

## UN MODELO MATEMÁTICO PARA FENÓMENOS DE INTERCAMBIO Y DIFUSIÓN EN PAÑALES SUPERABSORBENTES

HERNÁN ESTRADA, IGNACIO MANTILLA Y WEIMAR RONCANCIO (\*)

---

RESUMEN. Se presenta un modelo matemático que permite estudiar dos de los fenómenos físicos que ocurren internamente en un pañal, como lo son el transporte de líquido en la celulosa y el intercambio de éste entre la celulosa y los gránulos. El desarrollo conduce a un sistema de ecuaciones diferenciales parciales, complementado con condiciones iniciales y de frontera.

ABSTRACT. In this paper it is shown the mathematical model for the modern superabsorbent napkins. The considered model studied two of the most important aspects of the problem: the exchange of the liquid between the cellulose with the granules and the transport of the liquid in the cellulose. The development of the model follows in a coupled system of coupled partial differential equations with appropriate boundary and initial conditions.

PALABRAS CLAVES: modelo matemático, pañales superabsorbentes, ecuaciones diferenciales.

KEYWORDS: mathematical model, differential equations, superabsorbent napkins.

2000 MSC: Primary 00A69, Secondary 00A99.

---

(\*) Hernán Estrada, Ignacio Mantilla y Weimar Roncancio. Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia.

E-mail: hestrada@unal.edu.co, imantilla@unal.edu.co, whroncanciot@unal.edu.co. El presente trabajo es derivado de la tesis *Un modelo matemático para fenómenos de intercambio y difusión en pañales superabsorbentes*, realizada por el tercer autor para optar al título de Magister en Ciencias Matemáticas en la Universidad Nacional de Colombia.

## 1. DESARROLLO DE LOS PAÑALES MODERNOS

La necesidad de pañales para bebé es tan antigua como la historia misma de la humanidad. La ropa utilizada por los bebés de épocas ancestrales se constituía de hojas, pieles y recursos naturales poco convencionales como se encuentra en la documentación dejada por los Egipcios, los Aztecas y los Romanos. Los Innuits esquimales de Alaska utilizaban pieles de foca, rellenas de musgo, para envolver con ellas a sus bebés. Los nativos americanos usaban pieles de conejo rellenas de pasto al igual que los Incas [5].

Más recientemente, durante gran parte del siglo anterior, el pañal se fabricaba de tela gruesa hecha de algodón y tenía forma rectangular, pero a mediados de los años 40 el primer pañal desechable fue lanzado al mercado en Suecia: fue fabricado utilizando un diseño rectangular muy sencillo, donde el núcleo absorbente consistía de algunas capas de papel Tisú (de 15 a 25 capas) y para el exterior se utilizaba una película plástica. La capacidad total de absorción de estos pañales era estimada en cerca de 100 ml, por lo que su servicio era muy limitado. El uso del pañal desechable fue muy bajo durante los años 50, especialmente debido a su costo y escasa distribución, exclusiva en unos pocos países [3].

En los años 60 el desarrollo del pañal fue significativo: los problemas iniciales de absorción, que no satisfacían las necesidades de los pocos consumidores, debido principalmente a las fugas frecuentes, fueron superados al reemplazar el papel Tisú por una capa de fibras de celulosa. Aun cuando la eficiencia había sido mejorada, el pañal desechable era fabricado ahora bastante grueso.

El pañal desechable alcanza una mayor aceptación, especialmente en los países desarrollados, en los años 70. Su industrialización y el objetivo trazado durante esta década para conquistar el mercado mundial, contribuyó para que se añadieran más opciones de tamaños y capacidad total de absorción. Así por ejemplo aparece el “pañal para uso nocturno”, lográndose la fabricación de pañales con una eficiencia del 95% con respecto a fugas.

En los años 80 el pañal tuvo cambios de diseño significativos. Al principio se introdujo el Polímero Superabsorbente (SAP), dando origen a una nueva generación de pañales de alto desempeño, que además de ser delgados mejoraban su capacidad de retención. Los pañales con menos del 2% de escurrimiento llegaron a ser una realidad finalmente, reduciendo además su peso en cerca del 50%. Durante esta década se realizaron también importantes estudios para comparar la eficiencia de los pañales desechables con la de los pañales de tela y estimular el uso de los primeros.

