Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen XII No. 2 (2005), pp. 155–183

ÁRBOLES DE FORZAMIENTO SEMÁNTICO PARA EL SISTEMA BÁSICO CON AFIRMACIÓN Y NEGACIÓN ALTERNAS

MANUEL SIERRA A. (∗)

Resumen. El lenguaje del sistema LB extiende el lenguaje de la lógica clásica al incluir operadores para las nociones de *afirmación alterna* (en contraste con la afirmación usual o *afirmación clásica*), *negación alterna* (en contraste con la *negación clásica*), y también operadores de *incompatibilidad* y *determinabilidad* entre parejas de operadores: negación alterna versus afirmación alterna, negación alterna versus afirmación clásica y afirmación alterna versus negación clásica. El sistema está caracterizado por una herramienta de inferencia visual llamada *árboles de forzamiento semántico*. Con esta herramienta se marcan los nodos del árbol asociado a una fórmula dada, y con base en estas marcas se determina si la fórmula es válida o no. En caso de invalidez, la valuación que refuta la validez de la fórmula está determina por las marcas en su árbol de forzamiento.

Palabras claves. Árbol de forzamiento, valuación, semántica, sistema deductivo, incompatibilidad, determinabilidad.

2000 MSC: 03B60.

(∗) Manuel Sierra A. Universidad EAFIT. Medellín. Colombia. E-mail: msierra@eafit.edu.co

Este trabajo forma parte de los resultados del proyecto de investigación, *Árboles de forzamiento semántico para sistemas deductivos con operador afirmación*, el cual fue financiado por la Universidad EAFIT.

Abstract. The language of the system LB extends the language of the classic logic to include operators for the notions of alternating affirmation (in contrast to usual affirmation or classic affirmation), alternating negation (in contrast to classic negation), and also operators of incompatibility and determinability between pairs of operators: alternating negation versus alternating affirmation, alternating negation versus classic affirmation and alternating affirmation versus classic negation. The system is characterized by a tool of visual inference called trees of semantic forcing. With this tool the nodes of the associated tree to a given formula are marked, and based on these marks determines if the formula is valid or not. In case of invalidity, the valuation that refutes the validity of the formula is determined by the marks in its tree of forcing.

Key words and phrases. Tree of forcing, valuation, semantics, deductive system, incompatibility, determinability.

1. Introducción

En [3] da Costa presenta la jerarquía de sistemas deductivos, C_n *con* $1 \leq n < \omega$, los cuales soportan las inconsistencias. El operador *negación* de estos sistemas es más débil que el operador *negación clásica*. Da Costa también introduce un operador de *buen comportamiento*, con el cual se pretende que si una fórmula está débilmente negada y tiene buen comportamiento entonces la fórmula débilmente negada se debe comportar como si estuviera clásicamente negada. Los sistemas son presentados con una sola negación, llamada *negación débil*; en el sistema C_1, el *buen comportamiento* de una fórmula es definido como la negación débil de la conjunción de la fórmula con su negación débil; la negación clásica es definida en términos de la negación débil y el buen comportamiento. En [2] Carnielli y Marcos estudian con mayor profundidad el operador de buen comportamiento al presentar las *Lógicas para la Inconsistencia Formal* las cuales permiten interiorizar los conceptos de *consistencia* e *inconsistencia* en el lenguaje objeto.

En [7] se presenta una jerarquía de sistemas deductivos, los cuales son generalizaciones de la Lógica Clásica, y en ellos aparecen dos negaciones (negación clásica y *negación alterna*), un operador *de incompatibilidad respecto a la negación alterna* y un operador de *determinabilidad respecto a la negación alterna*. En uno de los sistemas de la jerarquía la negación alterna es más fuerte que la clásica y en el otro la negación alterna es más débil. En estos sistemas la incompatibilidad respecto a la negación alterna de una fórmula puede ser caracterizada como la negación clásica de la conjunción entre la fórmula y su negación alterna; esta caracterización hace al operador incompatibilidad esencialmente diferente del operador de buen comportamiento presentado por da

Costa, y del operador de consistencia presentado por Carnielli y Marcos, pero más cercano al operador de consistencia presentado en [5] por D'Ottaviano y da Costa para el sistema J_3. La determinabilidad respecto a la negación alterna de una fórmula puede ser caracterizada como la disyunción de la fórmula con su negación alterna.

En [4] se presentan diversos sistemas de Lógicas Modales, la mayoría de estos sistemas tienen un operador *de necesariedad,* en cierto sentido este operador es una afirmación más fuerte que el operador *afirmación clásica* o afirmación usual (la necesariedad de la fórmula α implica la negación clásica de la fórmula α, pero no necesariamente vale la implicación recíproca). Un operador de *imposibilidad* es definido en términos de los operadores necesariedad y negación clásica. En cierto sentido el operador de imposibilidad es más fuerte que el operador *negación clásica* o negación usual (la imposibilidad de la fórmula α implica la negación clásica de la fórmula α, pero no necesariamente vale la implicación recíproca). Un operador de *posibilidad* es definido en términos de los operadores necesariedad y negación clásica. En cierto sentido el operador de posibilidad es más débil que el operador *afirmación clásica* o afirmación usual (la afirmación clásica de la fórmula α implica la posibilidad de la fórmula α, pero no necesariamente vale la implicación recíproca). Estos sistemas deductivos no son presentados con operadores de buen comportamiento o similares.

En [8] se presenta un sistema deductivo con un operador de *afirmación alterna*, un operador de *incompatibilidad respecto a la afirmación alterna* y un operador de *determinabilidad respecto a la afirmación alterna.* La incompatibilidad respecto a la afirmación alterna de una fórmula puede ser caracterizada como la negación clásica de la conjunción entre la negación clásica de la fórmula y su afirmación alterna. La determinabilidad respecto a la afirmación alterna de una fórmula puede ser caracterizada como la disyunción entre la negación clásica de la fórmula y su afirmación alterna. Este sistema y dos subsistemas de él se caracterizan semánticamente en [9]. En uno de estos subsistemas la afirmación alterna es más fuerte que la clásica y en el otro la afirmación alterna es más débil.

El método de los *tableros semánticos,* presentado por E. Beth en [1] y popularizado como *árboles de opciones semánticas* por R. Smullyan en [10], consiste básicamente en examinar, de una manera sistemática, todas las posibilidades que podrían hacer falsa una proposición dada y buscar si una de estas posibilidades es lógicamente viable, es decir no genera contradicciones, en este caso se tiene un *contraejemplo* que refuta la validez de la proposición dada, si no es posible generar un contraejemplo, es decir ninguna posibilidad resulta lógicamente viable, entonces la proposición analizada es válida. Este método ha encontrado gran aceptación, y se ha extendido a muchos sistemas de lógicas no clásicas, y además es fácil de implementar con un programa de computador.

Los árboles de forzamiento semántico, a diferencia de los árboles de opciones semánticas, no exploran todas las opciones posibles cuando se busca el contraejemplo, se limitan a las opciones que son deductivamente forzadas por las reglas del sistema. Por esta razón el análisis de validez con árboles de forzamiento es en principio más sencillo y natural que con los árboles de opciones.
En este trabajo se presentan los *Árboles de Forzamiento Semántico* para el sistema deductivo *LB*, *Lógica Básica con Afirmación y Negación Alternas*, el cual ha sido caracterizado semánticamente en [6]. Se prueba detalladamente la equivalencia entre la presentación semántica y la presentación con árboles de forzamiento. Cuando una fórmula es inválida, lo cual se concluye si el árbol de la fórmula está bien marcado, entonces la lectura de las marcas de los nodos asociados a las fórmulas cuasi-atómicas, proporciona una valuación que refuta la validez de la fórmula.

2. Lenguaje de LB

El lenguaje de la Lógica Clásica CL consta de los operadores binarios $\rightarrow$, $\wedge$ y $\vee$, y del operador monádico $\sim$, además del paréntesis izquierdo y el paréntesis derecho. El *lenguaje del sistema* LB se obtiene extendiendo el lenguaje de la lógica clásica con los operadores monádicos $+$, $\neg$, I$+\sim$, C$+\sim$, I$+\neg$, C$+\neg$, I$*\neg$ y C$*\neg$ (llamados *afirmación alterna*, *negación alterna, incompatibilidad entre la afirmación alterna y la negación clásica, completez o determinabilidad entre la afirmación alterna y la negación clásica, incompatibilidad entre la afirmación alterna y la negación alterna, completez o determinabilidad entre la afirmación alterna y la negación alterna, incompatibilidad entre la afirmación clásica y la negación alterna, completez o determinabilidad entre la afirmación clásica y la negación alterna*).
El conjunto de *fórmulas de* LB es generado por las siguientes reglas y sólo por ellas:

R1. Se tiene un conjunto enumerable de *fórmulas atómicas*.
R2. Si A es una fórmula entonces $\sim$(A), $\neg$(A), $+$(A), $(A)^{I+\sim}$, $(A)^{C+\sim}$, $(A)^{I+\neg}$, $(A)^{C+\neg}$, $(A)^{I*\neg}$ y $(A)^{C*\neg}$ son fórmulas[1].
R3. Si A y B son fórmulas entonces (A)$\wedge$(B), (A)$\vee$(B) y (A)$\rightarrow$(B) son fórmulas.

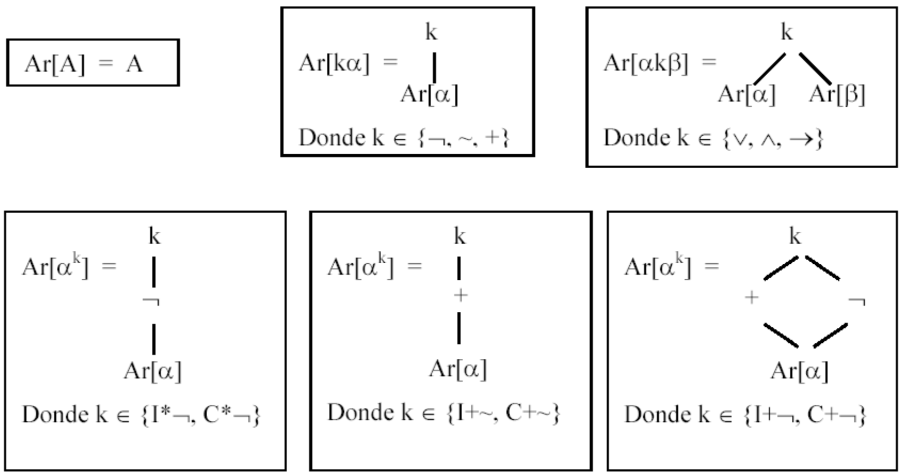
Al unir al conjunto de las fórmulas atómicas las fórmulas de la forma $+$(A) y $\neg$(A), se obtienen las *fórmulas cuasi-atómicas*.

---

[1]Si A es una fórmula, s un operador monádico, t un operador monádico, entonces: A^{Ist} indica que no pueden tenerse las fórmulas s(A) y t(A) simultáneamente, A^{Cst} indica que debe tenerse al menos una de las fórmulas s(A) y t(A).

