Boletín de Matemáticas
Nueva Serie, Volumen XII No. 2 (2005), pp. 145–154

UN MODELO DEMOGRÁFICO Y SU INTERPRETACIÓN SOCIOLÓGICA

HELMUT KNOLLE (∗)

Resumen. Desde el año 1600 los estados europeos persiguieron la anticoncepción y el aborto y fomentaron la natalidad, para compensar las pérdidas en guerras, poblar las colonias y suministrar la mano de obra a las nuevas industrias. Mientras tanto, millones de mujeres murieron en partos difíciles y por la fiebre puerperal, porque a la salud y la vida de las mujeres se dedicaba poca atención. Cuando el médico húngaro Semmelweis descubrió la verdadera causa de la fiebre puerperal, la clase política rechazo su descubrimiento ¿Cómo se explica esta contradicción? Un modelo matemático lo demuestra (y los datos lo confirman): En una población creciente, en que los hombres se casan más tarde que las mujeres, las mujeres solteras son más númerosas que los hombres solteros, aun si la mortalidad de ambos es igual. El excedente de mujeres se incrementaba aun más a causa de las guerras. En consecuencia, en Europa, donde los partos ilegítimos eran raros, el factor limitante del crecimiento demográfico era la alta mortalidad de los hombres, y la muerte precoz de muchas mujeres no les importaba a los dirigentes políticos, porque siempre hubo un número suficiente de solteras para reemplazarlas.

Palabras claves. Modelo demográfico, población, tasa de natalidad, tasa de mortalidad.

2000 MSC: 91C99.

(∗) Helmut Knolle. E-mail: hknolle@gmx.ch.

1. Introducción

La demografía es aquella área de la matemática aplicada donde los números se relacionan inmediatamente con la reproducción de la especie humana, pero también con sus locuras y sufrimientos. Miremos primero los cuadros 1 y 2. Mientras el cuadro 1 muestra la pirámide de edades de una población que durante 80 años no había sufrido mayores perturbaciones, el cuadro 2 muestra el impacto de dos guerras mundiales sobre la misma población. A una baja de nacimientos a causa de la hambruna en el período 1916-20, que afectaba a ambos sexos, se sumaba una mortalidad descomunal de hombres de 20-35 años en la segunda guerra mundial (1939-45), así que en este grupo de edad, a 5,7 millones de mujeres correspondían sólo 4,3 millones de hombres.

Esta situación era muy visible en la vida diaria. Por ejemplo, en 1949 tuve dos compañeros de colegio que habían perdido su padre en la guerra. Más tarde, en una clase de historia, aprendí que en el mundo musulmán de la Edad Media un hombre podía tener 4 esposas legales. Entonces mi idiosincrasia de futuro matemático me condujo a preguntar al profesor, si los musulmanes tenían 4 veces más hijas que hijos. La respuesta del profesor no me convenció. Pasaron algunas décadas, hasta que me tocó dictar una clase de demografía y entonces encontré por fin una respuesta satisfactoria.

```
                             o
                           nnooo
                         nnnnoooo
                       nnnnnnoooooo
                     nnnnnnnnoooooooo
                   nnnnnnnnnnoooooooooo
                 nnnnnnnnnnnnoooooooooooo
               nnnnnnnnnnnnnnoooooooooooooo
             nnnnnnnnnnnnnnnnoooooooooooooooo
           nnnnnnnnnnnnnnnnnnoooooooooooooooooo
         nnnnnnnnnnnnnnnnnnnnoooooooooooooooooooo
       nnnnnnnnnnnnnnnnnnnnnnoooooooooooooooooooooo
     nnnnnnnnnnnnnnnnnnnnnnnnoooooooooooooooooooooooo
   nnnnnnnnnnnnnnnnnnnnnnnnnnooooooooooooooooooooooooo
 nnnnnnnnnnnnnnnnnnnnnnnnnnnnooooooooooooooooooooooooooo
 4       3       2       1       1       2     3     4
           Hombres                         Mujeres
```

