Rev. de Psicol. Gral. y Aplic., 1994, *47*(3), 275-283

JUSTIFICACIÓN DE FORMAS FUNCIONALES A TRAVÉS DE LOS AXIOMAS DE LA MEDIDA CONJUNTA

J. FAUQUET ARS; M.ª D. RIBA LLORET; M.ª C. VILADRICH SEGUÉS
Universidad Autónoma de Barcelona

Resumen

Enmarcada en el contexto general de la teoría representacional, el modelo de medida conjunta justifica la medición de variables psicológicas de naturaleza multidimensional, en ausencia de una operación natural de concatenación. Este sistema de medida incorpora un conjunto de axiomas cuyo cumplimiento garantiza una determinada representación y produce una medida de escala de intervalo. En este artículo describimos los principales axiomas de medida conjunta susceptibles de verificación empírica, por lo cual poseen una mayor relevancia en psicología. Simultáneamente, esbozamos el proceso diagnóstico de las reglas de composición; y, en último término, presentamos diversas especificaciones de la teoría que han motivado el desarrollo de versiones alternativas a las axiomatizaciones clásicas de medida conjunta.

Palabras clave: Medida conjunta, regla de composición, axiomas.

Abstract

From representational theory approach, conjoint measurement justifies the measurement of multidimensional psychological variables in absence of a natural concatenation operation. This system of measurement includes an axiomatic set that justifies a particular representation so an interval scale measurement is produced, if the axioms are satisfied. In this paper we describe the axioms of conjoint measurement that are the most relevant in psychology, considering their possibility of empirical testing. Simultaneously, we sketch the diagnostic process of composition rules and we present several specifications of that theory, which have favourised the development of alternative versions to the classical axiomatic conjoint measurement.

Key words: Conjoint measurement, rules of composition, axioms.

Medida conjunta

En sentido amplio, el proceso de medición consiste en representar las propiedades de los objetos mediante la asignación consistente de números, a partir del cumplimiento de un conjunto finito de condiciones que posibilitan tal asignación (Suppes y Zinnes, 1963; Krantz, Luce, Suppes y Tversky, 1971). La moderna teoría de la medida se inicia con las investigaciones de Von Helmholtz (1887) y Hölder (1901), autores cuyas aportaciones integran el primer análisis axiomático de la *medida extensiva*. Paralelamente al desarrollo axiomático de la medida extensiva, desde la psicología empezaron a tomar cuerpo trabajos tales como los de Thurstone y, sobre todo, los de Stevens, en los que se justificaba la medición de los atributos psicológicos. Así se dio respuesta a argumentos radicales que negaban la posibilidad de medir tales atributos (Campbell, 1920, 1928), a partir de los supuestos de los primeros modelos de medida psicológica (por ejemplo, los trabajos de Weber y Fechner, Donders, etc.).

En esta situación, las aportaciones posteriores de Stevens (1946, 1951), por una parte, y las de Tarski (1954a, 1954b, 1955), por otra, condujeron al establecimiento de la *Teoría Representacional de la Medida*, enunciada en una primera visión por Scott y Suppes (1958) y desarrollada posteriormente por diversos investigadores (Suppes y Zinnes, 1963; Pfanzagl, 1968; Krantz, Luce, Suppes y Tversky, 1971; Roberts, 1979). Desde esta perspectiva, por una parte, queda garantizada la medida de los atributos psicológicos sin utilizar la propiedad aditiva base de la teoría axiomática de Hölder (1901), lo cual ya había sido anunciado por Stevens; y, por otra, se justifica la medida de las variables psicológicas de naturaleza multidimensional, aspecto inaccesible desde la posición clásica.

Así, por ejemplo, en estudios psicofísicos dirigidos a valorar la sensación de sonoridad producida por diversos tonos musicales, en los que se manipulan los niveles de volumen y de frecuencia, no resultan adecuados los postulados de la medida extensiva. Atendiendo al producto cartesiano entre ambos factores, la sensación producida por la combinación (50 dB, 200 Hz), concatenación de dos estímulos (25 dB, 100 Hz), no corresponde a concatenar la sensación asociada a la combinación (25 dB, 100 Hz); es decir, se concatenan los estímulos *físicos*, pero no la sensación *psicológica* asociada.

En esta situación, el interés reside en determinar la «fórmula» o composición algebraica entre las variables «volumen» y «frecuencia» que mejor describe la «sensación de sonoridad». Por tanto, atendiendo a su carácter bidimensional, lo que se pretende es definir la regla de composición, de combinación o forma funcional, por medio de la cual se combinan las variables independientes («volumen» y «frecuencia») para producir el efecto conjunto sobre la variable dependiente («sonoridad»). Y, una vez definida, en ver si es posible obtener los valores escalares para estas variables independientes, así como para su efecto conjunto resultante. Esto es, se pretende que tanto las variables independientes como la variable dependiente puedan escalarse simultáneamente mediante una regla de composición específica y de forma que se conserve el orden empírico observado.

La metodología de la *medida conjunta* intenta solucionar simultáneamente el problema de la medida y el de la composición construyendo escalas de medida para las variables relevantes de modo que se satisface el principio de composición. Para ello, se introduce un conjunto de suposiciones cualitativas o axiomas en torno a las variables independientes, cuyo cumplimiento justifica una determinada composición entre las mismas y produce una medida interpretable en términos de una *escala de intervalo*.

De este modo, la medida de las variables psicológicas puede llevarse a cabo mediante escalas métricas de forma análoga a las variables físicas propias de los sistemas extensivos. Luce y Tukey (1964) la denominan *Medida Conjunta Simultánea* para destacar el hecho de que las variables dependiente e independiente se miden simultáneamente. Desde una perspectiva psicológica, los axiomas relevantes son aquellos que pueden comprobarse experimentalmente, los cuales van a constituir el núcleo fundamental del artículo.

Cronológicamente, los orígenes de la medida conjunta se remontan a finales del siglo XIX, época en la que I. Fisher (1892), en un estudio sobre la hipótesis de aditividad de las funciones de utilidad, presentaba de forma intuitiva y con un estilo discursivo algunos de los conceptos fundamentales de la medida conjunta. Después de los desarrollos de R. Fisher (1935), y tras la axiomatización de la teoría de la *utilidad esperada* de Von Neumann y Morgenstern (1944), a finales de los años cincuenta aparecen los primeros trabajos que presentan las condiciones cualitativas (axiomas), necesarias y/o suficientes, para justificar la representación aditiva, destacando los trabajos de Adams y Fagot (1959) y de Debreu (1960).