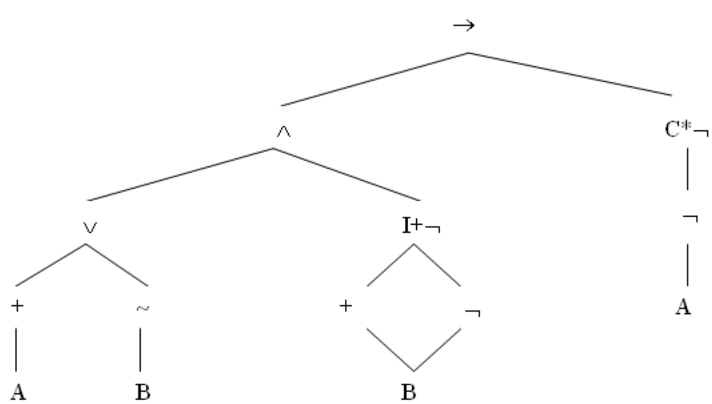
3. Árbol de una fórmula

El *árbol de la fórmula* α se representa por *Ar[α]* y se construye utilizando las siguientes reglas (A fórmula atómica, α y β fórmulas arbitrarias):



Se define el *árbol de un argumento* "de α_1, ... , α_{n-1} y α_n se infiere β" como: Ar[$(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \rightarrow \beta$], el árbol del *condicional asociado* al argumento. El nodo superior del árbol de la fórmula α, es llamado la *raíz* del árbol, se denota R[α] y corresponde al conectivo principal de la fórmula α. Los nodos inferiores, es decir aquellos de los cuales no salen ramas, son llamados *hojas* y corresponden a las fórmulas atómicas.

Por ejemplo, para el argumento: " de +A$\vee$ ~B y B$^{I+\neg}$ se infiere A$^{C*\neg}$", el condicional asociado es $[(+A\vee \sim B) \wedge B^{I+\neg}] \rightarrow A^{C*\neg}$ y su árbol es:



4. Marcando los nodos de un árbol

Si un nodo C es uno de los conectivos monádicos $\sim$, $\neg$ o $+$, entonces su único hijo se llama el *alcance del conectivo* y para hacer referencia a él se utiliza la notación aC.

Si un nodo K es uno de los conectivos binarios $\wedge$, $\vee$ o $\rightarrow$, entonces para sus *hijos izquierdo y derecho* se utiliza la notación iK y dK respectivamente.

Si un nodo K es uno de los conectivos I+$\neg$ o C+$\neg$, entonces para sus *hijos izquierdo y derecho* se utiliza la notación $+K$ y $\neg K$ respectivamente, para el hijo común de +K y $\neg$K, el cual se le llama *alcance de K*, se utiliza la notación aK.

Si un nodo K es uno de los conectivos I+$\sim$ o C+$\sim$, entonces para el *hijo de* K se utiliza la notación $+K$ y para el hijo de +K, *llamado el alcance de K*, se utiliza la notación aK.

Si un nodo K es uno de los conectivos I*$\neg$ o C*$\neg$, entonces para el *hijo de K* se utiliza la notación $\neg K$ y para el hijo de $\neg$K, *llamado el alcance de K,* se utiliza la notación aK.

Para toda sub-fórmula β de α, el *nodo asociado* a β es la raíz de β, *R[β],* la cual a su vez es el conectivo principal de β en el caso que β sea compuesta, o es la misma β en el caso que β sea atómica.

Para una fórmula α, H(α) el conjunto de hojas del Ar[α], y N(α) el conjunto de nodos del Ar[α].

Para cada fórmula α, una *función de marca de hojas m* (o simplemente función de marca), es una función de H(α) en $\{0, 1\}$.

Si m(p) = 1 entonces se dice que la hoja p está marcada con 1, o que *es aceptada.*

Si m(p) = 0 entonces se dice que la hoja p está marcada con 0, o que *es rechazada.*

Cada función de marca de hojas m, se extiende a una *función de marca de nodos M*, de N(α) en $\{0, 1\}$ según las siguientes reglas:

M(p) = m(p) si p es una hoja.

A$\wedge$. *Aceptación de la conjunción*: Si una conjunción es aceptada entonces tanto el hijo izquierdo como el derecho son aceptados.

$$\mathrm{M}(\wedge) = 1 \Rightarrow [\mathrm{M}(\mathrm{i}\wedge) = 1 \text{ y } \mathrm{M}(\mathrm{d}\wedge) = 1]$$

AiAd∧. *Aceptación a la izquierda y aceptación a la derecha en la conjunción*: Si en una conjunción tanto el hijo izquierdo como el derecho son aceptados entonces la conjunción es aceptada.

$$[\mathrm{M}(\mathrm{i}\wedge) = 1 \text{ y } \mathrm{M}(\mathrm{d}\wedge) = 1] \Rightarrow \mathrm{M}(\wedge) = 1$$

R∨. *Rechazo de la disyunción*: Si una disyunción es rechazada entonces tanto el hijo izquierdo como el derecho son rechazados.

$$\mathrm{M}(\vee) = 0 \Rightarrow [\mathrm{M}(\mathrm{i}\vee) = 0 \text{ y } \mathrm{M}(\mathrm{d}\vee) = 0]$$

RiRd∨. *Rechazo a la izquierda y rechazo a la derecha en la disyunción*: Si en una disyunción tanto el hijo izquierdo como el derecho son rechazados entonces la disyunción es rechazada.

$$[\mathrm{M}(\mathrm{i}\vee) = 0 \text{ y } \mathrm{M}(\mathrm{d}\vee) = 0] \Rightarrow \mathrm{M}(\vee) = 0$$

R→. *Rechazo del condicional*: Si un condicional es rechazado entonces el hijo izquierdo es aceptado y el hijo derecho es rechazado.

$$\mathrm{M}(\rightarrow) = 0 \Rightarrow [\mathrm{M}(\mathrm{i}\rightarrow) = 1 \text{ y } \mathrm{M}(\mathrm{d}\rightarrow) = 0]$$

AiRd→. *Aceptación a la izquierda y rechazo a la derecha en el condicional*: Si en un condicional el hijo izquierdo es aceptado y el hijo derecho es rechazado entonces el condicional es rechazado.

$$[\mathrm{M}(\mathrm{i}\rightarrow) = 1 \text{ y } \mathrm{M}(\mathrm{d}\rightarrow) = 0] \Rightarrow \mathrm{M}(\rightarrow) = 0$$

A∼. *Aceptación de la negación*: Si una negación es aceptada entonces su alcance es rechazado.

$$\mathrm{M}(\sim) = 1 \Rightarrow \mathrm{M}(\mathrm{a}\sim) = 0$$

Ra∼. *Rechazo del alcance de la negación*: Si el alcance una negación es rechazado entonces la negación es aceptada.

$$\mathrm{M}(\mathrm{a}\sim) = 0 \Rightarrow \mathrm{M}(\sim) = 1$$

RI+¬. *Rechazo de la incompatibilidad*: Si la incompatibilidad entre la afirmación alterna y la negación alterna es rechazada entonces tanto la afirmación alterna como la negación alterna son aceptadas.

$$\mathrm{M}(\mathrm{I}{+}\neg) = 0 \Rightarrow [\mathrm{M}({+}\mathrm{I}{+}\neg) = 1 \text{ y } \mathrm{M}(\neg\mathrm{I}{+}\neg) = 1]$$

A+A¬ I+¬. *Aceptación de la afirmación alterna y aceptación de la negación alterna en la incompatibilidad*: Si tanto la afirmación alterna como la negación alterna son aceptadas entonces la incompatibilidad entre la afirmación alterna y la negación alterna es rechazada.

$$[\mathrm{M}(+\mathrm{I}+\neg) = 1 \text{ y } \mathrm{M}(\neg\mathrm{I}+\neg) = 1] \Rightarrow \mathrm{M}(\mathrm{I}+\neg) = 0$$

RC+¬. *Rechazo de la completez*: Si la determinabilidad entre la afirmación alterna y la negación alterna es rechazada entonces tanto la afirmación alterna como la negación alterna son rechazadas.

$$\mathrm{M}(\mathrm{C}+\neg) = 0 \Rightarrow [\mathrm{M}(+\mathrm{C}+\neg) = 0 \text{ y } \mathrm{M}(\neg\mathrm{C}+\neg) = 0]$$

R+R¬ C+¬. *Rechazo de la afirmación alterna y rechazo de la negación alterna en la completez*: Si tanto la afirmación alterna como la negación alterna son rechazadas entonces la determinabilidad entre la afirmación alterna y la negación alterna es rechazada.

$$[\mathrm{M}(+\mathrm{C}+\neg) = 0 \text{ y } \mathrm{M}(\neg\mathrm{C}+\neg) = 0] \Rightarrow \mathrm{M}(\mathrm{C}+\neg) = 0$$

RI+∼. *Rechazo de la incompatibilidad*: Si la incompatibilidad entre la afirmación alterna y la negación clásica es rechazada entonces la afirmación alterna es aceptada y el alcance es rechazado.

$$\mathrm{M}(\mathrm{I}+\sim) = 0 \Rightarrow [\mathrm{M}(+\mathrm{I}+\sim) = 1 \text{ y } \mathrm{M}(\mathrm{aI}+\sim) = 0]$$

A+RaI+∼. *Aceptación de la afirmación alterna y rechazo del alcance en la incompatibilidad*: Si la afirmación alterna es aceptada y el alcance es rechazado entonces la incompatibilidad entre la afirmación alterna y la negación clásica es rechazada.

$$[\mathrm{M}(+\mathrm{I}+\sim) = 1 \text{ y } \mathrm{M}(\mathrm{aI}+\sim) = 0] \Rightarrow \mathrm{M}(\mathrm{I}+\sim) = 0$$

RC+∼. *Rechazo de la completez*: Si la determinabilidad entre la afirmación alterna y la negación clásica es rechazada entonces la afirmación alterna es rechazada y el alcance es aceptado.

$$\mathrm{M}(\mathrm{C}+\sim) = 0 \Rightarrow [\mathrm{M}(+\mathrm{C}+\sim) = 0 \text{ y } \mathrm{M}(\mathrm{aC}+\sim) = 1]$$

R+AaC+∼. *Rechazo de la afirmación alterna y aceptación del alcance en la completez*: Si la afirmación alterna es rechazada y el alcance es aceptado entonces la determinabilidad entre la afirmación alterna y la negación clásica es rechazada

$$[\mathrm{M}(+\mathrm{C}+\sim) = 0 \text{ y } \mathrm{M}(\mathrm{aC}+\sim) = 1] \Rightarrow \mathrm{M}(\mathrm{C}+\sim) = 0$$

RI*¬. *Rechazo de la incompatibilidad*: Si la incompatibilidad entre la afirmación clásica y la negación alterna es rechazada entonces tanto la negación alterna como el alcance son aceptados.

$$\mathrm{M}(\mathrm{I}{*}\neg) = 0 \Rightarrow [\mathrm{M}(\neg\mathrm{I}{*}\neg) = 1 \text{ y } \mathrm{M}(\mathrm{aI}{*}\neg) = 1]$$

A¬AaI*¬. *Aceptación de la negación alterna y aceptación del alcance en la incompatibilidad*: Si tanto la negación alterna como el alcance son aceptados entonces la incompatibilidad entre la afirmación clásica y la negación alterna es rechazada.

$$[\mathrm{M}(\neg\mathrm{I}{*}\neg) = 1 \text{ y } \mathrm{M}(\mathrm{aI}{*}\neg) = 1] \Rightarrow \mathrm{M}(\mathrm{I}{*}\neg) = 0$$

RC*¬. *Rechazo de la completez*: Si la determinabilidad entre la afirmación clásica y la negación alterna es rechazada entonces tanto la negación alterna como el alcance son rechazados.

$$\mathrm{M}(\mathrm{C}{*}\neg) = 0 \Rightarrow [\mathrm{M}(\neg\mathrm{C}{*}\neg) = 0 \text{ y } \mathrm{M}(\mathrm{aC}{*}\neg) = 0]$$

R¬RaC*¬. *Rechazo de la negación alterna y rechazo del alcance en la completez*: Si tanto la negación alterna como el alcance son rechazados entonces la determinabilidad entre la afirmación clásica y la negación alterna es rechazada.

$$[\mathrm{M}(\neg\mathrm{C}{*}\neg) = 0 \text{ y } \mathrm{M}(\mathrm{aC}{*}\neg) = 0] \Rightarrow \mathrm{M}(\mathrm{C}{*}\neg) = 0$$

Las anteriores reglas son llamadas *reglas primitivas* para el forzamiento de marcas.