Cuadro 1. Población de Alemania en 1910 (en millones y por grupos de edad en intervalos de 5 años) .

```
                          oo
                         noooo
                        nnoooooo
                      nnnnoooooooo
                    nnnnnnoooooooooo
                  nnnnnnnnooooooooooo
                nnnnnnnnnnooooooooooooo
              nnnnnnnnnnnnoooooooooooooo
              nnnnnnnnnnnnoooooooooooooooo
            nnnnnnnnnnnnnnoooooooooooooooooo
          nnnnnnnnnnnnnnnnooooooooooooooooooo
        nnnnnnnnnnnnnnnnnnoooooooooooooooooooo
      nnnnnnnnnnnnnnnnnnnnooooooooooooooooooooo
    nnnnnnnnnnnnnnnnnnnnnnooooooooooooooooooooo
        nnnnnnnnnnnnnnnnnnoooooooooooooooooo
            nnnnnnnnnnnnnnooooooooooooooo
                nnnnnnnnnnoooooooooooo
            nnnnnnnnnnnnnnoooooooooooooooo
    nnnnnnnnnnnnnnnnnnnnnnoooooooooooooooooooo
    nnnnnnnnnnnnnnnnnnnnnnoooooooooooooooooooo
nnnnnnnnnnnnnnnnnnnnnnnnnnoooooooooooooooooooooooo
    nnnnnnnnnnnnnnnnnnnnnnoooooooooooooooooooo
4        3        2        1        1        2    3    4
           Hombres                        Mujeres
```

Cuadro 2. Población de Alemania en 1946

Cabe anotar que una población en el sentido demográfico es un conjunto de seres humanos de ambos sexos que normalmente eligen sus parejas sexuales en el mismo conjunto y así se reproducen. Frente a la variabilidad en espacio y tiempo de las costumbres y normas culturales que rigen las relaciones sexuales y la cria de hijos en diferentes sociedades, tenemos que admitir que un modelo matemático que sea aplicable a todas las poblaciones humanas, no existe. El modelo que se propone en este artículo se refiere a la sociedad de Europa y a los estratos altos de la sociedad en Hispanoamérica durante los siglos XVIII, XIX y la primera mitad del siglo XX. La característica específica de estas sociedades era la monogamia y una moral que trataba las madres solteras y los hijos ilegítimos con repudio. En tales condiciones las mujeres solteras tenían mucho cuidado para evitar un embarazo y, de lo contrario, trataban de tener un aborto o, como última salida, abandonaban o mataban al recién nacido. De todas maneras, los partos ilegítimos eran escasos y no tenían un impacto demográfico notable. Aunque hoy en día la situación es diferente, el modelo

puede contribuir a entender mejor las interacciones entre la demografía y las normas que rigen la sexualidad y la procreación en una sociedad.
En este contexto caben también algunos tópicos del debate sobre igualdad de derechos entre hombre y mujer. La sociedad patriarcal limitaba la función de la mujer al papel de madre y ama de casa, mientros los hombres de los estratos altos trabajaban fuera del hogar como profesionales o funcionarios del Estado. Eso implicaba que las mujeres se casaran muy jóvenes, mientras que los hombres no se casaban antes de terminar sus estudios y haberse posesionado de un cargo con suficientes ingresos para sustentar una familia. Con el modelo que voy a proponer se puede demostrar que en una sociedad monógama, en que las mujeres se casan más jóvenes que los hombres, el crecimiento demográfico es la causa de un desequilibrio numérico en el " mercado matrimonial ", de tal manera que no pocas mujeres quedan solteras durante toda su vida, o no vuelven a casarse despues del divorcio, mientras los hombres divorciados casi siempre tienen un segundo matrimonio. En siglos pasados el excedente de mujeres era la causa de un desprecio de la mujer, visible por ejemplo en la reluctancia de tomar medidas contra la fiebre puerperal, causa de muerte de muchas madres en aquella época. En la siguiente sección voy a exponer el modelo matemático y luego volveré a los tópicos sociológicos mencionados.

