ESTUDIO SOBRE EL PROBLEMA DE APOLONIO

Solución geométrica con sólo la regla

Antonio Valenciano Polack[1]

RESUMEN

El problema de Apolonio consiste en trazar una circunferencia tangente a otras tres dadas. En este estudio consideraremos una posible solución del problema en el caso más general, con algún dato extra y *sólo con el uso de la regla*. Para poder seguir más fácilmente este estudio veremos: a) algunos problemas previos que luego se utilizan en la solución del problema de Apolonio. De estos problemas, varios están ya resueltos en los tratados de Geometría Proyectiva; b) la solución propuesta al problema de Apolonio.

Palabras clave: Apolonio, circunferencia, geometría, proyectividad, regla, tangente.

ABSTRACT

The Appolonius problem (or pappus problem) consists on drawing a tangent circumference to three other ones. Here we offer a possible solution to the problem for the most common case, including some extra data and only by using the rule. In order to understand better this study, we will analyse: a) some previous problems, which have been later used to solve the Appolonius problem (some of them have already been shown in the Projective Geometry handbooks); b) our proposed solution to the Appolonius problem.

Key words: Appolonius, circumference, geometry, projectivity, rule, tangent.

1. PROBLEMAS PREVIOS

- **Problema 1:** trazar por el punto C una paralela a un segmento dado AB cuyo punto medio M se conoce, sin utilizar más que la regla. (Variante utilizando sólo la regla).

Solución

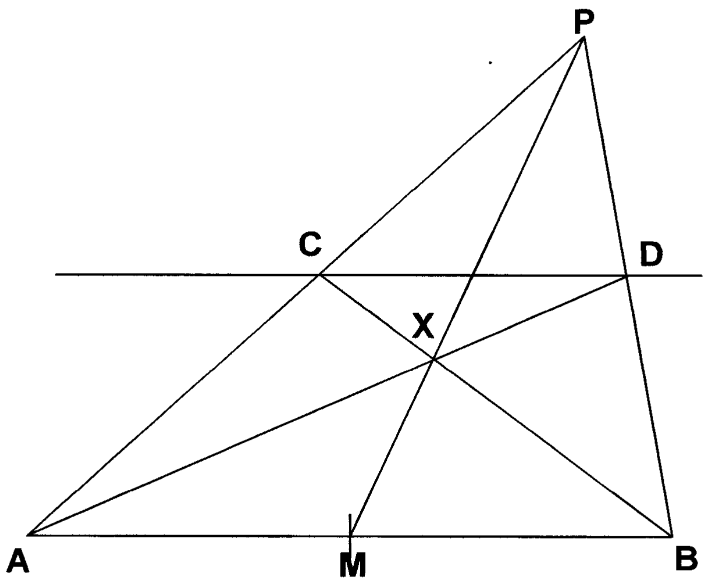

Figura 1. Representación gráfica del problema 1.

1. Tenemos el segmento **AB** con su punto medio **M** y un punto exterior **C**.
2. Trazamos la recta **BC** y la recta **AC**.
3. En la prolongación de **AC** tomamos un punto cualquiera **P**
4. Trazamos las rectas **PM** y **PB**.

[1] Salesiano. Doctor Ingeniero Industrial.

5. Siendo **X** la intersección de **BC** con **PM**, trazamos la recta **AX** y la prolongamos hasta **D**, siendo **D** un punto de **PB**.

6. La recta **CD** será la paralela buscada.

Justificación: la demostración se puede buscar en cualquier trazado de Geometría Proyectiva. En resumen: según las propiedades del cuadrilátero completo, la intersección **Q** de la recta **AD** con la **BC**, (**Q** no está dentro de la figura) es el conjugado armónico de **M** respecto de **AB**, pero como **M** es el punto medio de **AB**, **Q** está en el infinito.

Nota: si no nos dieran más que una recta, sin el punto medio de ningún segmento, el problema no sería posible, porque se necesitaría el compás para hallar el punto medio de un segmento cualquiera, a no ser que la regla estuviera graduada.