Se dice que una fórmula α es *A-válida* (válida desde el punto de vista de los árboles, $\vDash_A \alpha$) si y solamente si para toda función de marca m, se tiene que $\mathrm{M}(\mathrm{R}[\alpha]) = 1$.

Se dice que una fórmula α es *A-inválida* si no es A-válida, es decir si existe una función de marca m, tal que $\mathrm{M}(\mathrm{R}[\alpha]) = 0$. En este caso se dice que la *función de marca refuta* la fórmula α. También se dice que el *árbol de α está bien marcado* (*ABM*, todos sus nodos están marcados de acuerdo a las reglas).

5. Reglas derivadas para el forzamiento de marcas

Las reglas primitivas para el forzamiento de marcas son suficientes para estudiar las propiedades de los árboles de forzamiento, pero en la práctica, cuando se trata de marcar todos los nodos de un árbol, es importante tener reglas que cubran todas las posibilidades. A continuación se presenta un juego completo de *reglas derivadas.* Las pruebas son inmediatas, por esta razón se omiten.

5.1 Proposición. *Reglas derivadas para el condicional*

AiA→. *Aceptación a la izquierda y aceptación del condicional*: Si son aceptados tanto el condicional como su hijo izquierdo entonces es aceptado el hijo derecho.

$$[\mathrm{M}(\mathrm{i}\to) = 1 \text{ y } \mathrm{M}(\to) = 1] \Rightarrow \mathrm{M}(\mathrm{d}\to) = 1$$

RdA→. *Rechazo a la derecha y aceptación del condicional*: Si un condicional es aceptado y su hijo derecho es rechazado entonces es rechazado el hijo izquierdo.

$$[\mathrm{M}(\mathrm{d}\to) = 0 \text{ y } \mathrm{M}(\to) = 1] \Rightarrow \mathrm{M}(\mathrm{i}\to) = 0$$

Ri→. *Rechazo a la izquierda en el condicional*: Si en un condicional se rechaza el hijo izquierdo entonces se acepta el condicional.

$$\mathrm{M}(\mathrm{i}\to) = 0 \Rightarrow \mathrm{M}(\to) = 1$$

AD→. *Aceptación a la derecha en el condicional*: Si en un condicional se acepta el hijo derecho entonces se acepta el condicional.

$$\mathrm{M}(\mathrm{d}\to) = 1 \Rightarrow \mathrm{M}(\to) = 1$$

5.2 Proposición. *Reglas derivadas para la conjunción*

AiR∧. *Afirmación a la izquierda y rechazo de la conjunción*: Si se rechaza una conjunción pero se acepta su hijo izquierdo entonces se rechaza su hijo derecho.

$$[\mathrm{M}(\mathrm{i}\wedge) = 1 \text{ y } \mathrm{M}(\wedge) = 0] \Rightarrow \mathrm{M}(\mathrm{d}\wedge) = 0$$

AdR∧. *Afirmación a la derecha y rechazo de la conjunción*: Si se rechaza una conjunción pero se acepta su hijo derecho entonces se rechaza su hijo izquierdo.

$$[\mathrm{M}(\mathrm{d}\wedge) = 1 \text{ y } \mathrm{M}(\wedge) = 0] \Rightarrow \mathrm{M}(\mathrm{i}\wedge) = 0$$

Ri$\wedge$. *Rechazo a la izquierda en la conjunción*: Si se rechaza el hijo izquierdo de una conjunción entonces se rechaza la conjunción.

$$\mathrm{M}(\mathrm{i}\wedge) = 0 \Rightarrow \mathrm{M}(\wedge) = 0$$

RD$\wedge$. *Rechazo a la derecha en la conjunción*: Si se rechaza el hijo derecho de una conjunción entonces se rechaza la conjunción.

$$\mathrm{M}(\mathrm{d}\wedge) = 0 \Rightarrow \mathrm{M}(\wedge) = 0$$

5.3 Proposición. *Reglas derivadas para la disyunción*

RiA$\vee$. *Rechazo a la izquierda y aceptación de la disyunción*: Si se acepta una disyunción pero se rechaza su hijo izquierdo entonces se acepta su hijo derecho.

$$[\mathrm{M}(\mathrm{i}\vee) = 0 \text{ y } \mathrm{M}(\vee) = 1] \Rightarrow \mathrm{M}(\mathrm{d}\vee) = 1$$

RdA$\vee$. *Rechazo a la derecha y aceptación de la disyunción*: Si se acepta una disyunción pero se rechaza su hijo derecho entonces se acepta su hijo izquierdo.

$$[\mathrm{M}(\mathrm{d}\vee) = 0 \text{ y } \mathrm{M}(\vee) = 1] \Rightarrow \mathrm{M}(\mathrm{i}\vee) = 1$$

Ai$\vee$. *Aceptación a la izquierda en la disyunción*: Si se acepta el hijo izquierdo de una disyunción entonces se acepta la disyunción.

$$\mathrm{M}(\mathrm{i}\vee) = 1 \Rightarrow \mathrm{M}(\vee) = 1$$

Ad$\vee$. *Aceptación a la derecha en la disyunción*: Si se acepta el hijo derecho de una disyunción entonces se acepta la disyunción.

$$\mathrm{M}(\mathrm{d}\vee) = 1 \Rightarrow \mathrm{M}(\vee) = 1$$

5.4 Proposición. *Reglas derivadas para la negación*

Aa$\sim$. *Aceptación del alcance de la negación*: Si el alcance de una negación es aceptado entonces la negación es rechazada.

$$\mathrm{M}(\mathrm{a}\sim) = 1 \Rightarrow \mathrm{M}(\sim) = 0$$

R∼. *Rechazo de la negación*: Si la negación es rechazada entonces su alcance es aceptado.

$$\mathrm{M}(\sim) = 0 \Rightarrow \mathrm{M}(\mathrm{a}\sim) = 1$$

5.5 Proposición. *Reglas derivadas para la incompatibilidad entre la afirmación alterna y la negación alterna*

A+AI+¬. *Aceptación de la afirmación alterna y aceptación de la incompatibilidad*: Si tanto la incompatibilidad entre la afirmación alterna y la negación alterna como la afirmación alterna son aceptadas entonces la negación alterna es rechazada.

$$[\mathrm{M}(+\mathrm{I}+\neg) = 1 \text{ y } \mathrm{M}(\mathrm{I}+\neg) = 1] \Rightarrow \mathrm{M}(\neg\mathrm{I}+\neg) = 0$$

A¬AI+¬. *Aceptación de la negación alterna y aceptación de la incompatibilidad*: Si tanto la incompatibilidad entre la afirmación alterna y la negación alterna como la negación alterna son aceptadas entonces la afirmación alterna es rechazada.

$$[\mathrm{M}(\neg\mathrm{I}+\neg) = 1 \text{ y } \mathrm{M}(\mathrm{I}+\neg) = 1] \Rightarrow \mathrm{M}(+\mathrm{I}+\neg) = 0$$

R+I+¬. *Rechazo de la afirmación alterna en la incompatibilidad*: Si la afirmación alterna es rechazada entonces la incompatibilidad entre la afirmación alterna y la negación alterna es aceptada.

$$\mathrm{M}(+\mathrm{I}+\neg) = 0 \Rightarrow \mathrm{M}(\mathrm{I}+\neg) = 1$$

R¬I+¬. *Rechazo de la negación alterna en la incompatibilidad*: Si la negación alterna es rechazada entonces la incompatibilidad entre la afirmación alterna y la negación alterna es aceptada.

$$\mathrm{M}(\neg\mathrm{I}+\neg) = 0 \Rightarrow \mathrm{M}(\mathrm{I}+\neg) = 1$$

5.6 Proposición. *Reglas derivadas para la determinabilidad entre la afirmación alterna y la negación alterna*

R+AC+¬. *Rechazo de la afirmación alterna y aceptación de la completez*: Si la determinabilidad entre la afirmación alterna y la negación alterna es aceptada y la afirmación alterna es rechazada entonces la negación alterna es aceptada.

$$[\mathrm{M}(+\mathrm{C}+\neg) = 0 \text{ y } \mathrm{M}(\mathrm{C}+\neg) = 1] \Rightarrow \mathrm{M}(\neg\mathrm{C}+\neg) = 1$$

R¬AC+¬. *Rechazo de la negación alterna y aceptación de la completez*: Si la determinabilidad entre la afirmación alterna y la negación alterna es aceptada y la negación alterna es rechazada entonces la afirmación alterna es aceptada.

$$[\mathrm{M}(\neg\mathrm{C}+\neg) = 0 \text{ y } \mathrm{M}(\mathrm{C}+\neg) = 1] \Rightarrow \mathrm{M}(+\mathrm{C}+\neg) = 1$$

A+C+¬. *Aceptación de la afirmación alterna en la completez*: Si la afirmación alterna es aceptada entonces la determinabilidad entre la afirmación alterna y la negación alterna es aceptada.

$$\mathrm{M}(+\mathrm{C}+\neg) = 1 \Rightarrow \mathrm{M}(\mathrm{C}+\neg) = 1$$

A¬C+¬. *Aceptación de la negación alterna en la completez*: Si la negación alterna es aceptada entonces la determinabilidad entre la afirmación alterna y la negación alterna es aceptada.

$$\mathrm{M}(\neg\mathrm{C}+\neg) = 1 \Rightarrow \mathrm{M}(\mathrm{C}+\neg) = 1$$

5.7 Proposición. *Reglas derivadas para la incompatibilidad entre la afirmación alterna y la negación clásica*

A+AI+∼. *Aceptación de la afirmación alterna y aceptación de la incompatibilidad*: Si tanto la incompatibilidad entre la afirmación alterna y la negación clásica como la afirmación alterna son aceptadas entonces el alcance es aceptado.

$$[\mathrm{M}(+\mathrm{I}+\sim) = 1 \text{ y } \mathrm{M}(\mathrm{I}+\sim) = 1] \Rightarrow \mathrm{M}(\mathrm{aI}+\sim) = 1$$

RaAI+∼. *Rechazo del alcance y aceptación de la incompatibilidad*: Si la incompatibilidad entre la afirmación alterna y la negación clásica es aceptada y el alcance es rechazado entonces la afirmación alterna es rechazada.

$$[\mathrm{M}(\mathrm{aI}+\sim) = 0 \text{ y } \mathrm{M}(\mathrm{I}+\sim) = 1] \Rightarrow \mathrm{M}(+\mathrm{I}+\sim) = 0$$

R+I+∼. *Rechazo de la afirmación alterna en la incompatibilidad*: Si la afirmación alterna es rechazada entonces la incompatibilidad entre la afirmación alterna y la negación clásica es aceptada.

$$\mathrm{M}(+\mathrm{I}+\sim) = 0 \Rightarrow \mathrm{M}(\mathrm{I}+\sim) = 1$$

AaI+∼. *Aceptación del alcance en la incompatibilidad*: Si el alcance es aceptado entonces la incompatibilidad entre la afirmación alterna y la negación clásica es aceptada.

$$\mathrm{M(aI{+}{\sim})} = 1 \Rightarrow \mathrm{M(I{+}{\sim})} = 1$$

5.8 Proposición. *Reglas derivadas para la determinabilidad entre la afirmación alterna y la negación clásica*

R+AC+∼. *Rechazo de la afirmación alterna y aceptación de la completez*: Si la determinabilidad entre la afirmación alterna y la negación clásica es aceptada y la afirmación alterna es rechazada entonces el alcance es rechazado.

$$[\mathrm{M(+C{+}{\sim})} = 0 \text{ y } \mathrm{M(C{+}{\sim})} = 1] \Rightarrow \mathrm{M(aC{+}{\sim})} = 0$$

AaAC+∼. *Aceptación del alcance y aceptación de la completez*: Si la determinabilidad entre la afirmación alterna y la negación clásica es aceptada y el alcance es aceptado entonces la afirmación alterna es aceptada.

