incluye la consideración del VERPC. Para cada sub-área se calcula de acuerdo al siguiente procedimiento:

- a) Se toman los subsistemas eléctricos (un subsistema eléctrico está compuesto por la línea de transmisión y sus equipos asociados) y se asocia a cada subsistema eléctrico la probabilidad esperada de falla.
- b) Para cada subsistema eléctrico se calcula el racionamiento asociado con la falla del mismo.

- c) Se calcula el VERPC en cada sub-área como la sumatoria de los racionamientos esperados tras la falla de cada uno de los subsistemas, como lo indica (2)

$$VERPC = \left[ \sum_{i=1}^n r_i p_i \right]. \quad (2)$$

Donde:

$i$ :  $i$ -ésimo subsistema de la sub-área

$n$ : número de subsistemas de la sub-área

$r_i$ : racionamiento asociado al  $i$ -ésimo subsistema

$P_i$ : probabilidad esperada de que solamente falle el  $i$ -ésimo subsistema.

- d) Se calcula el promedio aritmético de los valores esperados de racionamiento en cada sub-área, como lo indica (3)

$$\rho = \frac{\sum_{j=1}^{ns} VERPC_j}{ns}. \quad (3)$$

Donde:

$VERPC_j$ : valor esperado de racionamiento para la  $j$ -ésima sub-área

$ns$ : número total de sub-áreas

$\rho$ : promedio aritmético de los VERPC de las sub-áreas.

- e) Se seleccionan las sub-áreas que presenten un valor esperado de racionamiento superior al promedio y se modifica el despacho con el fin de reducir esta diferencia. Para ello, el CND resuelve el siguiente problema de optimización

$$\text{Minimizar } [Max_j(VERPC_j)]$$

$$\text{sujeto a } VERPC_j > \rho.$$

Normalmente, cuando una sub-área presenta un valor esperado de racionamiento muy alto, la mejor forma de reducirlo es incrementando la generación en dicha sub-área. Esto hace que el costo de operación se incremente, ya que en ocasiones se debe utilizar generación fuera de mérito.

## 2.4 Despacho programado

El CND calcula el despacho programado para cada una de las 24 horas, tomado como dado el Despacho Programado Preliminar. Éste debe cumplir con las inflexibilidades de las plantas y/o unidades de generación programadas y con los requerimientos de Control Automático de Generación (AGC, *Automatic Generation Control*) según la reglamentación vigente.

## 3 Flujo de potencia óptimo

Históricamente, el OPF fue bien definido a comienzos de la década de los 60 [3]. El primer método de solución propuesto para OPF fue el de gradiente reducido o gradiente proyectado, propuesto por Carpentier. Posteriormente, Dommel y Tinney [4] abordaron el problema resolviendo las ecuaciones de Kuhn-Tucker, usando una combinación del método del gradiente para un grupo conocido de variables independientes y funciones de penalización para violaciones en las restricciones dependientes. De los dos métodos del gradiente, el propuesto por Dommel y Tinney es uno de los más reconocidos en la literatura existente [5].

El OPF consiste en despachar una serie de generadores para satisfacer una demanda dada, teniendo en cuenta las restricciones del sistema y haciéndolo al menor costo posible. La solución general del OPF consiste en minimizar (o maximizar) la función objetivo sujeta a restricciones de igualdad y desigualdad. La función objetivo puede tomar diferentes formas dependiendo del propósito del OPF (minimizar pérdidas, costos de generación, etcétera).

El problema de OPF se puede abordar usando un modelo simplificado de la red, lo cual da origen a un Flujo de Potencia Óptimo DC (DCOPF). El modelo DC de la red se obtiene ignorando las pérdidas y linealizando las ecuaciones de flujo de potencia alrededor de un “inicio plano” (del inglés *flat start*), en el cual se supone que todas las tensiones de la red tienen un valor igual a la unidad y un ángulo igual a cero. Este modelo simplificado nació a partir de los trabajos de Stott y Alsac en OPF con restricciones de seguridad.

Para resolver un DCOPF, se pueden usar técnicas de Programación Lineal (LP, *Linear Programming*) o Programación Cuadrática (QP, *Quadratic*

*Programming*). La Programación Cuadrática es un caso especial de programación no lineal, donde la función objetivo es cuadrática y las restricciones son lineales. En el caso de OPF usando LP, no sólo se debe tener una formulación lineal de las restricciones del sistema, sino también de la función objetivo. El Método Simplex es uno de los más conocidos para abordar este tipo de problemas.