A partir de estos estudios se inicia un fructífero período investigador en el que se sientan las bases axiomáticas del modelo, se matizan las condiciones propuestas por los citados autores y se desarrollan nuevos axiomas que justifican, además de la representación aditiva, otras leyes de composición, tales como la combinación multiplicativa, distributiva y distributiva dual. En este apartado merecen un comentario destacado las aportaciones de autores tales como Luce y Tukey (1964; su trabajo constituye la primera publicación en la que la nueva teoría se denomina ya medida conjunta), Krantz (1964), Scott (1964), Roskies (1965), Luce (1966), Tversky (1967), etc.

La medida conjunta culmina en 1971 con la aparición del volumen I de *Foundations of Measurement*, de Krantz et al., en el que se presentan, de forma integrada, las principales representaciones conjuntas. Posteriormente ha aparecido un considerable volumen de trabajos que proponen determinadas modificaciones de los axiomas fundamentales, así como diversas especializaciones de la teoría. Por otra parte, durante este período la medida conjunta ha sido aplicada en áreas diversas de la psicología, tales como la teoría de la decisión (por ejemplo, Wallsten, 1972, 1976), la medida del riesgo (por ejemplo, Coombs y Huang, 1970; Coombs y Lehner, 1981), la psicología clínica (por ejemplo, Garb, 1983) y contextos psicofísicos tradicionales como la estimación de sensaciones auditivas (por ejemplo, Levelt, Riemersma y Bunt, 1972).

La medida conjunta, como cuerpo de conocimiento enmarcado en el contexto general de la *teoría representacional de la medida*, viene caracterizada por un *teorema de representación*, que justifica el homomorfismo entre el sistema relacional empírico y el sistema relacional numérico, y un teorema de unicidad que establece las transformaciones admisibles que también producen homomorfismos en la misma estructura relacional numérica.

Los modelos de medida conjunta constituyen modelos polinómicos definidos como reglas de composición que representan una estructura de datos por una función polinómica de sus componentes (Tversky, 1967). Desde esta perspectiva, la teoría de la medida conjunta establece una serie de condiciones (necesarias y/o suficientes) sobre una ordenación de estímulos formados por dos o más componentes para los que existe una representación polinómica determinada.

Justificación axiomática de las reglas de composición

El análisis ordinal de las reglas de composición procede con el análisis de un conjunto de condiciones cuyo cumplimiento justifica una representación en

particular. Algunos axiomas constituyen complejas condiciones de carácter *técnico*, no susceptibles de verificación empírica, que imponen determinadas restricciones a la medida conjunta. No obstante, los axiomas más relevantes desde una perspectiva psicológica son aquellos que pueden comprobarse experimentalmente, los cuales constituyen el núcleo fundamental del artículo.

Por motivos prácticos, la exposición se realiza atendiendo al caso en que se dispone de tres variables, puesto que, siguiendo a Krantz y Tversky (1971): 1) engloban un gran número de teorías psicológicas; 2) son particularmente tratables desde una perspectiva matemática, y 3) una vez realizado su análisis ordinal, éste puede generalizarse a polinomios simples con cualquier número de factores. En esta situación, con tres variables pueden definirse cuatro reglas de composición diferenciadas: aditiva, multiplicativa, distributiva y distributiva dual.

Con objeto de facilitar la exposición, a lo largo del artículo utilizaremos la siguiente nomenclatura: los tres factores o variables independientes se indicarán por A_1, A_2 y A_3, y la estructura producto $A_1 \times A_2 \times A_3$, que representa el producto cartesiano entre las variables, se denotará, en determinadas ocasiones, por la letra A. Los niveles de los tres factores se definirán por $a, b, c \in A_1$, $p, q, r \in A_2$, y $u, v, w \in A_3$. Los efectos conjuntos resultantes de combinar A_1, A_2 y A_3 se denotarán por ternas de elementos, tales como apu, bqv, ... $\in A_1 \times A_2 \times A_3$. Paralelamente, sobre la estructura producto $A_1 \times A_2 \times A_3$ se define una relación binaria $\succeq$, y el sistema relacional empírico queda configurado por $\langle A_1 \times A_2 \times A_3, \succeq \rangle$.

Ordenación débil de la estructura factorial

En comparación con otros sistemas relacionales empíricos característicos de la teoría representacional, los presentados por la medida conjunta ofrecen una mayor «riqueza» debido a que su conjunto base está constituido por la combinación de todos los niveles de los factores que constituyen la estructura producto. Consecuentemente, permiten la interpretación y análisis de la variable dependiente en términos de cada factor separadamente (A_1, A_2, ...) y en términos de su efecto global conjunto ($A_1 \times A_2 \times$ ...). Cabe destacar que los modelos de medida conjunta se prueban a partir de diseños factoriales completamente cruzados de forma análoga a los diseños utilizados en el marco del modelo lineal de análisis de la variancia, de larga tradición en psicología. No obstante, el objetivo de ambos modelos difiere por cuanto en medida conjunta la variable modelizada es la evaluación realizada por el sujeto de los distintos estímulos que configuran el diseño, mientras que en el análisis de la variancia lo que se modeliza es la influencia de los factores del diseño sobre una nueva variable.

Asimismo, en el sistema relacional empírico se define una *única* relación binaria $\succeq$, y el objetivo de la medida conjunta es determinar cuáles son las condiciones que debe satisfacer $\succeq$ para justificar una determinada representación. Por tanto, los diversos axiomas no deben considerarse como relaciones específicas, diferenciadas de $\succeq$, que se «añaden» al sistema relacional empírico, sino como requerimientos de $\succeq$ que garantizan una representación.

Como ya se ha mencionado, en psicología no se dispone de una operación natural de concatenación y, por tanto, la medida conjunta incorpora una operación alternativa a ésta: la *ordenación*; operación considerada por un gran número de autores (Coombs y Huang, 1970; Krantz et al., 1971, etc.) como natural y constituyente del repertorio conductual del sujeto, junto con otras operaciones como las comparaciones binarias. La adopción de la operación de ordenación en medida conjunta conduce (Adams y Fagot, 1959; Luce y Tukey, 1964; Krantz et al., 1971; Roberts, 1979; Narens, 1985, etc.) a que la primera condición o axioma que se requiere es que la relación restablecida $\succeq$ sea un *orden débil* sobre la estructura $A_1 \times A_2 \times A_3$ (véase anexo).