$$[\mathrm{M(aC{+}{\sim})} = 1 \text{ y } \mathrm{M(C{+}{\sim})} = 1] \Rightarrow \mathrm{M(+C{+}{\sim})} = 1$$

A+C+∼. *Aceptación de la afirmación alterna en la completez*: Si la afirmación alterna es aceptada entonces la determinabilidad entre la afirmación alterna y la negación clásica es aceptada.

$$\mathrm{M(+C{+}{\sim})} = 1 \Rightarrow \mathrm{M(C{+}{\sim})} = 1$$

RaC+∼. *Rechazo del alcance en la completez*: Si el alcance es rechazado entonces la determinabilidad entre la afirmación alterna y la negación clásica es aceptada.

$$\mathrm{M(aC{+}{\sim})} = 0 \Rightarrow \mathrm{M(C{+}{\sim})} = 1$$

5.9 Proposición. *Reglas derivadas para la incompatibilidad entre la afirmación clásica y la negación alterna*

A¬AI*¬. *Aceptación de la negación alterna y aceptación de la incompatibilidad*: Si la incompatibilidad entre la afirmación clásica y la negación alterna es aceptada y la negación alterna es aceptada entonces el alcance es rechazado.

$$[\mathrm{M}(\neg \mathrm{I}{*}\neg) = 1 \text{ y } \mathrm{M}(\mathrm{I}{*}\neg) = 1] \Rightarrow \mathrm{M}(\mathrm{aI}{*}\neg) = 0$$

AaAI*¬. *Aceptación del alcance y aceptación de la incompatibilidad*: Si la incompatibilidad entre la afirmación clásica y la negación alterna es aceptada y el alcance es aceptado entonces la negación alterna es rechazada.

$$[\mathrm{M}(\mathrm{aI}^*\neg) = 1 \text{ y } \mathrm{M}(\mathrm{I}^*\neg) = 1] \Rightarrow \mathrm{M}(\neg\mathrm{I}^*\neg) = 0$$

R¬I*¬. *Rechazo de la negación alterna en la incompatibilidad*: Si la negación alterna es rechazada entonces la incompatibilidad entre la afirmación clásica y la negación alterna es aceptada.

$$\mathrm{M}(\neg\mathrm{I}^*\neg) = 0 \Rightarrow \mathrm{M}(\mathrm{I}^*\neg) = 1$$

RaI*¬. *Rechazo del alcance en la incompatibilidad*: Si el alcance es rechazado entonces la incompatibilidad entre la afirmación clásica y la negación alterna es aceptada.

$$\mathrm{M}(\mathrm{aI}^*\neg) = 0 \Rightarrow \mathrm{M}(\mathrm{I}^*\neg) = 1$$

5.10 Proposición. *Reglas derivadas para la determinabilidad entre la afirmación clásica y la negación alterna*

R¬AC*¬. *Rechazo de la negación alterna y aceptación de la completez*: Si la determinabilidad entre la afirmación clásica y la negación alterna es aceptada y la negación alterna es rechazada entonces el alcance es aceptado.

$$[\mathrm{M}(\neg\mathrm{C}^*\neg) = 0 \text{ y } \mathrm{M}(\mathrm{C}^*\neg) = 1] \Rightarrow \mathrm{M}(\mathrm{aC}^*\neg) = 1$$

RaAC*¬. *Rechazo del alcance y aceptación de la completez*: Si la determinabilidad entre la afirmación clásica y la negación alterna es aceptada y el alcance es rechazado entonces la negación alterna es aceptada.

$$[\mathrm{M}(\mathrm{aC}^*\neg) = 0 \text{ y } \mathrm{M}(\mathrm{C}^*\neg) = 1] \Rightarrow \mathrm{M}(\neg\mathrm{C}^*\neg) = 1$$

A¬C*¬. *Aceptación de la negación alterna en la completez*: Si la negación alterna es aceptada entonces la determinabilidad entre la afirmación clásica y la negación alterna es aceptada.

$$\mathrm{M}(\neg\mathrm{C}^*\neg) = 1 \Rightarrow \mathrm{M}(\mathrm{C}^*\neg) = 1$$

AaC*¬. *Aceptación del alcance en la completez*: Si el alcance es aceptado entonces la determinabilidad entre la afirmación clásica y la negación alterna es aceptada.

$$\text{M(aC*}\neg) = 1 \Rightarrow \text{M(C*}\neg) = 1$$

5.11 Proposición. *Reglas de iteración*

IA. *Iteración de la aceptación*: Sean n y k dos nodos asociados a una misma fórmula, si el nodo n es aceptado entonces el nodo k también es aceptado.

$$[\text{n asociado a } \beta, \text{ k asociado a } \beta, \text{ n} \neq \text{k y M(n)} = 1] \Rightarrow \text{M(k)} = 1.$$

IR. *Iteración del rechazo*: Sean n y k dos nodos asociados a una misma fórmula, si el nodo n es rechazado entonces el nodo k también es rechazado.

$$[\text{n asociado a } \beta, \text{ k asociado a } \beta, \text{ n} \neq \text{k y M(n)} = 0] \Rightarrow \text{M(k)} = 0.$$

5.12 Proposición. *Reglas para la doble marca*

OA-DM. *Opción de aceptación que genera doble marca*: Si al suponer que un nodo N está marcado con 1 y al aplicar las reglas para marcar nodos, se tiene como consecuencia marcas diferentes en algún par de nodos asociados a una misma fórmula, entonces el nodo N realmente está marcado con 0.

$$\text{Para cada nodo n, [M(n)} = 1 \Rightarrow \text{para algún nodo k, M(k)} = 1 \text{ y M(k)} = 0] \Rightarrow \text{M(n)} = 0.$$

OR-DM. *Opción de rechazo que genera doble marca:* Si al suponer que un nodo N está marcado con 0 y al aplicar las reglas para marcar nodos, se tiene como consecuencia marcas diferentes en algún par de nodos asociados a una misma fórmula, entonces el nodo N realmente está marcado con 1.

$$\text{Para cada nodo n, [M(n)} = 0 \Rightarrow \text{para algún nodo k, M(k)} = 1 \text{ y M(k)} = 0] \Rightarrow \text{M(n)} = 1.$$

RR-DM. *Rechazo de la raíz que genera doble marca*: Si en el árbol de la fórmula α se supone que la raíz está marcada con 0 y al aplicar las reglas para marcar nodos, se tiene como consecuencia marcas diferentes en algún par de nodos asociados a una misma fórmula, entonces la fórmula α es A-válida. En este caso se dice que el árbol es un *árbol mal marcado*.

Para m una función de marca, [M(R[α]) = 0 $\Rightarrow$ para algún nodo k, M(k) = 1 y M(k) = 0] $\Rightarrow$ α es A-válida.

5.13 Proposición. *Reglas de opciones para el condicional*

OAi-Ad$\rightarrow$. *Opción de aceptación a la izquierda que genera aceptación a la derecha en un condicional*: Si se supone que el hijo izquierdo de un condicional está marcado con 1 y al aplicar las reglas para marcar nodos, se tiene como consecuencia que el hijo derecho esté marcado con 1, entonces el condicional realmente está marcado con 1.

$$[\mathrm{M}(\mathrm{i}\rightarrow) = 1 \Rightarrow \mathrm{M}(\mathrm{d}\rightarrow) = 1] \Rightarrow \mathrm{M}(\rightarrow) = 1$$

ORd-Ri$\rightarrow$. *Opción de rechazo a la derecha que genera rechazo a la izquierda en un condicional*: Si se supone que el hijo derecho de un condicional está marcado con 0 y al aplicar las reglas para marcar nodos, se tiene como consecuencia que el hijo izquierdo esté marcado con 0, entonces el condicional realmente está marcado con 1.

$$[\mathrm{M}(\mathrm{d}\rightarrow) = 0 \Rightarrow \mathrm{M}(\mathrm{i}\rightarrow) = 0] \Rightarrow \mathrm{M}(\rightarrow) = 1$$

5.14 Proposición. *Reglas de opciones para la disyunción*

ORi-Ad$\vee$. *Opción de rechazo a la izquierda que genera aceptación a la derecha en una disyunción*: Si se supone que el hijo izquierdo de una disyunción está marcado con 0 y al aplicar las reglas para marcar nodos, se tiene como consecuencia que el hijo derecho esté marcado con 1, entonces la disyunción realmente está marcada con 1.

$$[\mathrm{M}(\mathrm{i}\vee) = 0 \Rightarrow \mathrm{M}(\mathrm{d}\vee) = 1] \Rightarrow \mathrm{M}(\vee) = 1$$

ORd-Ai∨. *Opción de rechazo a la derecha que genera aceptación a la izquierda en una disyunción*: Si se supone que el hijo derecho de una disyunción está marcado con 0 y al aplicar las reglas para marcar nodos, se tiene como consecuencia que el hijo izquierdo esté marcado con 1, entonces la disyunción realmente está marcada con 1.

$$[\mathrm{M}(\mathrm{d}\vee) = 0 \Rightarrow \mathrm{M}(\mathrm{i}\vee) = 1] \Rightarrow \mathrm{M}(\vee) = 1$$

6. Sistema deductivo para LB

El *sistema deductivo para* LB se obtiene al extender el cálculo proposicional clásico CL, con los siguientes axiomas para los nuevos operadores:

AxI+∼. $\mathrm{A}^{I+\sim} \leftrightarrow$[2] $(+\mathrm{A}\to\mathrm{A})$
AxC+∼. $\mathrm{A}^{C+\sim} \leftrightarrow (\mathrm{A}\to+\mathrm{A})$
AxI+¬. $\mathrm{A}^{I+\neg} \leftrightarrow (+\mathrm{A}\to\sim\neg\mathrm{A})$
AxC+¬. $\mathrm{A}^{C+\neg} \leftrightarrow (\sim\neg\mathrm{A}\to+\mathrm{A})$
AxI*¬. $\mathrm{A}^{I*\neg} \leftrightarrow (\neg\mathrm{A}\to\sim\mathrm{A})$
AxC*¬. $\mathrm{A}^{C*\neg} \leftrightarrow (\sim\mathrm{A}\to\neg\mathrm{A})$

Como única *regla de inferencia* se tiene el *Modus Ponens* MP: de A y A→B se infiere B, denotado A, A→B ⊢ B.
Se dice que una fórmula A es un *teorema de LB* (LB-teorema), denotado ⊢ A, si y solamente si A es la última fórmula de una sucesión finita de fórmulas, tales que cada una de ellas es un axioma o se infiere de dos fórmulas anteriores utilizando la regla de inferencia MP.

7. Semántica de valuaciones para LB

Una *LB-valuación* v es una función que interpreta las fórmulas atómicas de LB como elementos del conjunto {0, 1}. La LB-valuación v se extiende a una función V que interpreta las fórmulas de LB en el conjunto {0, 1} de la siguiente manera:

Si p es atómica entonces V(p) = v(p)
V∼. $\mathrm{V}(\sim\mathrm{A}) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{V}(\mathrm{A}) = 0$
V∧. $\mathrm{V}(\mathrm{A}\wedge\mathrm{B}) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{V}(\mathrm{A}) = 1$ y $\mathrm{V}(\mathrm{B}) = 1$
V∨. $\mathrm{V}(\mathrm{A}\vee\mathrm{B}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{V}(\mathrm{A}) = 0$ y $\mathrm{V}(\mathrm{B}) = 0$
V→. $\mathrm{V}(\mathrm{A}\to\mathrm{B}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{V}(\mathrm{A}) = 1$ y $\mathrm{V}(\mathrm{B}) = 0$
VI+∼. $\mathrm{V}(\mathrm{A}^{I+\sim}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{V}(+\mathrm{A}) = 1$ y $\mathrm{V}(\mathrm{A}) = 0$

[2] $\mathrm{A} \leftrightarrow \mathrm{B}$ se define como $(\mathrm{A} \to \mathrm{B}) \wedge (\mathrm{B} \to \mathrm{A})$.