- **Problema 2:** trazar las tangentes desde un punto P exterior a una circunferencia c, sin utilizar más que la regla.

Solución:

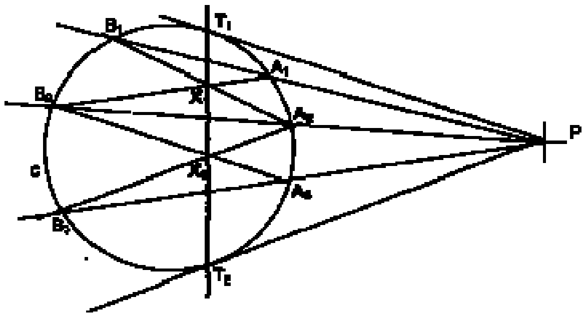

Figura 2. Representación gráfica del problema 2.

1. Tenemos la circunferencia **c** y el punto exterior **P**.

2. Desde **P** trazamos tres secantes, que cortan respectivamente a la circunferencia **c** en los puntos $\mathbf{A_1}$ y $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{A_2}$ y $\mathbf{B_2}$, $\mathbf{A_3}$ y $\mathbf{B_3}$.

3. Trazamos las rectas $\mathbf{A_1B_2}$ y $\mathbf{A_2B_1}$, que se cortan en $\mathbf{X_1}$.

4. Trazamos las rectas $\mathbf{A_2B_3}$ y $\mathbf{A_3B_2}$, que se cortan en $\mathbf{X_2}$.

5. Trazamos la recta $\mathbf{X_1X_2}$, que corta a la circunferencia en los puntos **T1** y **T2**.

6. Las tangentes a la circunferencia **c** desde **P** son $\mathbf{PT_1}$ y $\mathbf{PT_2}$.

Justificación: la construcción no es ni más ni menos que el trazado de la recta polar ($\mathbf{T_1T_2}$) del punto **P** respecto a la circunferencia **c**.

Nota: En realidad este problema previo no es absolutamente necesario para la resolución del de Apolonio, pero se pone aquí para completar el estudio. Sirve de recordatorio de los desarrollos proyectivos.

- **Problema 3:** Dadas dos circunferencias con sus centros, hallar el centro de homotecia de ambas sólo con la regla.

Solución

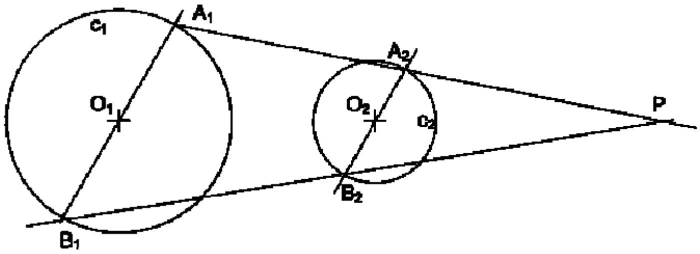

Figura 3. Representación gráfica del problema 3.

1. Tenemos las circunferencias $\mathbf{c_1}$ y $\mathbf{c_2}$, cuyos centros son respectivamente $\mathbf{O_1}$ y $\mathbf{O_2}$.

2. Trazamos un diámetro cualquiera ($\mathbf{A_1B_1}$) de la circunferencia $\mathbf{c_1}$.

3. Por el punto $\mathbf{O_2}$ trazamos una paralela a la recta $\mathbf{A_1B_1}$, que corta a $\mathbf{c_2}$ en los puntos $\mathbf{A_2}$ y $\mathbf{B_2}$. (Véase el problema 1).

4. Trazamos las rectas $\mathbf{A_1A_2}$ y $\mathbf{B_1B_2}$.

5. La intersección de $\mathbf{A_1A_2}$ y .$\mathbf{B_1B_2}$, o sea **P**, será el centro de homotecia que buscamos.

Justificación: los segmentos $\mathbf{A_1B_1}$ y $\mathbf{A_2B_2}$ pertenecientes a las circunferencias son homotéticos.