2. El modelo demográfico

Casi todas las especies biológicas se reproducen sexualmente. Sin embargo, los modelos de población común y corrientes, denominados modelos de un sexo, no tienen en cuenta los machos sino consideran solo el número y la fertilidad de las hembras. Esto se justifica por el hecho que una escasez de machos hasta un cierto grado no influye en la tasa de crecimiento de una población, en la cual los machos se aparean con varias hembras. Pero en el caso de las poblaciones humanas se tienen que tener en cuenta las normas culturales y las exigencias económicas que determinan, junto con el potencial biológico, el número de hijos que una mujer puede dar a luz y criar hasta la edad adulta. Por eso los matrimonios y las uniones libres crían más hijos que las mujeres solteras. Los modelos que se adaptan a ésto se llaman modelos de dos sexos con formación de parejas.
El modelo más general que describe la formación de parejas de hombres y mujeres de diferentes edades y el nacimiento de hijos de las parejas es un sistema de tres ecuaciones diferenciales parciales de primer orden en cuatro variables independientes: el tiempo t, la edad de la mujer, la edad del hombre y la "edad" del matrimonio (Hadeler 1989). El "mercado matrimonial" se representa por una función que indica cuántas parejas con una mujer de edad a y un hombre de edad b se forman en la unidad de tiempo, dado el número y la distribución por edades de solteros de ambos sexos. La tasa de fecundidad depende de la edad de ambos esposos y de la "edad" del matrimonio, es decir,

el tiempo trascurrido desde las bodas. Como se ve, este modelo involucra un gran número de parámetros, cuyos valores empíricos no se conocen. Además, un tratamiento analítico es casi imposible. Por eso aquí se propone un modelo simplificado en el cual la tasa de fecundidad es constante durante todo el tiempo en que un matrimonio (o una unión libre) existe, pero se divide entre hijas e hijos. La única forma en que la edad de las personas aparece en este modelo es la definición de una edad mínima que se requiere para formar una pareja. Personas que han alcanzado esta edad serán llamadas adultas. Las parejas se forman entre adultos sin distinción entre solteros, viudos y divorciados o separados. Una persona soltera en este sentido puede ser soltera en sentido estricto, o viuda o divorciada (separada). El modelo tiene 3 compartimentos: mujeres solteras, hombres solteros, parejas. Las parejas tienen hijos que más tarde, en caso de sobrevivir, entran en el compartimento de las mujeres solteras o de los hombres solteros. Sean entonces:

d_x: edad mínima en que se casan las mujeres.
d_y: edad mínima en que se casan los hombres.
α: promedio por año y pareja, de hijas que sobreviven hasta la edad d_x.
β: promedio por año y pareja, de hijos que sobreviven hasta la edad d_y.
$x(t)$: número de mujeres solteras de edad mayor que d_x en el tiempo t.
$y(t)$: número de hombres solteros de edad mayor que d_y en el tiempo t.
$p(t)$: número de parejas en el tiempo t.
μ_x: tasa de mortalidad de mujeres adultas.
μ_y: tasa de mortalidad de hombres adultos.
σ: tasa de separación de parejas.

Además el modelo involucra una función de formación de parejas $\phi(x, y)$, donde $\phi(x(t), y(t))h$ es el número de parejas que se forman en el lapso $(t, t + h)$, de $x(t)$ solteras y $y(t)$ solteros.
Con respecto a la función ϕ se requieren algunas propiedades obvias:

$\phi(x, y) \geq 0, \forall x,\ y \geq 0.$
$\phi(0, y) = \phi(x, 0) = 0, \forall x,\ y \geq 0.$
$\phi(u, v) \geq \phi(x, y) \forall u \geq x,\ v \geq y.$

Esto implica que ninguna solución con valores iniciales no negativos puede salir del octante positivo.
La propiedad siguiente se cumple, si el ambiente ofrece recursos suficientes para que la formación de parejas dependa solamente del número de hombres y mujeres:

$$\phi(\lambda x, \lambda y) = \lambda \phi(x, y) \forall \lambda,\ x,\ y \geq 0.$$

Algunos ejemplos de funciones que satisfacen estas condiciones son:

(1) $\phi(x, y) = a \min(x, y),\ a > 0.$
(2) $\phi(x, y) = 2xy/(x + y).$

(3) $\phi(x, y) = a\sqrt{xy},\ a > 0$.