VC+∼. $V(A^{C+\sim}) = 0 \Leftrightarrow V(+A) = 0$ y $V(A) = 1$
VI+¬. $V(A^{I+\neg}) = 0 \Leftrightarrow V(+A) = 1$ y $V(\neg A) = 1$
VC+¬. $V(A^{C+\neg}) = 0 \Leftrightarrow V(+A) = 0$ y $V(\neg A) = 0$
VI*¬. $V(A^{I*\neg}) = 0 \Leftrightarrow V(A) = 1$ y $V(\neg A) = 1$
VC*¬. $V(A^{C*\neg}) = 0 \Leftrightarrow V(A) = 0$ y $V(\neg A) = 0$.

Observar que una LB-valuación v se extiende a una función V, en lo que respecta a las fórmulas de la forma +A y ¬A, de una manera arbitraria, no hay restricciones. Por esta razón, las LB-valuaciones pueden ser definidas como funciones v del conjunto de *fórmulas cuasi-atómicas* en {0,1}, y al extender al conjunto de todas las fórmulas, se cambia la primera cláusula de la definición por: si p es *cuasi-atómica* entonces V(p) = v(p).
Se dice que una fórmula α es *LB-válida*, denotado $\vDash \alpha$, si y solamente si para toda LB-valuación v, $V(\alpha) = 1$.

7.1 Proposición. *Caracterización semántica de LB* Sea α es una fórmula de LB, α es LB-válida si y solo si α es LB-teorema. La prueba se encuentra en [6].

8. Equivalencia de las presentaciones de LB

Se define la *Complejidad* C, como una función la cual asigna a cada fórmula de LB un entero no negativo, de la siguiente forma:

C(p) = 0, donde p es una fórmula atómica.
$C(\alpha k\beta) = 1 +$ máximo de $\{C(\alpha), C(\beta)\}$, donde $k \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.
$C(k\alpha) = 1 + C(\alpha)$, donde $k \in \{+, \sim, \neg\}$.
$C(\alpha^k) = 2 + C(\alpha)$, donde $k \in \{I+\sim, I+\neg, I*\neg, C+\sim, C+\neg, C*\neg\}$.

Se define la *Profundidad* P, como una función la cual asigna a cada árbol un entero no negativo, de la siguiente forma:

P(p) = 0, donde p es una hoja.
$P(Ar[\alpha k\beta]) = 1 +$ máximo de $\{P(Ar[\alpha]), P(Ar[\beta])\}$, donde $k \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.
$P(Ar[k\alpha]) = 1 + P(Ar[\alpha])$, donde $k \in \{+, \sim, \neg\}$.
$P(Ar[\alpha^k]) = 2 + P(Ar[\alpha])$, donde $k \in \{I+\sim, I+\neg, I*\neg, C+\sim, C+\neg, C*\neg\}$.

8.1 Proposición. *Valuación asociada a una función de marca*
Para cada fórmula α de LB y para cada función de marca m, existe una valuación v_m de LB, tal que, $M(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow V_m(\alpha) = 1$.

Prueba: Sea α una fórmula de LB, y sea m una función de marcas para α. Se define la función v_m del conjunto de fórmulas atómicas en el conjunto $\{0, 1\}$ de la siguiente forma:

Si p es una hoja del árbol de α entonces $v_m(p) = m(p)$.
Si p no es una hoja del árbol de α entonces $v_m(p) = 1$[3].

La función v_m se extiende a una función V_m del conjunto de fórmulas de LB en el conjunto $\{0, 1\}$ de la siguiente forma:

Si p es atómica entonces $V_m(p) = v_m(p)$
V_m+. $V_m(+A) = 1 \Leftrightarrow M(R[+A]) = 1$
$V_m\neg$. $V_m(\neg A) = 1 \Leftrightarrow M(R[\neg A]) = 1$
$V_m \sim$. $V_m(\sim A) = 1 \Leftrightarrow V_m(A) = 0$
$V_m\wedge$. $V_m(A\wedge B) = 1 \Leftrightarrow V_m(A) = 1$ y $V_m(B) = 1$
$V_m\vee$. $V_m(A\vee B) = 0 \Leftrightarrow V_m(A) = 0$ y $V_m(B) = 0$
$V_m \rightarrow$. $V_m(A\rightarrow B) = 0 \Leftrightarrow V_m(A) = 1$ y $V_m(B) = 0$
V_mI+$\sim$. $V_m(A^{I+\sim}) = 0 \Leftrightarrow V_m(+A) = 1$ y $V_m(A) = 0$
V_mC+$\sim$. $V_m(A^{C+\sim}) = 0 \Leftrightarrow V_m(+A) = 0$ y $V_m(A) = 1$
V_mI+$\neg$. $V_m(A^{I+\neg}) = 0 \Leftrightarrow V_m(+A) = 1$ y $V_m(\neg A) = 1$
V_mC+$\neg$. $V_m(A^{C+\neg}) = 0 \Leftrightarrow V_m(+A) = 0$ y $V_m(\neg A) = 0$
V_mI*$\neg$. $V_m(A^{I*\neg}) = 0 \Leftrightarrow V_m(A) = 1$ y $V_m(\neg A) = 1$
V_mC*$\neg$. $V_m(A^{C*\neg}) = 0 \Leftrightarrow V_m(A) = 0$ y $V_m(\neg A) = 0$.

Se tiene entonces que V_m es una valuación de LB.
Para probar que $M(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow V_m(\alpha) = 1$, se procede por inducción sobre la complejidad de la fórmula α.

Paso base: Supóngase que la $C(\alpha) = 0$, esto significa que α es un enunciado atómico, y por lo tanto se tienen $R[\alpha] = \alpha$, $M(\alpha) = m(\alpha)$, $v_m(\alpha) = m(\alpha)$ y $V_m(\alpha) = v_m(\alpha)$. Se concluye entonces que $M(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow V_m(\alpha) = 1$.

Paso de inducción: Supóngase que $C(\alpha) = k \geq 1$.
Al ser $C(\alpha) \geq 1$, α debe ser una fórmula compuesta, es decir, α tiene una de las siguientes formas: $\beta\wedge \gamma$, $\beta \vee \gamma$, $\beta \rightarrow \gamma$, $+\gamma$, $\neg\gamma$, $\sim \beta$, $\beta^{I+\sim}$, $\beta^{C+\sim}$, $\beta^{I*\neg}$, $\beta^{C*\neg}$, $\beta^{I+\neg}$ o $\beta^{C+\neg}$. En cada uno de estos casos $C(\beta) < k$ y $C(\gamma) < k$, y por lo tanto aplica la hipótesis inductiva en los siguientes términos: $M(R[\beta]) = 1 \Leftrightarrow V_m(\beta) = 1$, y $M(R[\gamma]) = 1 \Leftrightarrow V_m(\gamma) = 1$. En los casos $\beta^{I+\sim}$, $\beta^{C+\sim}$, $\beta^{I+\neg}$ y $\beta^{C+\neg}$ aplica la hipótesis inductiva en los siguientes términos: $M(R[+\beta]) = 1 \Leftrightarrow V_m(+\beta) = 1$. En los casos $\beta^{I*\neg}$, $\beta^{C*\neg}$, $\beta^{I+\neg}$, y $\beta^{C+\neg}$ aplica la hipótesis inductiva en los siguientes términos: $M(R[\neg\beta]) = 1 \Leftrightarrow V_m(\neg\beta) = 1$.

[3] Podría ser $v_m(p) = 0$, es irrelevante.

Se analiza cada caso por separado.
Caso 1: Sea α de la forma $\beta \wedge \gamma$. Se tiene que R$[\alpha] = \wedge$, por lo que M(R$[\alpha]$) = 1 $\Leftrightarrow$ M($\wedge$) = 1, pero por A$\wedge$ se tiene M($\wedge$) = 1 $\Leftrightarrow$ [M(i$\wedge$) = 1 y M(d$\wedge$) = 1], y como además i$\wedge$ = R$[\beta]$ y d$\wedge$ = R$[\gamma]$, resulta que M(R$[\alpha]$) = 1 $\Leftrightarrow$ [M(R$[\beta]$) = 1 y M(R$[\gamma]$) = 1]. Utilizando la hipótesis inductiva se tiene que M(R$[\alpha]$) = 1 $\Leftrightarrow$ [V$_m(\beta)$ = 1 y V$_m(\gamma)$ = 1]. Por la definición de V$_m\wedge$ se concluye que M(R$[\alpha]$) = 1 $\Leftrightarrow$ V$_m(\beta \wedge \gamma)$ = 1, es decir, M(R$[\alpha]$) = 1 $\Leftrightarrow$ V$_m(\alpha)$ = 1.

Caso 2: Sea α de la forma $\beta \vee \gamma$. Se tiene que R$[\alpha] = \vee$, por lo que M(R$[\alpha]$) = 0 $\Leftrightarrow$ M($\vee$) = 0, pero por R$\vee$ se tiene M($\vee$) = 0 $\Leftrightarrow$ [M(i$\vee$) = 0 y M(d$\vee$) = 0], y como además i$\vee$ = R$[\beta]$ y d$\vee$ = R$[\gamma]$, resulta que M(R$[\alpha]$) = 0 $\Leftrightarrow$ [M(R$[\beta]$) = 0 y M(R$[\gamma]$) = 0]. Utilizando la hipótesis inductiva se tiene que M(R$[\alpha]$) = 0 $\Leftrightarrow$ [V$_m(\beta)$ = 0 y V$_m(\gamma)$ = 0]. Por la definición de V$_m\vee$ se concluye que M(R$[\alpha]$) = 0 $\Leftrightarrow$ V$_m(\beta \vee \gamma)$ = 0, es decir, M(R$[\alpha]$) = 1 $\Leftrightarrow$ V$_m(\alpha)$ = 1.

Caso 3: Sea α de la forma $\beta \to \gamma$. Se tiene que R$[\alpha] = \to$, por lo que M(R$[\alpha]$) = 0 $\Leftrightarrow$ M($\to$) = 0, pero por R$\to$ se tiene M($\to$) = 0 $\Leftrightarrow$ [M(i$\to$) = 1 y M(d$\to$) = 0], y como además i$\to$ = R$[\beta]$ y d$\to$ = R$[\gamma]$, resulta que M(R$[\alpha]$) = 0 $\Leftrightarrow$ [M(R$[\beta]$) = 1 y M(R$[\gamma]$) = 0]. Utilizando la hipótesis inductiva se tiene que M(R$[\alpha]$) = 0 $\Leftrightarrow$ [V$_m(\beta)$ = 1 y V$_m(\gamma)$ = 0]. Por la definición de V$_m$ $\to$ se concluye que M(R$[\alpha]$) = 0 $\Leftrightarrow$ V$_m(\beta \to \gamma)$ = 0, es decir, M(R$[\alpha]$) = 1 $\Leftrightarrow$ V$_m(\alpha)$ = 1.

Caso 4: Sea α de la forma $+\beta$ o de la forma $\neg\beta$. Por las definiciones de V$_m+$ y V$_m\neg$ se tiene que M(R$[+\beta]$) = 1 $\Leftrightarrow$ V$_m(+\beta)$ = 1, y M(R$[\neg\beta]$) = 1 $\Leftrightarrow$ V$_m(\neg\beta)$ = 1.

Caso 5: Sea α de la forma $\sim \beta$. Se tiene que R$[\alpha] = \sim$, por lo que M(R$[\alpha]$) = 1 $\Leftrightarrow$ M($\sim$) = 1, pero por A$\sim$ se tiene M($\sim$) = 1 $\Leftrightarrow$ M(a$\sim$) = 0, y como además a$\sim$ = R$[\beta]$, resulta que M(R$[\alpha]$) = 1 $\Leftrightarrow$ [M(R$[\beta]$) = 0]. Utilizando la hipótesis inductiva se tiene que M(R$[\alpha]$) = 1 $\Leftrightarrow$ V$_m(\beta)$ = 0. Por la definición de V$_m$ $\sim$ se concluye que M(R$[\alpha]$) = 1 $\Leftrightarrow$ V$_m(\sim \beta)$ = 1, es decir, M(R$[\alpha]$) = 1 $\Leftrightarrow$ V$_m(\alpha)$ = 1.