Nota: el punto P es un centro de homotecia con razón positiva. Uniendo $\mathbf{B_1}$ con $\mathbf{A_2}$ y $\mathbf{B_2}$ con $\mathbf{A_1}$ tendremos otro centro de homotecia con razón negativa.

Observación importante: Los centros de homotecia de las circunferencias son al mismo tiempo los *centros de inversión* de dichas circunferencias.

- **Problema 4:** Dadas dos circunferencias con sus centros, hallar las tangentes comunes a ambas sin utilizar más que la regla.

Solución: se hallará el centro de homotecia según el **problema 3** y, a continuación, desde el centro de homotecia se trazarán las tangentes, según el **problema 2**. Como hay dos centros de homotecia se tendrán dos pares de tangentes, las exteriores y las interiores.

- **Problema 5:** Dados tres pares de puntos de dos series proyectivas sobre una circunferencia, hallas los puntos dobles de esa proyectividad.

Solución

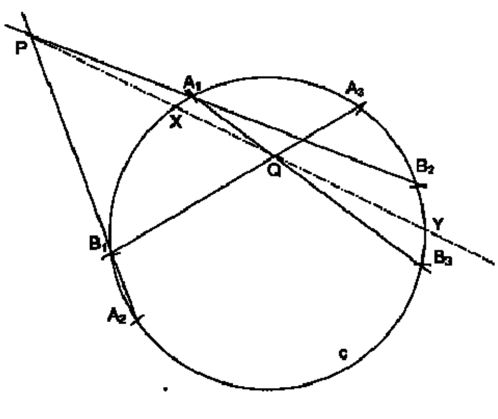

Figura 4. Representación gráfica del problema 5.

1. En la circunferencia **c**, tenemos los pares de dos series proyectivas**A_1** y **B_1**, **A_2** y **B_2**, **A_3** y **B_3**.

2. Trazamos las rectas **A_1B_2** y **A_2B_1**, que se cortan en el punto **P**.

3. Trazamos las rectas **A_1B_3** y **A_3B_1**, que se cortan en el punto **Q**.

4. Trazamos la recta **PQ,** que es el eje proyectivo. Como comprobación podríamos trazar las rectas **A_2B_3** y **A_3B_2**, que deberían cortarse también el el eje **PQ**.

5. Los puntos dobles de la proyectividad son las intersecciones **X** e **Y** del eje proyectivo **PQ** con la circunferencia **c**.

Justificación: es una construcción clásica, cuya demostración se puede ver en un buen tratado de Geometría proyectiva.

2. PROBLEMA DE APOLONIO. SOLUCIÓN

2.1. Generalidades

Como se sabe, el problema de Apolonio consiste en trazar una circunferencia tangente a otras tres dadas. La circunferencia puede ser degenerada, o sea, reducida a un punto o una recta.

Así, llamando C a la circunferencia, R a la recta y P al punto, los casos posibles son:

PPP	PPR	PPC
PRR	PRC	PCC
RRR	RRC	CCC

En total, nueve casos. El caso más general se da cuando ninguna de las tres circunferencias es degenerada, o sea, el caso CCC.

La circunferencia tangente queda determinada si se conocen su centro y los puntos de tangencia.

El número de soluciones como máximo son ocho y como mínimo cero, La discusión del problema se puede ver en un tratado de Geometría o de Dibujo Geométrico.

Se han dado diversas soluciones a este problema, fundados en la Geometría Métrica o en la Geometría Proyectiva.

Naturalmente, en cualquier caso, para el dibujo de la circunferencia es necesario el uso del compás. Lo que tratamos de hacer aquí es determinar sólo con la regla los elementos que permitan luego dibujar la circunferencia con el compás. Es decir, determinar el centro y un punto cualquiera para "aplicar" el compás.

Con nuestra resolución del problema de Apolonio no sólo determinaremos el centro y un punto de la circunferencia, sino también todos los puntos de tangencia.

2.2. Solución propuesta

Dando solamente las circunferencias, lo que se desea, o sea, utilizar sólo la regla, no es posible: se necesitan algunos datos adicionales. En nuestro caso, los *datos adicionales* son *los centros* de las tres circunferencias.