Entonces el modelo demográfico consiste de un sistema de ecuaciones diferenciales con retardo, que se escribe con la convención de evaluar las funciones x y y siempre en t, en esta forma:

$$x' = \alpha p(t - d_x) + (\mu_y + \sigma)\ p(t) - \mu_x x - \phi(x, y). \tag{1a}$$

$$y' = \beta p(t - d_y) + (\mu_x + \sigma)p(t) - \mu_y y - \phi(x, y). \tag{1b}$$

$$p' = \phi(x, y) - (\mu_x + \mu_y + \sigma)p(t). \tag{1c}$$

El resultado de Martcheva (1999) hace esperar que este sistema tenga una solución de la forma:

$$x(t) = x_0 e^{\rho t},\quad y(t) = y_0 e^{\rho t},\quad p(t) = p_0 e^{\rho t}.$$

Tras reemplazar en (1) y dividir por $e^{\rho t}$ se obtiene (el subíndice 0 se omite):

$$\begin{aligned}\rho x &= \{\alpha e^{-\rho d_x} + \mu_y + \sigma\}p - \mu_x x - \phi(x, y)\\ \rho y &= \{\beta e^{-\rho d_y} + \mu_x + \sigma\}p - \mu_y y - \phi(x, y)\\ \phi(x, y) &= (\rho + \mu_x + \mu_y + \sigma)p.\end{aligned}$$

y luego,

$$(\rho + \mu_x)x = [\alpha e^{-\rho d_x} - \rho - \mu_x]p. \tag{2a}$$

$$(\rho + \mu_y)y = [\beta e^{-\rho d_y} - \rho - \mu_y]p. \tag{2b}$$

$$\rho p = \phi(x, y) - (\mu_x + \mu_y + \sigma)p. \tag{2c}$$

Para que x, y, y p sean positivos es necesario que

$$\alpha e^{-\rho d_x} > \rho + \mu_x \qquad \beta e^{-\rho dy} > \rho + \mu_y. \tag{3}$$

En el caso especial $\alpha = \beta$, $\mu_x = \mu_y$ tenemos:

$$x/y = \{\alpha e^{-\rho d_x} - (\rho + \mu)\}/\{\alpha e^{-\rho d_y} - (\rho + \mu)\}. \tag{4}$$

Esto demuestra que $x > y$ si y sólo si $d_x < d_y$ y $\rho > 0$. Pero nuestro objetivo es representar x/y como función explícita de $\rho(d_y - d_x)$. Si este producto es pequeño, se puede hacer la aproximación siguiente:

$$x/y = \{e^{\rho(d_y - d_x)} - q\}/\{1 - q\} = \{1 + \rho(d_y - d_x) - q\}/\{1 - q\},$$

donde $q = (\rho + \mu)e^{\rho dy}/\alpha \quad < 1$, debido a (3). Por lo tanto,

$$x/y = 1 + [\rho(d_y - d_x)]/(1 - q). \tag{5}$$

Esta fórmula demuestra que en poblaciones crecientes en que los hombres se casan más tarde que las mujeres, el número de mujeres solteras puede exceder el número de hombres solteros, aún si estos tienen una mortalidad igual. Por lo tanto, para determinar la tasa de crecimiento (si ésta es positiva) podemos suponer que $x > y$. En este caso, la función $\phi(x,y) = a\min(x,y)$ tiene la ventaja de que el sistema (1) se reduce a un sistema lineal. Sea entonces

$$\phi(x,y) = a\min(x,y) = ay.$$

Con esto las igualdades (2b) y (2c) se escriben

$$\begin{aligned}\rho y &= -\mu_y y(\beta e^{-\rho d_y} - \rho - \mu_y)p\\ \rho p &= ay - (\mu_x + \mu_y + \sigma)p.\end{aligned}$$