Caso 6: Sea α de la forma $\beta^{I+\neg}$. Se tiene que R$[\alpha]$ = I+$\neg$, por lo que M(R$[\alpha]$) = 0 $\Leftrightarrow$ M(I+$\neg$) = 0, pero por RI+$\neg$ se tiene M(I+$\neg$) = 0 $\Leftrightarrow$ [M(+I+$\neg$) = 1 y M($\neg$I+$\neg$) = 1], y como además +I+$\neg$ = R$[+\beta]$ y $\neg$I+$\neg$ = R$[\neg\beta]$, resulta que M(R$[\alpha]$) = 0 $\Leftrightarrow$ [M(R$[+\beta]$) = 1 y M(R$[\neg\beta]$) = 1]. Utilizando la hipótesis inductiva se tiene que M(R$[\alpha]$) = 0 $\Leftrightarrow$ [V$_m(+\beta)$ = 1 y V$_m(\neg\beta)$ = 1]. Por la definición de V$_m$I+$\neg$ se concluye que M(R$[\alpha]$) = 0 $\Leftrightarrow$ V$_m(\beta^{I+\neg})$ = 0, es decir, M(R$[\alpha]$) = 1 $\Leftrightarrow$ V$_m(\alpha)$ = 1.

Caso 7: Sea α de la forma $\beta^{C+\neg}$. Se tiene que R$[\alpha]$ = C+$\neg$, por lo que M(R$[\alpha]$) = 0 $\Leftrightarrow$ M(C+$\neg$) = 0, pero por RC+$\neg$ se tiene M(C+$\neg$) = 0 $\Leftrightarrow$ [M(+C+$\neg$) = 0 y M($\neg$C+$\neg$) = 0], y como además +C+$\neg$ = R$[+\beta]$ y $\neg$C+$\neg$ = R$[\neg\beta]$, resulta que M(R$[\alpha]$) = 0 $\Leftrightarrow$ [M(R$[+\beta]$) = 0 y M(R$[\neg\beta]$) = 0]. Utilizando la hipótesis inductiva se tiene que M(R$[\alpha]$) = 0 $\Leftrightarrow$ [V$_m(+\beta)$ = 0 y V$_m(\neg\beta)$ = 0]. Por la definición de V_mC+¬ se concluye que M(R[α]) = 0 $\Leftrightarrow$ $V_m(\beta^{C+\neg})$ = 0, es decir, M(R[α]) = 1 $\Leftrightarrow$ $V_m(\alpha)$ = 1.

Caso 8: Sea α de la forma $\beta^{I+\sim}$. Se tiene que R[α] = I+$\sim$, por lo que M(R[α]) = 0 $\Leftrightarrow$ M(I+$\sim$) = 0, pero por RI+$\sim$ se tiene M(I+$\sim$) = 0 $\Leftrightarrow$ [M(+I+$\sim$) = 1 y M(aI+$\sim$) = 0], y como además +I+$\sim$ = R[+β] y aI+$\sim$ = R[β], resulta que M(R[α]) = 0 $\Leftrightarrow$ [M(R[+β]) = 1 y M(R[β]) = 0]. Utilizando la hipótesis inductiva se tiene que M(R[α]) = 0 $\Leftrightarrow$ [$V_m(+\beta)$ = 1 y $V_m(\beta)$ = 0]. Por la definición de V_mI+$\sim$ se concluye que M(R[α]) = 0 $\Leftrightarrow$ $V_m(\beta^{I+\sim})$ = 0, es decir, M(R[α]) = 1 $\Leftrightarrow$ $V_m(\alpha)$ = 1.

Caso 9: Sea α de la forma $\beta^{C+\sim}$. Se tiene que R[α] = C+$\sim$, por lo que M(R[α]) = 0 $\Leftrightarrow$ M(C+$\sim$) = 0, pero por RC+$\sim$ se tiene M(C+$\sim$) = 0 $\Leftrightarrow$ [M(+C+$\sim$) = 0 y M(aC+$\sim$) = 1], y como además +C+$\sim$ = R[+β] y aC+$\sim$ = R[β], resulta que M(R[α]) = 0 $\Leftrightarrow$ [M(R[+β]) = 0 y M(R[β]) = 1]. Utilizando la hipótesis inductiva se tiene que M(R[α]) = 0 $\Leftrightarrow$ [$V_m(+\beta)$ = 0 y $V_m(\beta)$ = 1]. Por la definición de V_mC+$\sim$ se concluye que M(R[α]) = 0 $\Leftrightarrow$ $V_m(\beta^{C+\neg})$ = 0, es decir, M(R[α]) = 1 $\Leftrightarrow$ $V_m(\alpha)$ = 1.

Caso 10: Sea α de la forma $\beta^{I*\neg}$. Se tiene que R[α] = I*¬, por lo que M(R[α]) = 0 $\Leftrightarrow$ M(I*¬) = 0, pero por RI*¬ se tiene M(I*¬) = 0 $\Leftrightarrow$ [M(aI*¬) = 1 y M(¬I*¬) = 1], y como además aI*¬ = R[β] y ¬I*¬ = R[¬β], resulta que M(R[α]) = 0 $\Leftrightarrow$ [M(R[β]) = 1 y M(R[¬β]) = 1]. Utilizando la hipótesis inductiva se tiene que M(R[α]) = 0 $\Leftrightarrow$ [$V_m(\beta)$ = 1 y $V_m(\neg\beta)$ = 1]. Por la definición de V_mI*¬ se concluye que M(R[α]) = 0 $\Leftrightarrow$ $V_m(\beta^{I*\neg})$ = 0, es decir, M(R[α]) = 1 $\Leftrightarrow$ $V_m(\alpha)$ = 1.

Caso 11: Sea α de la forma $\beta^{C*\neg}$. Se tiene que R[α] = C*¬, por lo que M(R[α]) = 0 $\Leftrightarrow$ M(C*¬) = 0, pero por RC*¬ se tiene M(C*¬) = 0 $\Leftrightarrow$ [M(aC*¬) = 0 y M(¬C*¬) = 0], y como además aC*¬ = R[β] y ¬C*¬ = R[¬β], resulta que M(R[α]) = 0 $\Leftrightarrow$ [M(R[β]) = 0 y M(R[¬β]) = 0]. Utilizando la hipótesis inductiva se tiene que M(R[α]) = 0 $\Leftrightarrow$ [$V_m(\beta)$ = 0 y $V_m(\neg\beta)$ = 0]. Por la definición de V_mC*¬ se concluye que M(R[α]) = 0 $\Leftrightarrow$ $V_m(\beta^{C*\neg})$ = 0, es decir, M(R[α]) = 1 $\Leftrightarrow$ $V_m(\alpha)$ = 1.

Se tiene entonces que para todos los casos M(R[α]) = 1 $\Leftrightarrow$ $V_m(\alpha)$ = 1, quedando así probado el paso de inducción.

Por el principio de inducción se concluye que: M(R[α]) = 1 $\Leftrightarrow$ $V_m(\alpha)$ = 1.

Se ha probado entonces que para cada fórmula α de LB y para cada función de marca m, existe una valuación v_m de LB, tal que, M(R[α]) = 1 $\Leftrightarrow$ $V_m(\alpha)$ = 1.

8.2 Proposición. *Función de marca asociada a una valuación*

Para cada fórmula α de LB y para cada valuación v de LB, existe una función de marca m_v, tal que, M_v(R[α]) = 1 $\Leftrightarrow$ V(α) = 1.

Prueba: Sea α una fórmula de LB y sea v una valuación de LB. Se define la función de marca m_v del conjunto de hojas del árbol de α en el conjunto {0, 1} de la siguiente forma:

Si p es atómica entonces $\mathrm{m}_v(\mathrm{p}) = \mathrm{v}(\mathrm{p})$.

La función m_v se extiende a una función M_v del conjunto de nodos del árbol de α en el conjunto $\{0, 1\}$ de la siguiente forma:

Si p es una hoja entonces $\mathrm{M}_v(\mathrm{p}) = \mathrm{m}_v(\mathrm{p})$
M_v+. Si $+ = \mathrm{R}[+\beta]$ entonces $\mathrm{M}_v(+) = \mathrm{V}(+\beta)$
$\mathrm{M}_v\neg$. Si $\neg = \mathrm{R}[\neg\beta]$ entonces $\mathrm{M}_v(\neg) = \mathrm{V}(\neg\beta)$
$\mathrm{M}_v\wedge$. $\mathrm{M}_v(\wedge) = 1 \Leftrightarrow [\mathrm{M}_v(\mathrm{i}\wedge) = 1$ y $\mathrm{M}_v(\mathrm{d}\wedge) = 1]$
$\mathrm{M}_v\vee$. $\mathrm{M}_v(\vee) = 0 \Leftrightarrow [\mathrm{M}_v(\mathrm{i}\vee) = 0$ y $\mathrm{M}_v(\mathrm{d}\vee) = 0]$
$\mathrm{M}_v \rightarrow$. $\mathrm{M}_v(\rightarrow) = 0 \Leftrightarrow [\mathrm{M}_v(\mathrm{i}\rightarrow) = 1$ y $\mathrm{M}_v(\mathrm{d}\rightarrow) = 0]$
$\mathrm{M}_v \sim$. $\mathrm{M}_v(\sim) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{M}_v(\mathrm{a}\sim) = 0$
$\mathrm{M}_v\mathrm{I}+\neg$. $\mathrm{M}_v(\mathrm{I}+\neg) = 0 \Leftrightarrow [\mathrm{M}_v(+\mathrm{I}+\neg) = 1$ y $\mathrm{M}_v(\neg\mathrm{I}+\neg) = 1]$
$\mathrm{M}_v\mathrm{C}+\neg$. $\mathrm{M}_v(\mathrm{C}+\neg) = 0 \Leftrightarrow [\mathrm{M}_v(+\mathrm{C}+\neg) = 0$ y $\mathrm{M}_v(\neg\mathrm{C}+\neg) = 0]$
$\mathrm{M}_v\mathrm{I}+\sim$. $\mathrm{M}_v(\mathrm{I}+\sim) = 0 \Leftrightarrow [\mathrm{M}_v(+\mathrm{I}+\sim) = 1$ y $\mathrm{M}_v(\mathrm{aI}+\sim) = 0]$
$\mathrm{M}_v\mathrm{C}+\sim$. $\mathrm{M}_v(\mathrm{C}+\sim) = 0 \Leftrightarrow [\mathrm{M}_v(+\mathrm{C}+\sim) = 0$ y $\mathrm{M}_v(\mathrm{aC}+\sim) = 1]$
$\mathrm{M}_v\mathrm{I}^*\neg$. $\mathrm{M}_v(\mathrm{I}^*\neg) = 0 \Leftrightarrow [\mathrm{M}_v(\neg\mathrm{I}^*\neg) = 1$ y $\mathrm{M}_v(\mathrm{aI}^*\neg) = 1]$
$\mathrm{M}_v\mathrm{C}^*\neg$. $\mathrm{M}_v(\mathrm{C}^*\neg) = 0 \Leftrightarrow [\mathrm{M}_v(\neg\mathrm{C}^*\neg) = 0$ y $\mathrm{M}_v(\mathrm{aC}^*\neg) = 0]$.

Se tiene entonces que M_v es una función de marca de nodos.
Para probar que $\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{V}(\alpha) = 1$, se procede por inducción sobre la profundidad de $\mathrm{Ar}[\alpha]$.