Leyes de independencia

Además del orden débil, la justificación axiomática de las representaciones polinómicas requiere el establecimiento de otras condiciones formales expresadas en términos de leyes cualitativas (Krantz, 1972), conceptualizadas «psicológicamente» por algunos autores como formas de consistencia. La más simple de estas leyes cualitativas es la *independencia*, condición que juega un rol fundamental en el análisis ordinal de las reglas de composición. En esencia, el axioma de independencia postula que el orden observado de la variable dependiente permite *ordenar una variable independiente de forma que esta ordenación no dependa del resto de variables*. Bajo esta acepción, el axioma de independencia, tal y como ha sido formulado, recibe el nombre de *independencia de un factor* para enfatizar el hecho de que las relacionales ordinales definidas se estudian considerando separadamente cada variable de la estructura factorial (véase anexo).

En esta situación, el interés reside en descubrir axiomas en torno al sistema $< A, \succeq >$ que, por un lado, sean leyes empíricamente válidas y, por otro, nos permitan construir funciones de valor real φ_1, φ_2 y φ_3, y una función F de $R \times R$ en R, tal que para todo $a, b \in A_1$, $p, q \in A_2$, y $u, v \in A_3$ se verifique:

$$apu \succeq bqv \text{ si, y sólo si, } F[\varphi_1(a), \varphi_2(p), \varphi_3(u)] \geqslant F[\varphi_1(b), \varphi_2(q), \varphi_3(v)]$$

Para ello, lo que se intenta demostrar es la existencia de escalas numéricas φ_i sobre los componentes y una regla F para combinarlas, de forma que la medida resultante conserve el orden observado en el sistema relacional empírico. Cuando existe una representación de este tipo decimos que la estructura $\langle A, \succeq \rangle$ es *descomponible*. Atendiendo a la idea de descomponibilidad, una estructura conjunta se define como «*una estructura cualitativa que puede descomponerse de forma natural en dos (o más)*

componentes o subestructuras ordenadas» (Narens y Luce, 1986, pág. 169; Narens, 1985); postulado que apela directamente al requerimiento de independencia de la relación $\succeq$.

El establecimiento del axioma de independencia posibilita la definición de una estructura conjunta independiente. La estructura relacional $\langle A_1 \times A_2 \times A_3, \succeq \rangle$ diremos que es una *estructura conjunta independiente* si se satisface el axioma de independencia y la relación $\succeq$ sobre $A_1 \times A_2 \times A_3$ es un orden débil. Se demuestra que si $\succeq$ es un orden débil sobre la estructura total, entonces la relación $\succeq_i$ inducida sobre cada factor es también un orden débil (Krantz et al., 1971). De aquí se desprende que el axioma de independencia, efectivamente, implica la ordenación (débil) de cada factor «independientemente» del resto de factores de la estructura, a partir de la ordenación de la variable dependiente.

No obstante, el concepto de independencia no es exclusivo de factores únicos y puede generalizarse al estudio de las ordenaciones conjuntas de grupos de factores. Por ejemplo, supongamos la siguiente relación (a, p, u) $\succeq$ (b, q, u). Puesto que estas dos combinaciones de tratamiento poseen un componente común (A_3), la conclusión inmediata que se deriva es que el efecto de la combinación (a, p) es al menos tan grande como el efecto de la combinación (b, q). Sin embargo, para que tal afirmación sea cierta debe comprobarse que en la relación (a, p) $\succeq$ (b, q) se mantiene independientemente del valor que toma el tercer factor. Esto es, para cualquier valor fijado de A_3, el orden observado entre los efectos conjuntos de A_1 y A_2 debe ser el mismo, y por tanto (a, p, v) $\succeq$ (b, q, v). Formalmente, A_1 y A_2 son *conjuntamente independientes* siempre que dada la relación (a, p, u) $\succeq$ (b, q, u) se verifica que (a, p, v) $\succeq$ (b, q, v). La independencia conjunta de $A_1 \times A_3$ respecto a A_2, y de $A_2 \times A_3$ respecto a A_1 se enunciaría de forma similar (véase anexo).

Esta condición es mucho más fuerte que la independencia de un factor, y se demuestra (Krantz y Tversky, 1971; Krantz et al., 1971) que si se satisface la independencia conjunta entre todos los pares de factores, entonces se verifica la independencia ordinal de factor único; generalmente, el inverso no se mantiene. Adams y Fagot (1959) demuestran que, además del orden débil, el axioma de independencia constituye una consecuencia de la hipótesis aditiva. Por tanto, y en vistas al diagnóstico de las reglas de composición, la independencia conjunta entre todos los factores que constituyen la estructura representa un requerimiento necesario en el proceso de justificación de la composición aditiva.

En el estudio axiomático de las reglas de composición, el hecho de que los factores de la estructura producto no sean aditivos, debido a vulneraciones de la independencia, no es motivo suficiente para diagnosticar composiciones alternativas. En este caso, las violaciones de la independencia pueden señalar la posible existencia de *subconjuntos* definidos de valores, en las variables que se mantienen constantes, para los que se modifican las relaciones ordinales esperadas bajo la hipótesis de independencia. La existencia de dichos subconjuntos, ligados a factores multiplicativos, posee importantes repercusiones en el proceso de justificación de las reglas de combinación que se traducen en la incorporación de un nuevo axioma, la *dependencia del signo*.

Dependencia del signo: generalización de la independencia

El rechazo de la hipótesis de aditividad debido a vulneraciones de la independencia, conceptualizadas como falta de consistencia, implica cuestionarse si dicho incumplimiento garantiza otras formas de consistencia (es decir, otras leyes cualitativas) susceptibles de justificar reglas de composición alternativas.