Al considerar las tensiones de la red como variables de optimización y tener en cuenta las pérdidas, se obtiene un modelo no lineal AC de flujo de potencia. Para abordar este tipo de problemas se pueden utilizar, entre otras, las siguientes técnicas de optimización:

- Método de Newton
- Métodos cuasi-Newton con conjunto activo de restricciones
- Programación Lineal Secuencial con corrección por solución de flujo no lineal de potencia
- Programación Cuadrática secuencial con métodos interiores.

El método de Newton proporciona una rápida convergencia, aunque puede presentar problemas para manejar restricciones de desigualdad. Los métodos basados en Programación Lineal no presentan problemas para manejar restricciones de desigualdad, sin embargo es necesaria la linealización, tanto de la función objetivo como de las restricciones.

En [6] se presenta una revisión bibliográfica sobre el tema de OPF, donde se ha hecho un seguimiento de progreso en esta área durante las últimas tres décadas.

Cuando se modela un OPF que no sólo considera las restricciones de la red bajo funcionamiento normal, sino también bajo contingencias, se tiene un OPF con Restricciones de Seguridad (SCOPF). La consideración de factibilidad ante primeras contingencias en el cálculo del OPF aparece en la literatura por primera vez en 1974, en el trabajo desarrollado por Stott y Alsac [7]. Tal consideración se implementó mediante un proceso iterativo en el que inicialmente se realizaba un despacho para un caso base sin contingencias; posteriormente, se consideraba el fallo de la línea  $L_{ij}$ . Si el flujo de potencia

resultante bajo esta condición hace que otros elementos del sistema se sobrecarguen en más de un 50 % de su capacidad nominal, entonces se asigna un límite de flujo de potencia menor en el caso base a la línea  $L_{ij}$ , de modo que al tener un flujo más pequeño por ésta, al presentarse la falla el efecto resultante para el sistema es menor y, por lo tanto, se espera que los elementos que bajo la condición inicial se habían sobrecargado con la contingencia, ahora no lo harán.

El principal inconveniente de esta metodología, es que la introducción de contingencias y límites arbitrarios no garantizan la solución óptima matemática, pues ésta puede depender del orden en que se introduzcan las contingencias, y no hay forma de elegir a priori el orden de introducción que resulte en un despacho seguro de menor costo. Para obtener un despacho seguro de menor costo es necesario considerar todas las contingencias a la vez, lo cual es posible mediante la inclusión de flujos post-contingencia acoplados en la formulación del problema. La idea de estos flujos aparece por primera vez en la literatura en [8], donde se propone el uso de flujos post-contingencia acoplados en el contexto de OPF con convocatoria de unidades y reserva distribuida segura. Esta idea fue posteriormente usada por Chen [9], restringiendo su aplicación al problema del flujo óptimo con reserva distribuida de energía.

## 4 Formulación matemática del flujo de potencia óptimo DC con restricciones de seguridad

En la formulación del problema se han incluido flujos post-contingencia acoplados como se propone en [8], además, se ha tenido en cuenta el criterio del VERPC mediante restricciones adicionales lineales. Las cargas se han modelado como inyecciones de potencia negativa variables (generadores cuya potencia mínima es igual al valor de la carga y cuya potencia máxima es cero).

### 4.1 Función objetivo

La ecuación (4) muestra la función objetivo, la cual es el costo de generación más una variable adicional  $h$ , que representa la diferencia entre el VERPC de una sub-área y el promedio aritmético de todos los VERPC. A esta variable



se le debe asignar un costo  $w_h$ , de tal forma que los VERPC se minimicen e igualen al promedio aritmético. Las probabilidades de falla se han utilizado en la función objetivo para ponderar el costo bajo contingencias, como se propone en [9].

$$\begin{aligned} \text{Mín } [ f(y) = f(P_h) + w_h h ], \\ y = [\theta P_g h]^T. \end{aligned} \tag{4}$$

Donde:

$ng$ : número de generadores

$nb$ : número de barras

$nj$ : número de contingencias

$\theta$ :  $(\theta_i^j)$ ,  $i = 1 \dots nb$ ,  $j = 0 \dots nj$

$P_g$ :  $(P_{gk}^j)$ ,  $k = 1 \dots ng$ ,  $j = 0 \dots nj$

$f(P_g)$ : función de costo de  $P_g$ .