Si dividimos ambas ecuaciones por p y ponemos $r = y/p$, entonces resulta

$$\rho r = -\mu_y r + (\beta e^{-\rho d_y} - \rho - \mu_y). \tag{6a}$$

$$\rho = ar - (\mu_x + \mu_y + \phi). \tag{6b}$$

En este sistema aparece todavía μ_x, la mortalidad de mujeres. Pero veamos lo que pasa si a es grande (lo cual significa un intervalo corto entre matrimonios sucesivos). De (6b) se sigue que r tiende a 0 si a tiende a ∞. Con esto la ecuación (6a) se reduce a:

$$\rho = \beta e^{-\rho d_y} - \mu_y. \tag{7}$$

Esta ecuación implícita para ρ se puede resolver numéricamente con el método de Newton.
La fórmula (7) dice que la tasa de crecimiento depende sólamente de las tasas de natalidad y mortalidad de los hombres. Esto contradice obviamente a los modelos demográficos que suponen que la tasa de crecimiento depende solamente de la mortalidad y del número de hijas de las mujeres.

3. Control de natalidad, monogamia y tasa de crecimiento

Durante muchos milenios el crecimiento de la población humana a nivel mundial ha sido muy lento. Es probable que las tribus de cazadores y recolectores de la edad de piedra hayan tenido pocos hijos, porque las mujeres daban a luz cada 4 años sólamente. Eso se puede concluir de estudios que se hicieron en los años 60 del siglo pasado en una tribu de cazadores y recolectores en Namibia (Africa) que entonces vivía todavía su vida tradicional (Kolata 1974). Una causa de esto puede ser que las madres amamantaban durante 3 años cada hijo. El paso a la ganadería, que hizo disponible la leche de animales, acabó con esta costumbre, y luego el intervalo entre los partos se redujo a menos de 2 años (Hassan 1981).

Desde la fundación de estados, un objetivo de los gobiernos ha sido aumentar o limitar la población, según las circunstancias y la ideología. La expansión de Roma durante el periodo de la República, no hubiera sido posible sin un fuerte crecimiento de la población rural romana. Más tarde, cuando la economía esclavista había causado la quiebra de los campesinos romanos, la tasa de natalidad cayó a un nivel tan bajo, que el emperador Augusto dictó leyes matrimoniales con el fin de estimular la procreación. A pesar de esto, la tasa de natalidad de los romanos en los primeros siglos después de Cristo no alcanzó el alto nivel del pasado, y las legiones romanas se llenaron con mercenarios extranjeros. Entonces el emperador Constantino introdujo un subsidio familiar por hijo, destinado a padres pobres y sometió el infanticidio, hasta entonces un derecho de cada ciudadano romano, a la pena capital. Al mismo tiempo, los dirigentes de la nueva religión del Cristianismo consagraron el matrimonio y adoptaron el dogma que prohibe la contracepción. A pesar de esto, la población de Europa no creció mucho durante la Edad Media y todavía en 1750 no sobrepasó la cifra estimada de 140 millones.

En el siglo siguiente a la llegada de los blancos al Nuevo Mundo, la viruela y otras enfermedades endémicas del Viejo Mundo diezmaron la población indígena de las Américas que se estimaba en 60 millones en el 1492 (McNein 1976, Sánchez-Albornoz 1973). Desde el siglo XVIII, los estados Europeos trataban de impulsar un crecimiento de la población y empezaron, con el aplauso de las Iglesias, a perseguir personas que conocían o aplicaban métodos de control de natalidad (Heinsohn et al. 1979). La razón de ésto es que las colonias en América y las nuevas industrias en Europa necesitaban una población más grande. Como consecuencia, entre 1750 y 1950 Europa y las Américas tuvieron un crecimiento demográfico sin precedentes (Tabla 1).

	1750	1950	1980
Europa	140	580	680
América del Norte	1*	170	246
América Central y del Sur	11**	160	368

Tabla 1. Población (en millones) de Europa y las Américas en 1750, 1950 y 1980.
* sólo blancos.
** sólo blancos e indígenas sedentarios.