Supongamos a, b $\in A_1$, p, q, r $\in A_2$ y u, v, w $\in A_3$ y la relación (a, p, u) $\succeq$ (b, p, u). Bajo el supuesto de independencia de relación entre a y b debe mantenerse para cualquier valor que tome $A_2 \times A_3$. No obstante, si al modificar los niveles de A_2 y A_3 sucede que (b, q, v) $\succ$ (a, q, v) y (a, r, w) $\sim$ (b, r, w), las relaciones ordinales observadas señalan que estamos frente a un caso de dependencia del signo.

En este caso se considera que $A_2 \times A_3$ = (p, u) tiene un efecto positivo, $A_2 \times A_3$ = (q, v) un efecto negativo y $A_2 \times A_3$ = (r,w) no tiene efecto (*degenerate effect* en inglés); de esta forma, la dirección de las desigualdades dependerá del «signo» de los componentes, puesto que un cambio en el signo de un factor multiplicativo «invierte» el sentido del orden débil $\succeq_i$ inducido sobre A_i. En particular, un factor A_1 será *dependiente del signo* si $A_2 \times A_3$ puede dividirse en tres subconjuntos $(A_2 \times A_3)^+$, $(A_2 \times A_3)^0$ y $(A_2 \times A_3)^-$ tales que: 1) A_1 es independiente en cada uno de estos subconjuntos; 2) los subconjuntos de valores positivos y negativos inducen órdenes opuestos sobre el factor A_1, y 3) el subconjunto neutro induce una igualdad sobre A_1 (véase anexo).

Es importante destacar que, determinados los valores o combinaciones factoriales que tienen el mismo signo, se constata el cumplimiento de la ley de independencia en cada subconjunto de niveles. Por tanto, puede decirse que la dependencia del signo generaliza la noción de independencia (Nowakowska, 1983; Fauquet, 1991).

Matemáticamente, se demuestra (Krant et al., 1971) que la independencia constituye el caso especial de la dependencia del signo en el que los subconjuntos de las combinaciones de tratamiento con signo negativo y neutro están vacíos; por ello, esta situación ha sido definida como el «*caso positivo*». Por otro lado, cuando dos (o más) de tales subconjuntos no son vacíos el axioma se denomina dependencia *propia* del signo, conceptualizándose tal situación como el «*caso señalado*» (*signed case* en inglés); algunos autores (Nowakowska, 1983) han expresado la independencia en términos de *independencia del signo*.

En vistas al diagnóstico de la regla de composición, debe considerarse que, en el «caso positivo»,

los modelos aditivo y multiplicativo son *ordinalmente* equivalentes, puesto que el primero puede deducirse a partir de una transformación logarítmica aplicada sobre el segundo. Por su parte, en el «caso señalado», donde no se impone la restricción al subconjunto de valores positivos, el modelo aditivo es equivalente al caso especial de un modelo multiplicativo en que todos los valores de escala son positivos.

Al igual que en el axioma de independencia, la condición de dependencia del signo contempla una versión conjunta cuya definición es análoga a su homóloga unifactorial. La *dependencia conjunta del signo* hace referencia a la dependencia de un par de factores sobre el componente que se mantiene constante, el cual se desglosa en tres subconjuntos de valores (positivo, negativo y neutro) que producen patrones ordinales diferenciados sobre los factores dependientes. Se verifica que si A_1 y A_2 son conjuntamente dependientes del signo sobre A_3, entonces: 1) son conjuntamente independientes en A^+_3, A°_3 y A^-_3; 2) el orden inducido por el conjunto positivo es el opuesto del inducido por el conjunto negativo, y 3) la relación que se produce en el conjunto neutro es la igualdad o equivalencia (véase anexo). Análogamente, la independencia conjunta es el caso especial de la dependencia conjunta del signo donde los conjuntos neutro y negativo están vacíos.

Compensación entre factores: axiomas de cancelación

Los axiomas de cancelación constituyen condiciones necesarias, que acompañan a la independencia o a la dependencia para justificar las reglas de composición, y sus diferentes versiones posibilitan la determinación de una forma funcional específica en detrimento de otras. La doble cancelación, o *cancelación de Luce-Tukey*, representa la forma más simple de estas propiedades y, en el caso trifactorial, supone una condición bidimensional que se aplica sobre pares de combinaciones factoriales que poseen un componente común. Este axioma debe estudiarse *para cada nivel del factor que se define constante*, por lo que, a medida que aumenta el número de niveles de la estructura factorial, aumenta el número de pruebas que deben realizarse.

El estudio de la doble cancelación se efectúa sobre conjuntos diferenciados de datos en función del cumplimiento o vulneración de la independencia de un factor. Si ésta se cumple (caso positivo), el proceso de análisis se realiza sobre el total de los niveles de la estructura factorial; contrariamente, si se viola el axioma de independencia y se verifica una dependencia del signo, entonces debe comprobarse el patrón de doble cancelación en cada subconjunto de valores definido. En ambos casos, la vulneración de esta propiedad invalida cualquier regla de composición polinómica simple; en cambio, su cumplimiento conduce al estudio de las versiones conjuntas de la independencia (en el caso positivo) o de la dependencia.

El análisis de estas condiciones, caracterizado por el número de pares de factores que las satisfacen, permite el diagnóstico definitivo entre los modelos aditivo y multiplicativo. En una primera aproximación, el modelo aditivo, $A_1 + A_2 + A_3$, requiere la independencia conjunta de todos los pares de factores que pueden definirse, esto es: debe satisfacerse este axioma para las subestructuras $A_1 \times A_2$, $A_1 \times A_3$ y $A_2 \times A_3$ respecto a A_3, A_2 y A_1, respectivamente; contrariamente, el modelo multiplicativo $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$ precisa el cumplimiento de la dependencia conjunta del signo para todas las subestructuras anteriores.

En este punto, es importante destacar que la inadecuación de los modelos aditivo y multiplicativo puede ser indicativa de la conveniencia de examinar reglas de composición alternativas, caracterizadas por el hecho de que en su formulación contemplan elementos aditivos y multiplicativos. Estas representaciones quedan definidas en términos de las composiciones distributiva y distributiva dual $(A_1 + A_2) \times A_3$ y $(A_1 \times A_2) + A_3$, respectivamente.