En este caso,  $j = 0$  corresponde al caso base,  $\theta_i^j$  corresponde al ángulo para el bus  $i$  tras la contingencia  $j$  y  $P_{gk}^j$  corresponde a la potencia del generador  $k$  tras la contingencia  $j$ .

## 4.2 Restricciones de igualdad

Las restricciones de igualdad corresponden a las ecuaciones del flujo de potencia DC, y se muestran en (5)

$$B^j \theta^j = M_g^j P_g^j - D^j, \quad j = 0 \dots nj. \tag{5}$$

Donde:

$B^j$ : aprox. DC a la matriz de susceptancia nodal para la contingencia  $j$

$M_g^j$ : matriz de posicionamiento de generadores para la contingencia  $j$

$D^j$ : demanda del sistema para la contingencia  $j$ .

## 4.3 Restricciones de desigualdad

Las restricciones de desigualdad corresponden a los límites mínimos y máximos de generación, los límites de velocidad de toma de carga y los límites de

flujo de potencia en las líneas, como se muestra en (6), (7) y (8)

$$P_g^{j-} \leq P_g^j \leq P_g^{j+}, \quad (6)$$

$$L^{j-} \leq C^j \theta^j \leq L^{j+}, \quad (7)$$

$$|P_{gk}^j - P_{gk}^0| \leq \Delta. \quad (8)$$

Donde:

$P_g^{j-}$ : vector de límites mínimos de generación para la contingencia  $j$

$P_g^{j+}$ : vector de límites máximos de generación para la contingencia  $j$

$P_{gk}^0$ : potencia entregada por el generador  $k$  para el caso base

$P_{gk}^j$ : potencia entregada por el generador  $k$  para la contingencia  $j$

$L^{j-}, L^{j+}$ : vectores de límites de potencia en las líneas en ambos sentidos para la contingencia  $j$

$C^j$ : matriz de susceptancias de línea para la contingencia  $j$

$\Delta$ : vector de límites de velocidad de toma de carga.

#### 4.4 Restricciones adicionales lineales para incluir el criterio de VERPC

Para minimizar e igualar los VERPC de las diferentes sub-áreas, es necesario adicionar otras restricciones a la formulación del problema. El valor esperado de racionamiento en la sub-área  $k$ , debido a la contingencia  $j$ , se puede expresar como

$$E[R_k^j] = P_s(j)R_k^j.$$

Donde:

$E[R_k^j]$ : valor esperado de racionamiento en la sub-área  $k$  debido a la contingencia  $j$

$P_s(j)$ : probabilidad de que solamente ocurra la contingencia  $j$

$R_k^j$ : racionamiento en la sub-área  $k$  debido a la contingencia  $j$ .

El VERPC para la sub-área  $k$  se puede calcular como la sumatoria de los valores esperados de racionamientos para cada una de las contingencias, dividido entre la demanda de la sub-área  $k$  como lo expresa (9).

$$VERPC_k = \frac{1}{dk} \sum_{j=1}^{nj} E[R_k^j]. \quad (9)$$

El promedio aritmético de los VERPC entre las diferentes sub-áreas está dado por

$$\rho = \frac{1}{nk} \sum_{k=1}^{nk} VERPC_k.$$

Donde:

$nk$ : número de sub-áreas

$\rho$ : promedio aritmético de los VERPC.

El VERPC de la sub-área  $k$  se puede expresar como

$$VERPC_k \leq \rho + h. \quad (10)$$

En este caso la nueva variable  $h$  representa la diferencia entre el VERPC de la sub-área  $k$  y el promedio aritmético de todos los VERPC. La ecuación (10) se puede expresar como

$$-\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{nk} \frac{1}{nk} \tilde{E}[R_j] + (1 - \frac{1}{nk}) \tilde{E}[R_k] \leq h. \quad (11)$$

La ecuación (11) se puede expresar en función de las variables de optimización; al asignar un costo elevado a  $h$  en la función objetivo, se puede obtener un esquema de despacho que minimice e iguale los VERPC en todas las sub-áreas.