Paso base: Supóngase que $\mathrm{P}(\mathrm{Ar}[\alpha]) = 0$, esto significa que α es una hoja, y por lo tanto se tienen $\mathrm{R}[\alpha] = \alpha$, $\mathrm{M}_v(\alpha) = \mathrm{m}_v(\alpha)$, $\mathrm{m}_v(\alpha) = \mathrm{v}(\alpha)$ y $\mathrm{v}(\alpha) = \mathrm{V}(\alpha)$. Se concluye entonces que $\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{V}(\alpha) = 1$.

Paso de inducción: Supóngase que $\mathrm{P}(\mathrm{Ar}[\alpha]) = \mathrm{k} \geq 1$.
Al ser $\mathrm{P}(\mathrm{Ar}[\alpha]) \geq 1$, α debe ser una fórmula compuesta, es decir, α tiene una de las siguientes formas: $\beta \wedge \gamma$, $\beta \vee \gamma$, $\beta \rightarrow \gamma$, $+\gamma$, $\neg\gamma$, $\sim \beta$, $\beta^{I+\sim}$, $\beta^{C+\sim}$, $\beta^{I*\neg}$, $\beta^{C*\neg}$, $\beta^{I+\neg}$ o $\beta^{C+\neg}$. En cada uno de estos casos $\mathrm{P}(\mathrm{Ar}[\beta]) < \mathrm{k}$ y $\mathrm{P}(\mathrm{Ar}[\gamma]) < \mathrm{k}$, y por lo tanto aplica la hipótesis inductiva en los siguientes términos: $\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\beta]) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{V}(\beta) = 1$, y $\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\gamma]) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{V}(\gamma) = 1$. En los casos $\beta^{I+\sim}$, $\beta^{C+\sim}$, $\beta^{I+\neg}$ y $\beta^{C+\neg}$ aplica la hipótesis inductiva en los siguientes términos: $\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[+\beta]) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{V}(+\beta) = 1$. En los casos $\beta^{I*\neg}$, $\beta^{C*\neg}$, $\beta^{I+\neg}$, y $\beta^{C+\neg}$ aplica la hipótesis inductiva en los siguientes términos: $\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\neg\beta]) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{V}(\neg\beta) = 1$.
Se analiza cada caso por separado.

Caso 1: Sea α de la forma $\beta \wedge \gamma$. Se tiene que $\mathrm{R}[\alpha] = \wedge$, por lo que $\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{M}_v(\wedge) = 1$, pero por $\mathrm{M}_v\wedge$ se tiene $\mathrm{M}_v(\wedge) = 1 \Leftrightarrow [\mathrm{M}_v(\mathrm{i}\wedge) = 1$ y $\mathrm{M}_v(\mathrm{d}\wedge) = 1]$, y como además $\mathrm{i}\wedge = \mathrm{R}[\beta]$ y $\mathrm{d}\wedge = \mathrm{R}[\gamma]$, resulta que $\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow [\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\beta]) = 1$ y $\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\gamma]) = 1]$. Utilizando la hipótesis inductiva se tiene que $\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow [\mathrm{V}(\beta) = 1$ y $\mathrm{V}(\gamma) = 1]$. Por la definición de $\mathrm{V}\wedge$ se concluye que $\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{V}(\beta \wedge \gamma) = 1$, es decir, $\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{V}(\alpha) = 1$.

Caso 2: Sea α de la forma $\beta \vee \gamma$. Se tiene que $\mathrm{R}[\alpha] = \vee$, por lo que $\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{M}_v(\vee) = 0$, pero por $\mathrm{M}_v\vee$ se tiene $\mathrm{M}_v(\vee) = 0 \Leftrightarrow [\mathrm{M}_v(\mathrm{i}\vee) = 0$ y $\mathrm{M}_v(\mathrm{d}\vee) = 0]$, y como además $\mathrm{i}\vee = \mathrm{R}[\beta]$ y $\mathrm{d}\vee = \mathrm{R}[\gamma]$, resulta que $\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow [\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\beta]) = 0$ y $\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\gamma]) = 0]$. Utilizando la hipótesis inductiva se tiene que $\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow [\mathrm{V}(\beta) = 0$ y $\mathrm{V}(\gamma) = 0]$. Por la definición de $\mathrm{V}\vee$ se concluye que $\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{V}(\beta \vee \gamma) = 0$, es decir, $\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{V}(\alpha) = 1$.

Caso 3: Sea α de la forma $\beta \to \gamma$. Se tiene que $\mathrm{R}[\alpha] = \to$, por lo que $\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{M}_v(\to) = 0$, pero por $\mathrm{M}_v\to$ se tiene $\mathrm{M}_v(\to) = 0 \Leftrightarrow [\mathrm{M}_v(\mathrm{i}\to) = 1$ y $\mathrm{M}_v(\mathrm{d}\to) = 0]$, y como además $\mathrm{i}\to = \mathrm{R}[\beta]$ y $\mathrm{d}\to = \mathrm{R}[\gamma]$, resulta que $\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow [\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\beta]) = 1$ y $\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\gamma]) = 0]$. Utilizando la hipótesis inductiva se tiene que $\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow [\mathrm{V}(\beta) = 1$ y $\mathrm{V}(\gamma) = 0]$. Por la definición de $\mathrm{V}\to$ se concluye que $\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{V}(\beta \to \gamma) = 0$, es decir, $\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{V}(\alpha) = 1$.

Caso 4: Sea α de la forma $+\beta$ o de la forma $\neg\beta$. Por las definiciones de M_v+ y $\mathrm{M}_v\neg$ se tiene que $\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[+\beta]) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{V}(+\beta) = 1$, y $\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\neg\beta]) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{V}(\neg\beta) = 1$.

Caso 5: Sea α de la forma $\sim \beta$. Se tiene que $\mathrm{R}[\alpha] = \sim$, por lo que $\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{M}_v(\sim) = 1$, pero por $\mathrm{M}_v\sim$ se tiene $\mathrm{M}_v(\sim) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{M}_v(\mathrm{a}\sim) = 0$, y como además $\mathrm{a}\sim = \mathrm{R}[\beta]$, resulta que $\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\beta]) = 0$. Utilizando la hipótesis inductiva se tiene que $\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{V}(\beta) = 0$. Por la definición de $\mathrm{V}\sim$ se concluye que $\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{V}(\sim \beta) = 1$, es decir, $\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{V}(\alpha) = 1$.

Caso 6: Sea α de la forma $\beta^{I+\neg}$. Se tiene que $\mathrm{R}[\alpha] = \mathrm{I}{+}\neg$, por lo que $\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{M}_v(\mathrm{I}{+}\neg) = 0$, pero por $\mathrm{M}_v\mathrm{I}{+}\neg$ se tiene $\mathrm{M}_v(\mathrm{I}{+}\neg) = 0 \Leftrightarrow [\mathrm{M}_v({+}\mathrm{I}{+}\neg) = 1$ y $\mathrm{M}_v(\neg\mathrm{I}{+}\neg) = 1]$, y como además ${+}\mathrm{I}{+}\neg = \mathrm{R}[+\beta]$ y $\neg\mathrm{I}{+}\neg = \mathrm{R}[\neg\beta]$, resulta que $\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow [\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[+\beta]) = 1$ y $\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\neg\beta]) = 1]$. Utilizando la hipótesis inductiva se tiene que $\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow [\mathrm{V}(+\beta) = 1$ y $\mathrm{V}(\neg\beta) = 1]$. Por la definición de $\mathrm{VI}{+}\neg$ se concluye que $\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{V}(\beta^{I+\neg}) = 0$, es decir, $\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{V}(\alpha) = 1$.

Caso 7: Sea α de la forma $\beta^{C+\neg}$. Se tiene que $\mathrm{R}[\alpha] = \mathrm{C}{+}\neg$, por lo que $\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{M}_v(\mathrm{C}{+}\neg) = 0$, pero por $\mathrm{M}_v\mathrm{C}{+}\neg$ se tiene $\mathrm{M}_v(\mathrm{C}{+}\neg) = 0 \Leftrightarrow [\mathrm{M}_v({+}\mathrm{C}{+}\neg) = 0$ y $\mathrm{M}_v(\neg\mathrm{C}{+}\neg) = 0]$, y como además ${+}\mathrm{C}{+}\neg = \mathrm{R}[+\beta]$ y $\neg\mathrm{C}{+}\neg = \mathrm{R}[\neg\beta]$, resulta que $\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow [\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[+\beta]) = 0$ y $\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\neg\beta]) = 0]$. Utilizando la hipótesis inductiva se tiene que $\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow [\mathrm{V}(+\beta) = 0$ y $\mathrm{V}(\neg\beta) = 0]$. Por la definición de $\mathrm{VC}{+}\neg$ se concluye que $\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{V}(\beta^{C+\neg}) = 0$, es decir, $\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{V}(\alpha) = 1$.

Caso 8: Sea α de la forma $\beta^{I+\sim}$. Se tiene que $\mathrm{R}[\alpha] = \mathrm{I}{+}\sim$, por lo que $\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{M}_v(\mathrm{I}{+}\sim) = 0$, pero por $\mathrm{M}_v\mathrm{I}{+}\sim$ se tiene $\mathrm{M}_v(\mathrm{I}{+}\sim) = 0 \Leftrightarrow [\mathrm{M}_v({+}\mathrm{I}{+}\sim) = 1$ y $\mathrm{M}_v(\mathrm{aI}{+}\sim) = 0]$, y como además ${+}\mathrm{I}{+}\sim = \mathrm{R}[+\beta]$ y $\mathrm{aI}{+}\sim = \mathrm{R}[\beta]$, resulta que $\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow [\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[+\beta]) = 1$ y $\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\beta]) = 0]$. Utilizando la hipótesis inductiva se tiene que $\mathrm{M}_v(\mathrm{R}[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow [\mathrm{V}(+\beta) = 1$ y $\mathrm{V}(\beta) = 0]$. Por la definición de VI+∼ se concluye que $M_v(R[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow V(\beta^{I+\sim}) = 0$, es decir, $M_v(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow V(\alpha) = 1$.

Caso 9: Sea α de la forma $\beta^{C+\sim}$. Se tiene que $R[\alpha] = C{+}\sim$, por lo que $M_v(R[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow M_v(C{+}\sim) = 0$, pero por $M_v C{+}\sim$ se tiene $M_v(C{+}\sim) = 0 \Leftrightarrow [M_v({+}C{+}\sim) = 0$ y $M_v(aC{+}\sim) = 1]$, y como además ${+}C{+}\sim = R[+\beta]$ y $aC{+}\sim = R[\beta]$, resulta que $M_v(R[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow [M_v(R[+\beta]) = 0$ y $M_v(R[\beta]) = 1]$. Utilizando la hipótesis inductiva se tiene que $M_v(R[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow [V(+\beta) = 0$ y $V(\beta) = 1]$. Por la definición de VC+∼ se concluye que $M_v(R[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow V(\beta^{C+\sim}) = 0$, es decir, $M_v(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow V(\alpha) = 1$.

Caso 10: Sea α de la forma $\beta^{I*\neg}$. Se tiene que $R[\alpha] = I{*}\neg$, por lo que $M_v(R[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow M_v(I{*}\neg) = 0$, pero por $M_v I{*}\neg$ se tiene $M_v(I{*}\neg) = 0 \Leftrightarrow [M_v(aI{*}\neg) = 1$ y $M_v(\neg I{*}\neg) = 1]$, y como además $aI{*}\neg = R[\beta]$ y $\neg I{*}\neg = R[\neg\beta]$, resulta que $M_v(R[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow [M_v(R[\beta]) = 1$ y $M_v(R[\neg\beta]) = 1]$. Utilizando la hipótesis inductiva se tiene que $M_v(R[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow [V(\beta) = 1$ y $V(\neg\beta) = 1]$. Por la definición de VI*¬ se concluye que $M_v(R[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow V(\beta^{I*\neg}) = 0$, es decir, $M_v(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow V(\alpha) = 1$.