En los años 90 se agregaron nuevas características al pañal desechable. El superabsorbente usado en estos fue mejorado significativamente reduciendo los problemas asociados al “bloqueo”, fenómeno por el cual se describía la imposibilidad de mover líquidos una vez se saturaba el superabsorbente dejando,

como consecuencia, unas partes del pañal totalmente secas y otras totalmente llenas.

La clara tendencia de la industria pañalera actual para lograr un pañal más compacto, más cómodo para el bebé y amigable con el medio ambiente necesita de investigaciones científicas con estos objetivos. Tales estudios estimulan el desarrollo de trabajos como el que se presenta aquí.

**1.1. Pañales superabsorbentes.** Como se ha dicho, una gran cantidad de cambios se han producido en los pañales desechables desde sus orígenes, en 1936, hasta nuestros días. Esto ha hecho que las componentes estructurales aumenten y la producción de los pañales modernos de alto desempeño, conocidos como pañales superabsorbentes, sea compleja. Las cuatro componentes estructurales principales para la construcción de un pañal desechable moderno son: la hoja porosa, la capa de distribución, el centro absorbente y la hoja impermeable. A continuación describimos cada una de ellas:

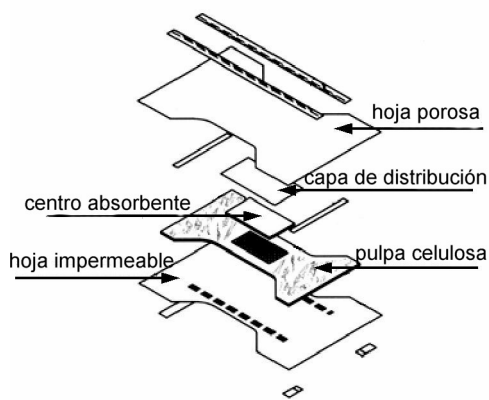
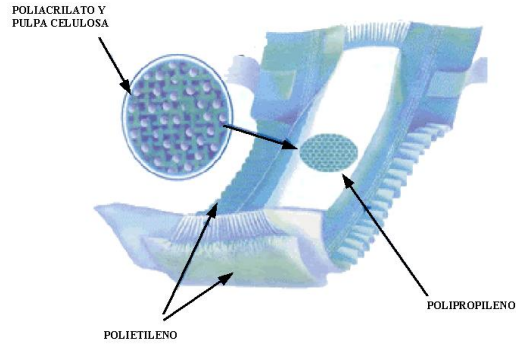
**Hoja Porosa:** Es la cubierta interior del pañal, generalmente fabricada de polipropileno, que está en contacto con la piel del bebé. Permite que el líquido fluya a través de ella y junto con la capa de distribución evita el contacto del líquido con la piel del bebé, haciendo que éste se mantenga seco.

**Capa de Distribución:** Es la capa que se encuentra entre la hoja porosa y el centro absorbente. Recibe el fluido transmitido a través de la hoja porosa, lo sostiene temporalmente, lo transporta en diferentes direcciones y lo transfiere a la superficie del centro absorbente. También asegura un traslado rápido entre la hoja porosa y el centro absorbente para dejar la estructura porosa de esta capa vacía y preparada para las próximas micciones.

**Hoja Impermeable:** Se encuentra en la parte inferior, no es porosa y está hecha de polietileno. Su función es mantener la ropa del bebé totalmente seca.