El establecimiento de estas reglas de combinación requiere, en primera instancia, el cumplimiento de la independencia de un factor y la cancelación de Luce-Tukey, para el caso positivo; o, alternativamente, la verificación de la dependencia del signo de un factor en toda la estructura factorial, y la doble cancelación en cada subconjunto de valores cuando no se dispone de escalas positivas. Tanto en un caso como en otro, el cumplimiento de la independencia conjunta (o de la dependencia conjunta si procede) por sólo uno o dos factores señala, en principio, la pertinencia de investigar la adecuación de la composición distributiva o distributiva dual. No obstante, la aceptación de una de las dos formas anteriores precisa la comprobación de las pertinentes condiciones de cancelación.

En ambos modelos, al menos un par de factores son conjuntamente independientes, lo cual justifica la presencia de componentes aditivos en el modelo. Si se mantiene la descomponibilidad monótona, las versiones aditivas y multiplicativas de la doble cancelación (Roskies, 1965) son idénticas y ninguna de éstas puede usarse para discriminar entre el caso distributivo y distributivo dual; por lo que se requieren dos «nuevas» formas de cancelación: la cancelación distributiva y la distributiva dual (véase anexo). En esencia, estos axiomas representan patrones de compensación diferentes a los propuestos en la cancelación tradicional de Luce-Tukey, de difícil constatación empírica.

La comprobación de la cancelación distributiva justifica en último término una composición distributiva entre los factores de la estructura factorial. No obstante, si éste se vulnera, entonces debe comprobarse la posibilidad de una combinación distributiva dual entre las variables. Para ello se requiere el cumplimiento de una compleja condición de cancelación, la cancelación distributiva dual.

Estas propiedades fueron definidas inicialmente en términos de una relación de equivalencia ($\sim$) por

Krantz et al. (1971), que constituye una restricción muy fuerte del modelo. Por su parte, Krantz y Tversky (1971) relajan la condición fuerte de equivalencia ($\sim$) incorporando una relación de orden débil ($\succeq$), más asequible desde una perspectiva empírica (Coombs y Huang, 1970; Ullrich y Painter, 1974).

Diagnóstico de las reglas de composición

El diagnóstico de las reglas de composición constituye un proceso jerárquico de comprobación axiomática, consistente en el análisis sistemático de los axiomas que justifican las diversas formas funcionales. No obstante, todas las representaciones polinómicas requieren el cumplimiento de otros axiomas (no comprobables empíricamente), que constituyen requerimientos formales, los cuales imponen fuertes restricciones a la medida conjunta.

Brevemente, estas condiciones se engloban en el contexto de los *axiomas de solubilidad* y la *condición arquimediana*, proposiciones obligadas en todos los sistemas axiomáticos de medida. Si bien todas las reglas de composición consideran dichos axiomas, a nivel aplicado, éstos no son susceptibles de verificación empírica, al contrario que la independencia, doble cancelación, etc. Debido a ello, tradicionalmente, el investigador asume el cumplimiento de la solubilidad y de la condición arquimediana, dirigiendo su procedimiento de análisis hacia el estudio de los axiomas comprobables experimentalmente presentados a lo largo del artículo.

El diagnóstico de la regla de composición comporta la distinción entre el caso positivo y el caso en el que se evidencia una dependencia del signo. Debido a que los modelos de medida conjunta poseen axiomas comunes, el proceso diagnóstico se inicia estudiando en primer lugar dichos axiomas y, seguidamente, en función de la pauta de cumplimiento o vulneración de los mismos, se estudian las condiciones más específicas de cada modelo. Por tanto, el cumplimiento o vulneración de un axioma es indicativo de la siguiente condición a estudiar.

Los esquemas diagnósticos constituyen procedimientos secuenciales en los que la forma funcional que representa los datos se determina a partir de la aceptación o rechazo de determinados patrones ordinales; de forma integrada, Krantz y Tversky (1971), en su clásico trabajo sobre las *Reglas de composición en Psicología*, presentan los esquemas diagnósticos de las diversas reglas polinómicas a partir del análisis de los axiomas aquí presentados.

Por otra parte, debido a que el procedimiento de prueba de los axiomas acostumbra a ser largo y tedioso para el investigador, en la actualidad se dispone de un considerable número de programas de ordenador que facilitan el análisis. En esencia, la mayoría de programas se han adecuado a los esquemas diagnósticos clásicos (propuestos por Krantz y Tversky, 1971) y están constituidos por un conjunto de subrutinas especializadas para el análisis individual de cada axioma, principalmente las condiciones de independencia, dependencia y formas de cancelación. Además de su objeto diagnóstico, determinados programas permiten el escalamiento conjunto de los factores basándose en algoritmos de escalamiento ya establecidos (Tversky y Zivian, 1966; Lingoes, 1977; McClelland y Coombs, 1975; Sherman, 1977; Lehner y Noma, 1980, etc.). Entre otros, pueden destacarse el programa PCJM (Polynomial ConJoint Measurement), de Ullrich y Cummins (1973; revisado por Ullrich, Cummins y Walkenbach, 1978); COMESCAL (COnjoint MEasurement SCALing), de Lukas (1985), y ADCOM (ADditive COnjoint Measurement), de Hübner (1989).

Conclusión y nuevas orientaciones

En psicología, la medida conjunta ha sido conceptualizada tradicionalmente como una teoría de medida que «*investiga las propiedades cualitativas de un conjunto de datos (estudiando las relaciones que entre ellos se establecen) para escalar, si es posible, el conjunto de datos para una particular regla o modelo*» (Emery y Barron, 1979, pág. 195). Esta «filosofía» de procedimiento ha conducido a denominar el conjunto de modelos presentados como *modelos de medida conjunta axiomática* (Krantz et al., 1971; Emery y Barron, 1979), también llamados por otros autores *modelos clásicos de medida conjunta* (Fauquet, 1991) por tratarse de las composiciones más estudiadas, e integradas en el también ya clásico *Foundations of Measurement*, de Krantz et al. (1971).

Desde esta perspectiva, los desarrollos de la medida conjunta han favorecido la aparición de tres tendencias teóricas, posteriores a los modelos clásicos. La primera de ellas se ocupa del estudio y establecimiento de composiciones alternativas a las formas simples, así como de la axiomática que las justifica (Huang, 1975). La segunda, profundiza en los fundamentos matemáticos de la medida conjunta, estableciendo nuevas condiciones o refinamientos de las ya existentes con el objeto de obtener mejores resultados a nivel de unicidad, mayor generalidad, etc. (Fishburn y Roberts, 1988; Fishburn, 1990a, b, 1991; Wakker, 1991). Y, por último, la tercera investiga nuevos modelos axiomáticos de medida conjunta modificando no sólo los axiomas fundamentales, sino también alguno de sus postulados generales; en este punto resulta de especial atención la axiomatización probabilística de Falmagne (1976, 1979).