Caso 11: Sea α de la forma $\beta^{C*\neg}$. Se tiene que $R[\alpha] = C{*}\neg$, por lo que $M_v(R[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow M_v(C{*}\neg) = 0$, pero por $M_v C{*}\neg$ se tiene $M_v(C{*}\neg) = 0 \Leftrightarrow [M_v(aC{*}\neg) = 0$ y $M_v(\neg C{*}\neg) = 0]$, y como además $aC{*}\neg = R[\beta]$ y $\neg C{*}\neg = R[\neg\beta]$, resulta que $M_v(R[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow [M_v(R[\beta]) = 0$ y $M_v(R[\neg\beta]) = 0]$. Utilizando la hipótesis inductiva se tiene que $M_v(R[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow [V(\beta) = 0$ y $V(\neg\beta) = 0]$. Por la definición de VC*¬ se concluye que $M_v(R[\alpha]) = 0 \Leftrightarrow V(\beta^{C*\neg}) = 0$, es decir, $M_v(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow V(\alpha) = 1$.

Se tiene entonces que para todos los casos $M_v(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow V(\alpha) = 1$, quedando así probado el paso de inducción.
Por el principio de inducción se concluye que: $M_v(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow V(\alpha) = 1$.
Se ha probado entonces que para cada fórmula α de LB y para cada valuación v de LB, existe una función de marca m_v, tal que, $M_v(R[\alpha]) = 1 \Leftrightarrow V(\alpha) = 1$.

8.3 Proposición. *Caracterización semántica y deductiva de los árboles de forzamiento*
Para cada fórmula α de LB, se tienen:
α es válida desde el punto de vista de los árboles si y solamente si α es válida desde el punto de vista de las valuaciones.

$$\vDash \alpha \Leftrightarrow \vDash_A \alpha$$

α es válida desde el punto de vista de los árboles si y solamente si α es un teorema del sistema deductivo para LB.

$$\vdash \alpha \Leftrightarrow \vDash_A \alpha.$$

Prueba: Supóngase que α no es válida desde el punto de vista de los árboles, entonces existe una función de marca m, tal que $M(R[\alpha]) = 0$. Se tiene entonces

que existe una LB-valuación v_m, tal que $V_m(\alpha) = 0$, y por lo tanto, α no puede ser válida desde el punto de vista de las valuaciones.
Supóngase ahora que α no es válida desde el punto de vista de las valuaciones, entonces existe una LB-valuación v, tal que $V(\alpha) = 0$. Se tiene entonces que existe una función de marca m_v, tal que $M_v(R[\alpha]) = 0$, y por lo tanto, α no puede ser válida desde el punto de vista de los árboles.
Se concluye así que α es válida desde el punto de vista de los árboles si y solamente si α es válida desde el punto de vista de las valuaciones. Como las LB-valuaciones caracterizan el sistema deductivo para LB, entonces se tiene también que, α es válida desde el punto de vista de los árboles si y solamente si α es un teorema del sistema deductivo para LB.

9. Ilustraciones

En la figura 1 se muestra un árbol de forzamiento mal marcado para la fórmula A-válida $(A^{C+\neg} \wedge B^{I*\neg}) \rightarrow ((\sim+A \wedge\neg B) \rightarrow\sim (\sim \neg A \vee B))$. Un *nodo en un círculo* indica que el nodo está marcado con 1, un *nodo en un cuadro* indica que el nodo está marcado con 0. En el paso 1 el cuadro punteado indica que la marca no se infiere, es una opción, en este caso opción de rechazo.

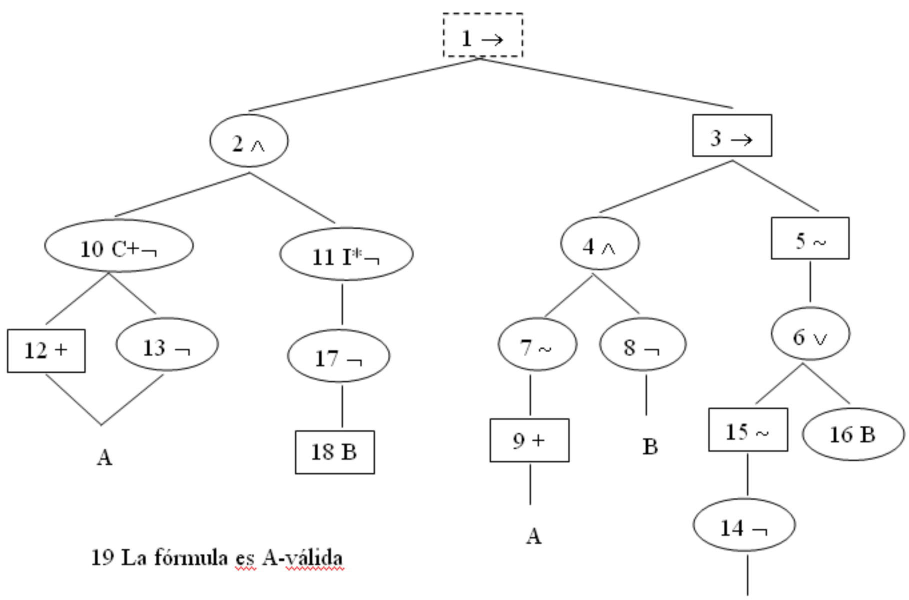


Figura 1

Justificaciones

1. OR	2, 3. R→ en 1	4, 5. R→ en 3
6. R∼ en 5	7, 8. A∧ en 4	9. A∼ en 7
10, 11. A∧ en 2	12. IR en 9	13. R+AC+¬ en 12 y 10
14. IA en 13	15. Aa∼ en 14	16. RiA∨ en 15 y 6
17. IA en 8	18. A¬AI*¬ en 17 y 11	19. RR-DM en 1, 16 y 18.

El método que se acaba de ilustrar, iniciando con la opción de rechazo de la raíz del árbol, es muy útil. Por esta razón, y gracias a la regla RR-DM, se suele introducir la regla RR, *rechazo de la raíz*, como primitiva, y se dice que *una fórmula es A-válida si y solo si se genera doble marca* (un par de nodos asociados a un mismo enunciado los cuales tienen marcas diferentes).
En la figura 2 se muestra un árbol de forzamiento bien marcado para la fórmula A-inválida $(A^{C+\neg} \wedge A^{I*\neg}) \rightarrow ((\sim +A \wedge \neg B) \rightarrow \sim (\sim \neg A \vee B))$.

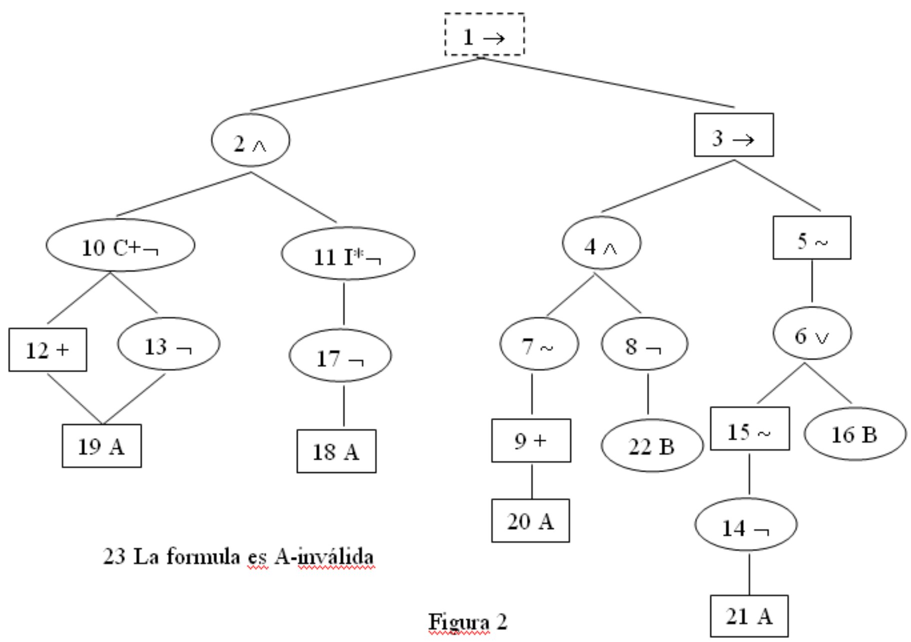


Figura 2

Justificaciones

1. OR	2, 3. R→ en 1	4, 5. R→ en 3
6. R∼ en 5	7, 8. A∧ en 4	9. A∼ en 7
10, 11. A∧ en 2	12. IR en 9	13. R+AC+¬ en 12 y 10
14. IA en 13	15. Aa∼ en 14	16. RiA∨ en 15 y 6
17. IA en 14	18. A¬AI*¬ en 17 y 11	19, 20, 21. IR en 18
22. IA en 16	23. ABM	

Observar que las *marcas de los nodos asociados a las fórmulas cuasi-atómicas* determinan una valuación que refuta a la fórmula analizada: v(A) = 0, v(+A) = 0, v(¬A) = 1, v(B) = 1, v(+B) = arbitrario y v(¬B) = 1.

10. Conclusiones

Los árboles de forzamiento semántico presentados son una herramienta de inferencia visual, la cual permite determinar la validez de una fórmula de manera completamente mecánica, por ejemplo recorriendo el árbol de la fórmula de cierta manera y en cada nodo buscando la aplicación de una regla para marcar nodos. Cuando una fórmula es inválida, lo cual se concluye si el árbol de la fórmula está bien marcado, entonces la lectura de las marcas de los nodos asociados a las fórmulas cuasi-atómicas proporciona una valuación que refuta la validez de la fórmula. Cuando una fórmula es válida, lo cual se concluye si el árbol está mal marcado o si la raíz forzosamente está marcada con 1, entonces es posible construir una deducción formal con la cual se prueba que la fórmula asociada a la raíz del árbol es un teorema; para lograr esto se cambia cada regla para el forzamiento de marcas por la regla deductiva a la que está asociada.
Los comentarios anteriores sumados a la naturalidad de las reglas para el forzamiento de marcas, hacen de los árboles de forzamiento en el sentido formal y pedagógico una herramienta de trabajo bien interesante.

Referencias

[1] E. Beth, *Formal methods, an introduction to symbolic logic and to the study of effective operations in arithmetic and logic*. Dordrecht, Reidel, 1962.

[2] W. Carnielli y J. Marcos, *A Taxonomy of C-Systems*. En Paraconsistency - the Logical Way to the Inconsistent. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, **228**, Ed. Marcel Dekker, New Cork, 2002.

[3] N. Da Costa, *Inconsistent Formal Systems*. Editora UFPR, Curitiba, 1993.

[4] G. Hughes y M. Cresswell, *An Introduction to Modal Logic*. Ed Methuen, Londres, 1968.

[5] I. D'Ottaviano y N. da Costa, *Sur un problème de Jaskowski*. C. R. Acad. Sc. París, 270, série A. París 1970.

[6] M. Sierra, *Lógica Básica con Afirmación y Negación Alternas*. Revista U. EAFIT, No 138, Medellín, 2005.

[7] M. Sierra, *Lógica Básica Paraconsistente y Paracompleta y algunas de sus Extensiones*. Revista Universidad EAFIT, No 133, Medellín, 2004.

[8] M. Sierra, *Lógica Básica con Aceptación Fuerte*. Revista Boletín de Matemáticas, **IX** No 1, Bogotá, 2002.

[9] M. Sierra, *Lógica Básica con Afirmación Alterna*. Revista Ingeniería y Ciencia, **1** No 1, Medellín, 2004.

[10] R. Smullyan, *First order logic*. Dover ed. New York, 1994.

Recibido: Noviembre de 2004. Aceptado para publicación: Octubre de 2005