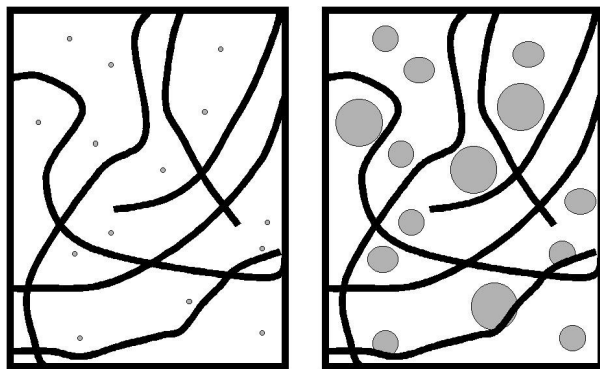
**Centro Absorbente:** Se encuentra entre la capa de distribución y la hoja impermeable. Este componente es el encargado de retener el líquido y distribuirlo en todas sus zonas. Está formado por pulpa celulosa y gránulos (poliacrilato de sodio), los cuales son fundamentales en la construcción del pañal superabsorbente. La pulpa celulosa le brinda mayor capacidad de absorción al pañal, se fabrica a partir de la pulpa de los pinos y por lo mismo se le considera un material biodegradable; el líquido es absorbido debido a la disposición de los espacios intermedios (espacios vacíos) y al fenómeno de capilaridad que existe entre las fibras. El poliacrilato de sodio es un polímero en forma granular (parecida a la arena de mar) elegido por la industria pañalera por sus cualidades absorbentes. Es conocido bajo el nombre de Polímero Super Absorbente (SAP). Este polímero no se disuelve sino que se gelifica.

Las siguientes imágenes ilustran la composición antes descrita:



Algunos otros componentes secundarios como los adhesivos o las cintas laterales han sido también incorporados, pero no tienen influencia alguna en los fenómenos de difusión que estudiaremos.

Para nuestros propósitos podemos suponer entonces que los pañales consisten únicamente de celulosa y gránulos, estos últimos capaces de absorber líquido y aumentar su peso considerablemente. La celulosa, consistente únicamente de fibras y espacios intermedios, aumenta drásticamente por el efecto que tienen los gránulos llenos ocupando los espacios intermedios.



El efecto expansivo de los gránulos obstaculiza el transporte de líquido en la celulosa presentando las complicaciones objeto de este estudio. Naturalmente la optimización del número de gránulos contenidos en el pañal o su distribución deben influir en el eficiente transporte de líquido a través de la celulosa, sin olvidar uno de los objetivos esenciales: mantener seco al bebé e impedir que el líquido abandone el pañal.

El trabajo de J. Weickert [10] plantea una ecuación de difusión no lineal para describir el transporte en la celulosa, acoplada con una ecuación que describe el intercambio de líquido entre la celulosa y los gránulos. El sistema, provisto de condiciones iniciales y de frontera resulta complejo y por lo tanto difícil de tratar. En este trabajo, de carácter divulgativo, se desarrollan las ideas que orientan el trabajo de Weickert y se explican, discuten y simplifican algunas de las hipótesis allí planteadas con el fin de abordar el problema de tal forma que pueda dársele un enfoque posterior que permita proponer un método numérico diferente y más eficiente para el tratamiento del modelo.

## 2. CONSTRUCCIÓN DEL MODELO

Para la deducción y presentación de las ecuaciones que describen el fenómeno objeto de nuestro estudio es necesario hacer algunas suposiciones básicas sobre la forma como ocurre el transporte de líquido en la celulosa y el intercambio de líquido entre los gránulos y la celulosa. Estos dos problemas, intercambio y transporte, originan el modelo matemático que describe un pañal. Siguiendo entonces la exposición de J. Weickert [10], supondremos que:

1. La celulosa consiste únicamente de fibras y espacios intermedios. Su densidad es homogénea.
2. El líquido es transportado únicamente a través de los espacios intermedios y las fibras sólo sirven como barreras para canalizarlo.

3. El volumen de los gránulos es igual al volumen del líquido absorbido, es decir que el volumen inicial de los gránulos es despreciable.
4. La absorción de líquido en los gránulos es tal que el aumento de su volumen compensa completamente la disminución del volumen de líquido en los espacios intermedios.

Adicionalmente a las suposiciones anteriores, debe agregarse que los efectos de temperatura y gravitación no van a ser tenidos en cuenta. Tampoco habrá alteraciones tales como deformaciones causadas por el movimiento del bebé.

La siguiente notación facilita la deducción de las correspondientes ecuaciones:

$\mathbf{x} := (x, y, z)$	denota la variable vectorial espacial
$t$	tiempo
$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$	campo vectorial de velocidad
$V$	volumen total
$V_I$	volumen del espacio intermedio
$u_c$	masa del líquido presente en la celulosa.