#### 4.5 Dimensiones del sistema equivalente

Si se parte de un sistema base con  $nl$  líneas,  $nb$  barras,  $ng$  generadores y se consideran  $nc$  contingencias, las dimensiones del sistema equivalente están dadas por:

$$\begin{aligned}
 n_{leq} &= nl + (nl - 1)nc, \\
 n_{geq} &= (1 + nc)ng, \\
 n_{beq} &= (1 + nc)nb.
 \end{aligned}$$

Donde  $n_{leq}$ ,  $n_{geq}$  y  $n_{beq}$  corresponden al número de líneas, generadores y barras del sistema equivalente, respectivamente. Se observa que el tamaño del sistema equivalente es considerable; a manera de ejemplo, para el sistema de 30 barras del IEEE se necesitaría construir un sistema equivalente de 1.230 barras y 1.600 líneas. Para evaluar sistemas reales, se hace evidente la necesidad de un software que haga uso eficiente de matrices ralas, como el Matpower [10].

### 5 Ejemplo de aplicación a un sistema de seis barras

En la figura (1) se ilustra un sistema de potencia de seis barras, seis líneas y dos sub-áreas. El nodo 1 se ha tomado como nodo de referencia. Los datos de los generadores, demandas y líneas se muestran en las tablas (1), (2) y (3) respectivamente. Las demandas se han modelado como generadores que inyectan potencia negativa al sistema y se ha utilizado un costo de racionamiento de 200 \$/MWh.

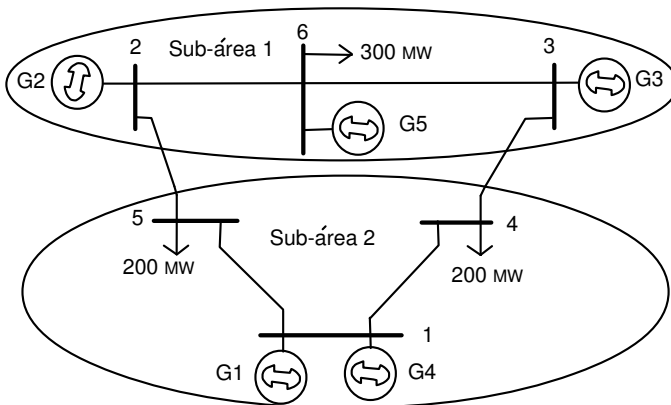


Figura 1: Sistema de potencia de 6 barras

**Tabla 1:** Datos de oferta de los generadores para el sistema de potencia mostrado en la figura (1)

	Nodo	Min( $MW$ )	Max( $MW$ )	Oferta( $\$/MWh$ )
Gen 1	1	10	100	50
Gen 2	2	50	300	20
Gen 3	3	50	300	30
Gen 4	1	5	100	70
Gen 5	6	5	100	80

**Tabla 2:** Datos de las demandas para el sistema de potencia mostrado en la fig. (1)

	Nodo	Valor $MW$
D1	4	200
D2	5	200
D3	6	300

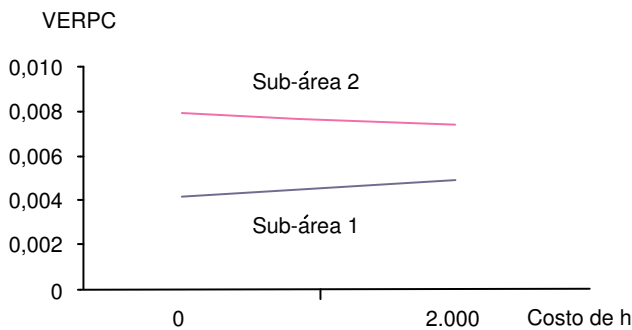
**Tabla 3:** Datos de líneas para el sistema de potencia mostrado en la figura (1)

	P falla	Reactancia ( $\Omega$ )	Capacidad ( $MW$ )
Línea 1-4	0,2	0,1	185
Línea 4-3	0,1	0,1	185
Línea 3-6	0,2	0,1	150
Línea 6-2	0,1	0,1	150
Línea 2-5	0,1	0,1	185
Línea 5-1	0,2	0,1	185

En la tabla (4) se muestran los resultados al aplicar el modelo de optimización. Se puede observar que al aumentar el costo asociado a la variable  $h$  se modifica el esquema de despacho para tratar de igualar los VERPC. En la figura (2) se muestra la variación de los VERPC al aumentar el costo asociado a la variable  $h$ . Se puede observar que el VERPC de la sub-área 1 aumenta, mientras que el de la sub-área 2 disminuye.