La solución que se propone es la del caso más general (las tres circunferencias son de distinto tamaño y ninguna de las tres es degenerada.)

2.3. Proceso

Datos. Se dan tres circunferencias, c_1, c_2 y c_3 con sus centros O_1, O_2 y O_3.

Solución.

1. Se determinan los centros de inversión P, Q, R (que son los mismos que los de homotecia): ver problema 3.

2. Se toma un punto A_1 en una de la circunferencia c_1 y se halla B_1, el inverso de A_1 en la circunferencia c_2, C_1, el inverso de B_1 en la circunferencia c_3 y por último D_1, el inverso de C_1 en la circunferencia c_1. Ver figura 5.

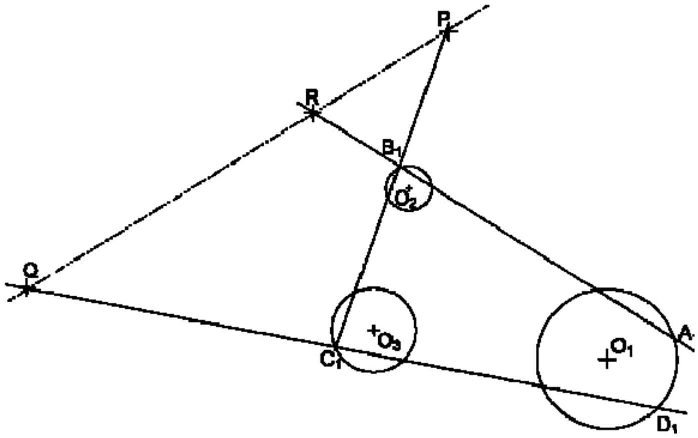

Figura 5. Primera representación gráfica de la solución al problema de Apolonio.

3. Se repite la construcción otras dos veces con los puntos A2, D2 y los puntos A3 y D3.

4. Se determinan los puntos dobles X_1, Y_1 de la proyectividad definida según el problema 5.

5. Se hallan X_2 X_3, los homólogos del punto X_1 en las circunferencias c_2 y c_3 Estos serán los puntos de tangencia de la circunferencia solución.

6. Se determina el centro de la circunferencia solución uniendo los centros de las circunferencias dato con los puntos de tangencia. Ver figura 6.

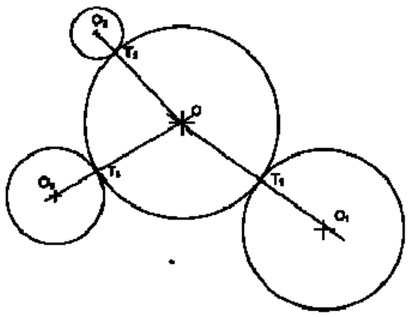

Figura 6. Segunda representación gráfica de la solución al problema de Apolonio.

2.4. Búsqueda de las demás soluciones

Si en vez de tomar los puntos X, se toman los puntos Y tendremos una segunda solución. Ambas soluciones determinan circunferencias que son tangentes exteriores o tangentes interiores.

Si en vez de determinar los centros de inversión exteriores, se toman un punto de inversión exterior y dos interiores tenemos las otras seis soluciones posibles al problema de Apolonio. Total ocho soluciones

Es fácil hacer la discusión de los distintos casos, según que las circunferencias datos sean externas unas a otras, tangentes o externas. Por ejemplo si la circunferencia c1 es interior a la c_2 y la c_2 a la c_3, es claro que no habrá ninguna solución.

2.5. Uso del problema en el dibujo. La escuadra y el cartabón

Entre los primitivos geómetras griegos y en la Geometría clásica pura sólo se tienen en cuenta como instrumentos de dibujo la regla y el compás. En este caso las construcciones expuestas pueden ser engorrosas.

Pero en la práctica actual del dibujo se emplean normalmente la escuadra y el cartabón. Si en la resolución del problema se utilizan estos instrumentos y trazamos las paralelas y buscamos los centros de homotecia con ellos, la construcción sigue siendo válida e incluso puede hacerse con gran rapidez y sencillez.