De acuerdo con esta notación, la concentración de líquido en la celulosa está dada por:

$$C \equiv C(\mathbf{x}, t) := \frac{du_c}{dV}(\mathbf{x}, t)$$

y el nivel de concentración o de *saturación* del espacio intermedio será:

$$I \equiv I(\mathbf{x}, t) := \frac{du_c}{dV_I}(\mathbf{x}, t).$$

Es esencial tener en cuenta que la difusión tiene lugar si la distribución espacial del líquido no es homogénea y que en tal caso ésta ocurre en la dirección en la cual la concentración disminuye, tendiendo a igualar en todo el espacio la cantidad de líquido que se difunde. Estas propiedades quedan descritas por la Ley de Fick que nos indica que la densidad del flujo en los espacios intermedios (el fenómeno de transporte sólo ocurre en los espacios intermedios) viene descrito por:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) &:= \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)I(\mathbf{x}, t) \\ &= -D(I(\mathbf{x}, t)) \mathit{grad}(I(\mathbf{x}, t)) \end{aligned} \tag{1}$$

donde la función  $D$  denota lo que llamaremos la *difusividad* (como función de la saturación en los espacios intermedios).

Otra importante ley a tener en cuenta tiene que ver con la hipótesis que garantiza que no hay pérdida de masa debido a la difusión: la razón de cambio de la masa en un volumen fijo (pero arbitrario) está dada por el flujo en la superficie, es decir que en un pañal sin gránulos la concentración  $C^0$  de líquido en la celulosa satisface:

$$\frac{\partial C^0}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \mathit{div}(\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)C^0(\mathbf{x}, t)) = 0. \tag{2}$$

Esta ecuación es conocida bajo el nombre de *ecuación de continuidad*. Usando la regla de la cadena tenemos:

$$\begin{aligned} C^0(\mathbf{x}, t) &= \frac{du_c}{dV}(\mathbf{x}, t) \\ &= \frac{du_c}{dV_I}(\mathbf{x}, t) \frac{dV_I}{dV}(\mathbf{x}, t) \\ &= I(\mathbf{x}, t) \frac{dV_I}{dV}(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (3)$$

Si ahora reemplazamos en la ecuación de continuidad (2) y usamos la ley de Fick (1) resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C^0}{\partial t}(\mathbf{x}, t) &= -\operatorname{div}(v(\mathbf{x}, t)C^0(\mathbf{x}, t)) \\ &= -\operatorname{div}\left(v(\mathbf{x}, t) \frac{dV_I}{dV}(\mathbf{x}, t) I(\mathbf{x}, t)\right) \\ &= -\operatorname{div}\left(\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \frac{dV_I}{dV}(\mathbf{x}, t)\right) \\ &= -\operatorname{div}\left(-D(I(\mathbf{x}, t)) \operatorname{grad}(I(\mathbf{x}, t)) \frac{dV_I}{dV}(\mathbf{x}, t)\right), \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\frac{\partial C^0}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{div}\left(\frac{dV_I}{dV}(\mathbf{x}, t) D(I(\mathbf{x}, t)) \operatorname{grad}(I(\mathbf{x}, t))\right). \quad (4)$$

La evolución temporal de la concentración en la celulosa, vista de manera aislada como un compuesto de fibras y espacios intermedios, expresada en la ecuación (4), supone que los gránulos no tienen efecto alguno sobre la concentración en la celulosa; es decir que el pañal, en los espacios intermedios, está vacío de gránulos. Los gránulos y la celulosa intercambian el líquido de tal manera que la misma cantidad de líquido que absorben los gránulos es la que sale de la celulosa, por lo tanto la evolución temporal de la concentración de líquido  $C$ , en la celulosa de un pañal con gránulos, coincide con  $\frac{\partial C^0}{\partial t}$  disminuida en la de los gránulos, esto es:

$$\frac{\partial C}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{div}\left(\frac{dV_I}{dV}(\mathbf{x}, t) D(I(\mathbf{x}, t)) \operatorname{grad}(I(\mathbf{x}, t))\right) - \frac{\partial G}{\partial t}(\mathbf{x}, t). \quad (5)$$