**Tabla 4:** Despacho de generación al variar el costo asociado a la variable  $h$

	$Wh = 0$	$Wh = 2.000$
Gen. 1	85	100
Gen. 2	270	270
Gen. 3	270	270
Gen. 4	35	35
Gen. 5	40	25



**Figura 2:** Variación de los VERPC al incrementar el costo asociado a la variable  $h$

## 6 Conclusiones y recomendaciones

Se ha presentado una metodología alternativa para la inclusión de una política de igualación de riesgos, en el cálculo del despacho en el mercado de energía eléctrica colombiano. La contribución principal de este trabajo ha sido la inclusión del criterio de VERPC dentro del proceso de optimización para el cálculo del despacho. Actualmente, el CND maneja dicho criterio como exógeno al problema de optimización.

La propuesta pretende ser una primera aproximación al cálculo del despacho de generación que idealmente debe hacerse en una sola etapa, lo cual permite obtener precios nodales confiables (en otros esquemas de mercado estos precios son utilizados como señales económicas para tarificación y manejo de congestión). Sin embargo, al no realizar etapas intermedias, la metodología

no da información directa para la identificación de los costos de seguridad y confiabilidad, los cuales se obtienen al comparar los costos de generación en el Predespacho Ideal, el Predespacho Programado y el Despacho Programado Preliminar.

En la actualidad se manejan costos de racionamiento iguales en todas las barras, lo cual lleva implícito un tipo de subsidio, ya que el costo de racionamiento depende, entre otros factores, de las condiciones geográficas. Una de las ventajas del modelo propuesto es que permite asignar costos de racionamiento diferentes para cada una de las demandas. En la Resolución 062 de 2.000 de la CREG, no se hace referencia a las probabilidades de falla de las unidades de generación. El modelo propuesto puede modificarse para tener en cuenta las posibles contingencias de las unidades de generación; en este caso sería necesario actualizar la matriz de posicionamiento de generadores para reflejar la pérdida de una unidad.

Dado que se ha utilizado un modelo DC, no se han tenido en cuenta las pérdidas ni el despacho de potencia reactiva. Para obtener el modelo AC es necesario añadir las variables de magnitud de voltaje y las ecuaciones no lineales de flujo de potencia como restricciones de igualdad. Este modelo tendría en cuenta requerimientos de potencia reactiva para mantener los niveles de tensión adecuados en las barras tras una contingencia, y sería mucho más aproximado al proceso de despacho que realiza el CND; sin embargo, dada la no linealidad del problema, sería necesario usar otras técnicas de solución.

## Referencias

- [1] K. Xie and Y. H. Song. *Dynamic Optimal Power Flow by Interior Point Methods*. IEEE Proceedings-Generation, Transmission, Distribution, **148**(1), January 2001.
- [2] J. O. Alsaac and B. M. Paris. *Further Developments in LP- Based Optimal Power Flow*. IEEE Transactions on Power Systems, **5**(3), August 1990.
- [3] J. Carpentier. *Contribution a l'Etude du Dispatching Economique*. Bulletin de la Societe Francaise des Electriciens, **3**, 431-447 (August 1962).
- [4] H. W Dommel and W. F. Tinney. *Optimal Power Flow Solutions*. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, October 1968.

- [5] J. D. Weber. *Implementation of a Newton-Based Optimal Power Flow Into a Power System Simulation Environment*. University of Wisconsin, USA, 1995.
- [6] J. A. Momoh, M. E. Harway and R. Adapa. *A Review of Selected Optimal Power Flow Literature to 1991*. Transactions on Power Systems, **14**(1), February 1999.
- [7] O. Alsac and B. Stott. *Optimal Load Flow with Steady-State Security*, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, **93**, 745-751 (May/June 1974).
- [8] J. Thorp, C. E. Murillo Sánchez and R. J. Thomas. *Time-space Methods for Determining Locational Reserves: A Framework for Locational Based Pricing and Scheduling for Reserve Markets*. Report to the Department of Energy, November 2001. [http://certs.lbl.gov/pdf/CERTS\\_LocRes.pdf](http://certs.lbl.gov/pdf/CERTS_LocRes.pdf).
- [9] J. Chen, J. Thorp, R. J. Thomas and T. D. Mount. *Locational Pricing and Scheduling for an Integrated Energy-Reserve Market*. Proceedings of the 36th Hawaii International Conference on Systems Sciences, 2003.
- [10] R. D. Zimmerman, C. E. Murillo Sánchez and D. Gan. "MATPOWER User's Manual". <http://www.pserc.cornell.edu/matpower/>, 2006.