No obstante, y paralelamente al desarrollo de la versión axiomática, un conjunto de autores en su mayoría procedentes de la economía (Green y Rao, 1971; Green y Srinivasan, 1978), basándose en los trabajos pioneros de la medida conjunta (Adams y Fagot, 1959; Debreu, 1960; Luce y Tukey, 1964), proponen una versión alternativa de ésta, denominada *medida conjunta numérica*. En el marco de la medida conjunta numérica no se prueban las propiedades ordinales de los datos, sino que se investiga

la transformación monótona de éstos que mejor satisface una supuesta regla de combinación, evaluándose la correspondencia entre el modelo y los datos con base en una medida de bondad de ajuste. En otras palabras, «*la medida conjunta numérica* (o análisis conjunto como la denominan Green y Srinivasan, 1978) *procede asumiendo una particular regla de composición* (habitualmente aditiva) *y entonces escala el conjunto de datos de acuerdo al modelo propuesto*» (Emery y Barron, 1979, pág. 195). Ambas perspectivas teóricas, axiomática y numérica, han definido sendas líneas investigadoras aplicándose la versión axiomática cuando el interés reside en el diagnóstico de la regla de composición, y la versión numérica cuando el objetivo se centra en el escalamiento de los datos.

Para finalizar, cabe decir que, en general, la medición axiomática en psicología, si bien ha gozado del interés de un gran número de investigadores, no puede sustraerse a las críticas recibidas por parte de autores procedentes de diversas orientaciones. Tales críticas hacen referencia tanto a aspectos metodológicos (por ejemplo, la carencia de una teoría del error, aspectos matemáticos de la medida, etc.) como a las cuestiones referentes a su falta de validez o «verosimilitud psicológica» (Anderson, 1981, 1982).

No obstante, otros autores, defensores de esta orientación, han destacado que la ventaja de un modelo axiomático se basa en que la evaluación de su adecuación empírica no está limitada por medidas de bondad de ajuste, las cuales pueden presentar serias distorsiones (Birnbaum, 1974). El modelo puede evaluarse verificando si las propiedades cualitativas se satisfacen empíricamente, y si éstas se cumplen, cada modelo representa una teoría cualitativa (Krantz, 1972). Las pruebas axiomáticas no sólo son más sensitivas (Nickerson y McClelland, 1984) que las medidas de bondad de ajuste, sino que, además, también identifican el *locus* o condición que se vulnera proporcionando el sustrato necesario para posteriores revisiones del modelo (por ejemplo, sustituyendo una condición que no es empíricamente válida por otra más adecuada).

El verdadero problema que dificulta su aplicabilidad, a nuestro parecer, no es de naturaleza metodológica, sino empírica, dada la reiterada constatación de vulneraciones de los axiomas cuando se atiende al comportamiento real de las personas.

ANEXO
Axiomas empíricos de la medida conjunta

AXIOMA 1. Orden débil

Sea la estructura $A = A_1 \times A_2 \times A_3$ y la relación binaria $\succeq$ sobre A. El sistema relacional $\langle A, \succeq \rangle$ es un orden débil si, y sólo si, para todo apu, bqv, crw $\in$ A se satisfacen las siguientes dos condiciones:

1. *Conexión:* o bien apu $\succeq$ bqv o bien bqv $\succeq$ apu.
2. *Transitividad:* si apu $\succeq$ bqv y bqv $\succeq$ crw, entonces apu $\succeq$ crw.

AXIOMA 2. Independencia de un factor

Una relación $\succeq$ sobre la estructura producto $A_1 \times A_2 \times A_3$ satisface la condición de independencia (también llamada monotonía o simple cancelación) si, y sólo si, para a, b $\in A_1$, p, q $\in A_2$ y u, v $\in A_3$ se verifica que:

1. Si apu $\succeq$ bpu $\Rightarrow$ aqv $\succeq$ bqv (independencia de A_1 respecto a A_2 y A_3).
2. Si apu $\succeq$ aqu $\Rightarrow$ bpv $\succeq$ bqv (independencia de A_2 respecto a A_1 y A_3).
3. Si apu $\succeq$ apv $\Rightarrow$ bqu $\succeq$ bqv (independencia de A_3 respecto a A_1 y A_2).

AXIOMA 3. Independencia conjunta

Una relación $\succeq$ sobre la estructura $A_1 \times A_2 \times A_3$ satisface la independencia conjunta si, y sólo si, la relación de orden observada entre los efectos conjuntos de pares de factores es independiente del valor que toma el tercer factor cuando se mantiene constante.

AXIOMA 4. Axioma de dependencia del signo

Sean los pares $(p, u)^+$, $(p, u)^0$ y $(p, u)^-$ los representantes canónicos (o elementos genéricos) de los conjuntos $(A_2 \times A_3)^+$, $(A_2 \times A_3)^0$ y $(A_2 \times A_3)^-$, respectivamente. El factor A_1 se denomina dependiente del signo (sobre $A_2 \times A_3$), siempre que:

1. $[a, (p, u)^+] \succeq [b, (p, u)^+]$ si, y sólo si, $[a, (q, v)^+] \succeq [b, (q, v)^+]$.
2. $[a, (p, u)^-] \succeq [b, (p, u)^-]$ si, y sólo si, $[a, (q, v)^-] \succeq [b, (q, v)^-]$.
3. $[a, (p, u)^+] \succeq [b, (p, u)^+]$ si, y sólo si, $[b, (q, v)^-] \succeq [a, (q, v)^-]$.
4. $[a, (p, u)^0] \sim [b, (p, u)^0]$.