Dado el objetivo político de lograr altas tasas de crecimiento demográfico, es de esperar, por lo menos en la lógica de los modelos demográficos de un sexo, que los gobiernos hubieran fomentado investigaciones y medidas para reducir la mortalidad materna. La vida y la lucha del médico austro-húngaro Ignaz Philipp Semmelweis (1818-1865) muestra lo contrario. Semmelweis descubrió la causa de la fiebre puerperal y logró que en una clínica de maternidad de Viena, donde él implantó medidas adecuadas en oposición a su jefe, la mortalidad materna cayó de 18% a 1%. A pesar de su éxito perdió su cargo en la clínica, y la cátedra de obstetricia en la Universidad de Viena le fue negado. Por fin fue nombrado profesor de obstetricia en la Universidad de Pest (hoy Budapest), pero durante su vida su descubrimiento no fue valorado en ningún país fuera de Ungheria (Encyclopaedia Britannica 1993). La negativa del establishment austriaco de combatir la mortalidad materna en la metrópoli Viena, aparece aún más paradójica si uno tiene en cuenta la precaria situación política de un estado en que una minoría de austriacos alemanes gobernaba grandes poblaciones de checos, húngaros, croatas, rumanos e italianos.

La fórmula (7) sugiere que en una población creciente con estricta monogamia y sin partos ilegítimos la mortalidad de las mujeres no influye en la tasa de crecimiento, en tanto que la mortalidad de los hombres es igualmente alta. Dado que las normas de la monogamia y la discriminación del parto ilegítimo eran todavía vigentes en la época de Semmelweis, el rechazo de su descubrimiento por parte de la clase gobernante no era contrario al interés del ejercito austriaco de tener muchos soldados para las guerras futuras.

Hoy en día, los partos ilegítimos son frecuentes y aceptados por la sociedad. Aunque este hecho hace inválida la fórmula (7), la fórmula (5), que implica un excedente de mujeres solteras si $\rho > 0$, sigue siendo vigente. En épocas pasadas, cuando el divorcio era imposible, este fenómeno se manifestaba en un alto porcentaje de mujeres nunca casadas. Desde los años 70 del siglo XX, en las poblaciones crecientes de América Latina se observa que los hombres divorciados que contraen un segundo matrimonio se casan con mujeres solteras y muy pocas mujeres divorciadas vuelven a casarse, por lo tanto el porcentaje de mujeres no casadas mayores de 40 años es mucho más alto que el porcentaje de hombres no casados de la misma edad. En cambio, en paises sin crecimiento demográfico estos porcentajes son casi iguales, porque los matrimonios entre parejas divorciadas son muy frecuentes (Tabla 2) .

	Hombres	Mujeres
Brasil (1980)	12	23
Colombia (1985)	15	28
México (1978)	11	18
Checoslovaquia(1980)	13	15
Alemania Fed. (1981)	16	15
Inglaterra (1981)	15	14

Tabla 2. Porcentaje de personas no casadas de 40-44 años en paises con crecimiento demográfico (arriba) y sin crecimiento (abajo). Fuente: United Nations, Demographic Yearbook 1982, New York 1984 y DANE, Bogotá 1986.

Referencias

[1] *Encyclopaedia Britannica*, (1993), vol. 10, 627-28 (Semmelweis).

[2] Hadeler K.P., *Pair formation in age-structured populations.* Acta applicandae mathematicae 14, (1989) 91-102.

[3] Hassan F.A., *Demographic Archaeology.* New York: Academic Press, 1981.

[4] Heinsohn, Knieper, Steiger, *Producción de seres humanos – Demografía general de la Edad moderna (en alemán)*, (1979), Frankfurt/Main.

[5] Keyfitz N., *The mathematics of sex and marriage*, Proceedings of the sixth Berkeley symposium on Math. Statistics and Probability 4, (1972), 89-108

[6] Knolle H. *Modelos de poblaciones humanas*, Notas de clase. Universidad Nacional de Colombia, 2004.

[7] Kolata G.B., *Kung hunter-gatherers: feminism, diet, and birth control*, Science 185, 1974, 932-34.

[8] McNeill *Plagues and Peoples*, Oxford: Blackwell 1976.

[9] Martcheva M., *Exponential growth in age-structured two-sex populations*, Mathematical Biosciences 157, (1999) 1-22.

[10] Sánchez-Albornoz N., *La población de América Latina*, Madrid: Alianza, 1973.

Recibido: Marzo de 2005. Aceptado para publicación: Julio de 2005