AXIOMA 5. Dependencia conjunta del signo

Sea la estructura $\langle A_1 \times A_2 \times A_3, \succeq \rangle$. Dos conjuntos A_1 y A_2 son conjuntamente dependientes del signo sobre A_3, si éste puede particionarse en tres subconjuntos A^+_3, A^0_3 y A^-_3, con representantes canónicos respectivos u^+, u^0 y u^-, tales que:

1. $(a, p, u^+) \succeq (b, q, u^+)$ si, y sólo si, $(a, p, v^+) \succeq (b, q, v^+)$.
2. $(a, p, u^-) \succeq (b, q, u^-)$ si, y sólo si, $(a, p, v^-) \succeq (b, q, v^-)$.
3. $(a, p, u^+) \succeq (b, q, u^+)$ si, y sólo si, $(b, q, u^-) \succeq (a, p, u^-)$.
4. $(a, p, u^0) \sim (b, q, v^0)$.

AXIOMA 6. Doble cancelación

Sea la estructura factorial $\langle A_1 \times A_2 \times A_3, \succeq \rangle$. Los factores A_1 y A_2 satisfacen la doble cancelación si, y sólo si, para a, b, c $\in A_1$, p, q, r $\in A_2$ y u $\in A_3$ se verifica que si $(a, q, u) \succeq (b, r, u)$ y $(b, p, u) \succeq (c, q, u)$ entonces $(a, p, u) \succeq (c, r, u)$.

La doble cancelación para $A_1 \times A_3$ y $A_2 \times A_3$ se enunciaría de forma similar, y los factores A_2 y A_1,

respectivamente, se mantendrían constantes. En el caso bifactorial (Luce y Tukey, 1964), este axioma se enuncia en los términos siguientes: una relación $\succeq$ sobre la estructura factorial $A_1 \times A_2$ satisface la doble cancelación siempre que para cada a, b, c $\in A_1$ y p, q, r $\in A_2$, si aq $\succeq$ br y si bp $\succeq$ cq, entonces ap $\succeq$ cr. La forma fuerte de este axioma en que la relación de orden débil ($\succeq$) se sustituye por la relación de equivalencia ($\sim$) se denomina *condición de Thomsen*.

AXIOMA 7. Axioma de cancelación distributiva

Una estructura $\langle A_1 \times A_2 \times A_3, \succeq \rangle$ con los elementos a, b, c, d $\in A_1$, p, q, r, s $\in A_2$, y u, v $\in A_3$, decimos que satisface la cancelación distributiva si, y sólo si, (a, p, u) $\succeq$ (c, r, v) y (b, q, u) $\succeq$ (d, s, v), y si (d, r, v) $\succeq$ (b, p, u), entonces implica que (a, q, u) $\succeq$ $\succeq$ (c, s, v).

AXIOMA 8. Axioma de cancelación distributiva dual

Una estructura $\langle A_1 \times A_2 \times A_3, \succeq \rangle$ con los elementos a, b, c, d, e $\in A_1$, p, q, r, s, t $\in A_2$, y u, v, w, x, y $\in A_3$, satisface la cancelación distributiva dual si, y sólo si:

(c, s, v) $\succeq$ (a, r, w) y (d, p, u) $\succeq$ (b, t, x)
(d, r, x) $\succeq$ (e, s, u) y (e, q, y) $\succeq$ (c, t, y)

y si (a, t, y) $\succeq$ (d, q, y), entonces (a, p, v) $\succeq$ (b, q, w).

Nota: Este trabajo se ha realizado en el marco del proyecto PB87-0776 financiado por la Dirección General de Investigación Científica y Técnica (DGICYT).

Referencias

Adams, E. y Fagot, R. (1959). A model of riskless choice. *Behavioral Science, 4*, 1-10.

Anderson, N. H. (1981). *Foundations of Information Integration Theory*. New York: Academic Press.

Anderson, N. H. (1982). *Methods of Information Integration Theory*. New York: Academic Press.

Birnbaum, M. H. (1974). The nonadditivity of personality impressions. *Journal of experimental Psychology, 102*, 543-561.

Campbell, N. R. (1920). *Psysics: The Elements*. London: Cambridge University Press.

Campbell, N. R. (1928). *An Account of the Principles of Measurements and Calculations*. London: Longsmans Green.

Coombs, C. H. y Huang, L. C. (1970). Polynomial psychophysics of risk. *Journal of Mathematical Psychology, 7*, 317-338.

Coombs, C. H. y Lehner, P. E. (1981). Evaluation of two alternative models for a theory of risk: I. Are moments of distributions useful in assessing risk? *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance, 7*, 1110-1123.

Debreu, G. (1960). Topological methods in cardinal utility theory. En K. J. Arrow, S. Karling y P. Suppes (eds.): *Mathematical Methods in the Social Sciences*. Stanford: Stanford University Press.

Emery, D. R. y Barron, F. H. (1979). Axiomatic and numerical conjoint measurement: An evaluation of diagnostic efficacy. *Psychometrika, 44*, 195-210.

Falmagne, J. C. (1976). Random conjoint measurement and loudness summation. *Psychological Review, 83*, 65-79.

Falmagne, J. C. (1979). On a class of probabilistic conjoint measurement models: Some diagnostic properties. *Journal of Mathematical Psychology, 19*, 73-88.

Fauquet, J. (1991). *Contrastación de los modelos axiomáticos de percepción del riesgo*. Tesis Doctoral no publicada. Universitat Autónoma de Barcelona.

Fishburn, P. C. (1990a). Continuous nontransitive additive conjoint measurement. *Mathematical Social Sciences, 20*, 165-193.

Fishburn, P. C. (1990b). Unique nontransitive additive conjoint measurement on finite sets. *Annals of Operations Research, 23*, 213-234.

Fihsburn, P. C. (1991). Nontransitive additive conjoint measurement. *Journal of Mathematical Psychology, 35*, 1-40.

Fishburn, P. C. y Roberts, F. S. (1988). Unique finite conjoint measurement. *Mathematical Social Science, 16*, 107-143.

Fisher, I. (1892). Mathematical investigations in the theory of value and prices. *Transactions of the Connecticut Academy of Science, 9*, 1-24.

Fisher, R. (1935). *The Design of Experiments*. Edinburg: Oliver y Body (Reedición 1971, New York: Hafner Press).

Garb, H. N. (1983). A conjoint measurement analysis of clinical prediction. *Journal of Mathematical Psychology, 39*, 295-301.

Green, P. E. y Rao, V. R. (1971). Conjoint measurement for quantifying judgmental data. *Journal of Marketing Research, 8*, 355-363.

Green, P. E. y Srinivasan, V. (1978). Conjoint analysis in consumer research: Issues and outlook. *Journal of Consumer Research, 5*, 103-123.

Helmholtz, H. V. (1887). Zählen und messen erkentnnistheoretisch betrachet. *Philosophise Aufsätze Eduard Zeller Gewidmet*. (Traducido al inglés por Bryan, L. C. (1930), *Counting and Measuring*. New York: Van Nostrand Reinhold Company.)

Hölder, O. (1901). Die axiome der quantität und dir lehre van mass (The axioms of quantity and the theory of mass). *Sächsische Akademie Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-Psysische Klasse, 53*, 1-64.

Huang, L. E. (1975). A nonsimple conjoint measurement model. *Journal of Mathematical Psychology, 12*, 437-448.

Hübner, R. (1989). ADCOM: Programs for finding scale values for additive conjoint measurement and for computing all solutions to a system of linear inequalities. *Applied Psychological Measurement, 13*, 256-257.

Krantz, D. H. (1964). Conjoint measurement: The Luce-Tukey axiomatization and some extensions. *Journal of Mathematical Psychology, 1*, 248-277.

Krantz, D. H. (1972). Measurement structures and psychological laws. *Science, 175*, 1427-1435.

Krantz, D. H., Luce, R. D., Suppes, P. y Tversky, A. (1971). *Foundations of Measurement. I. Additive and Polynomial Representations*. New York: Academic Press.

Krantz, D. H. y Tversky, A. (1971). Conjoint measurement analysis of composition rules in psychology. *Psychological Review, 78*, 151-169.

Lehner, P. E. y Noma, E. (1980). A new solution to the problem of finding all numerical solutions to ordered metric structures. *Psychometrika, 45*, 135-137.

Levelt, W. J. M., Riemersma, J. B. y Bunt, A. A. (1972). Binaural additivity of loudness. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, 8*, 43-54.

Lingoes, J. C. (1967). An IBM-7090 program for Guttman-Lingoes conjoint measurement-I. *Behavioral Science, 12*, 501-502.

Luce, R. D. (1966). Two extensions of conjoint measurement. *Journal of Mathematical Psychology, 3*, 348-370.
Luce, R. D. y Tukey, J. W. (1964). Simultaneous conjoint measurement: A new type of fundamental measurement. *Journal of Mathematical Psychology, 1*, 1-27.
Lukas, J. (1985). COMESCAL: A microcomputer program for testing axioms and finding scale values for conjoint measurement data. *Behavior Research Methods, Instruments and Computer, 17*, 129-130.
McClelland, G., Coombs, C. H. (1975). ORDMET: A general algorithm for constructing all numerical solutions to ordered metric structures. *Psychometrika, 40*, 269-290.
Narens, L. (1985). *Abstract Measurement Theory*. Cambridge: MIT Press.
Narens, L., Luce, R. D. (1986). Measurement: The theory of numerical assignements. *Psychological Bulletin, 99*, 166-180.
Nickerson, C. A. y McClelland, G. H. (1984). Scaling distortion in numerical conjoint measurement. *Applied Psychological Measurement, 8*, 183-198.
Nowakowska, M. (1983). *Quantitative Psychology: Some chosen Problems and New Ideas*. Amsterdam: North-Holland.
Pfanzagl, J. (1968). *Theory of Measurement*. New York: Wiley.
Roberts, F. S. (1979). *Measurement Theory with Applications to Decision Making, Utility, and the Social Sciences*. Massachusetts: Addison-Wesley.
Roskies, R. A. (1965). A measurement axiomatization for an essentially multiplicative representation of two factors. *Journal of Mathematical Psychology, 2*, 266-277.
Scott, D. (1964). Measurement models and linear inequalities. *Journal of Mathematical Psychology, 1*, 233-247.
Scott, D. y Suppes, P. (1958). Foundation aspects of theories of measurement. *Journal of Symbolic Logic, 23*, 113-128.
Sherman, B. F. (1977). An algorithm for finite conjoint additivity. *Journal of Mathematical Psychology, 16*, 204-218.
Stevens, S. S. (1946). On the theory of scales of measurement. *Science, 103*, 677-680.
Stevens, S. S. (1951). Mathematics, measurement and psychophysics. En S. S. Stevens (ed.): *Handbook of Experimental Psychology*. New York: Wiley.
Suppes, P. y Zinnes, J. L. (1963). Basic measurement theory. En R. D. Luce, R. R. Bush y E. Galanter (eds.), *Handbook of Mathematical Psychology I*. New York: Wiley.
Tarski, A. (1954a). Contributions to the theory of models (I). *Indagationes Mathematicae, 16*, 572-581.
Tarski, A. (1954b). Contributions to the theory of models (II). *Indagationes Mathematicae, 16*, 582-588.
Tarski, A. (1955). Contributions to the theory of models (III). *Indagationes Mathematicae, 17*, 56-64.
Tversky, A. (1967). A general theory of polinomial conjoint measurement. *Journal of Mathematical Psychology, 4*, 1-20.
Tversky, A. y Zivian, A. (1966). An IBM 7090 program for additivity analysis. *Behavioral Science, 11*, 78-79.
Ullrich, J. R. y Cummins, D. E. (1973). PCJM: A program for conjoint measurement analysis of polynomial composition rules. *Behavioral Science, 18*, 226-227.
Ullrich, J. R., Cummins, D. E. y Walkenbach, J. (1978). PCJM2: A program for the axiomatic conjoint measurement analysis of polynomial composition rules. *Behavior Research Methods and Instrumentation, 10*, 89-90.
Ullrich, J. R. y Painter, J. R. (1974). A conjoint measurement analysis of human judgement. *Organizational Behavior and Human Performance, 12*, 50-61.
Von Neumann, J. y Morgenstern, O. (1944). *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton: Princeton University Press. (2.ª Ed. revisada, 1947).
Wakker, P. P. (1991). Additive representation for equally spaced structures. *Journal of Mathematical Psychology, 35*, 260-266.
Wallsten, T. S. (1972). Conjoint measurement framework for the study of probabilistic information processing. *Psychological Review, 79*, 245-260.
Wallsten, T. S. (1976). Using conjoint measurement models to investigate a theory about probabilistic information processing. *Journal of Mathematical Psychology, 14*, 144-185.