Se observa que en (5) aparecen tres tipos de concentraciones:  $C$  (que se relaciona con el volumen de la celulosa),  $I$  (que se relaciona con el volumen del espacio intermedio) y  $G$  (que se relaciona con los gránulos). La conexión entre las concentraciones  $C$  e  $I$  la establece la ecuación (3). Si  $\frac{dV_I}{dV} = 1$  y suponemos que  $D(I) =: d$  (constante) entonces la ecuación (4) se convierte en la ecuación

usual de difusión simple:

$$\frac{\partial C^0}{\partial t} = d\nabla^2 I = d\nabla^2 C^0.$$

Si  $\frac{dV_I}{dV} = 0$  entonces no hay transporte de líquido, por lo que es razonable suponer que:

$$1 \geq \frac{dV_I}{dV} > 0.$$

El volumen  $V$  puede expresarse explícitamente como la suma:

$$V = V_F + V_I + V_G$$

donde  $V_F$  y  $V_G$  denotan el volumen de las fibras y el volumen de los gránulos respectivamente. Entonces:

$$\frac{dV_I}{dV} = 1 - \frac{dV_F}{dV} - \frac{dV_G}{dV}. \quad (6)$$

Ahora bien, como el producto del volumen por la densidad es la masa, tenemos:

$$\frac{dm_F}{dV_F} = \rho_F \quad \text{y} \quad \frac{dm_c}{dV_c} = \rho_c,$$

donde la letra  $m$  denota la masa, la letra  $\rho$  denota la densidad y los subíndices indican fibra  $F$  o celulosa  $c$ . Puesto que  $m_F = m_c$  y  $V = V_c$ , entonces:

$$\begin{aligned} \frac{dV_F}{dV} &= \frac{dV_F}{dm_F} \frac{dm_F}{dV} \\ &= \frac{1}{\rho_F} \frac{dm_F}{dV} \\ &= \frac{1}{\rho_F} \frac{dm_c}{dV_c} \\ &= \frac{\rho_c}{\rho_F}. \end{aligned} \quad (7)$$

Usando esta misma notación, si  $\rho_u$  es la densidad del líquido, entonces la concentración en los gránulos,  $G$ , se puede expresar como:

$$G := \frac{dm_G}{dV} = \frac{d(V_G \rho_u)}{dV} = \rho_u \frac{dV_G}{dV},$$

donde  $m_G$  es la masa del gránulo, luego

$$\frac{dV_G}{dV} = \frac{G}{\rho_u}. \quad (8)$$

Reemplazando (7) y (8) en (6) se obtiene:

$$\frac{dV_I}{dV}(\mathbf{x}, t) = 1 - \frac{\rho_c}{\rho_F} - \frac{G(\mathbf{x}, t)}{\rho_u} \quad (9)$$

$$=: \sigma(\mathbf{x}, t) \quad (10)$$



La ecuación (9) junto con la expresión (3) nos ofrece una expresión para  $I$  como sigue:

$$I(\mathbf{x}, t) = \frac{C(\mathbf{x}, t)}{1 - \frac{\rho_c}{\rho_F} - \frac{G(\mathbf{x}, t)}{\rho_u}}. \quad (11)$$

Esta última ecuación es una importante relación entre la concentración en los espacios intermedios, en los gránulos y en la celulosa.

**2.1. Difusividad.** Si el pañal se encuentra seco, entonces  $I \equiv 0$ ; y si el pañal se encuentra saturado,  $I \equiv \rho_u$ . La difusividad  $D$  en los espacios intermedios puede estudiarse observando que para una concentración o nivel de saturación dada,  $I(\mathbf{x}, t)$ , la fracción del espacio intermedio que es llenada con líquido es  $I(\mathbf{x}, t)/\rho_u$ . Supongamos que el transporte de líquido ocurre sin fricción y que éste tiende a llenar aquellos espacios en los cuales no hay aún líquido presente; es decir que el transporte ocurre en la fracción de los espacios intermedios:

$$1 - \frac{I(\mathbf{x}, t)}{\rho_u}.$$

Si adicionalmente suponemos, como ya antes lo hemos sugerido, que las fibras actúan como una barrera potencial que el líquido debe superar con una energía mínima  $E_A$ , entonces ésta es proporcional al espacio intermedio seco:

$$E_A \sim \left(1 - \frac{I(\mathbf{x}, t)}{\rho_u}\right).$$

Si asumimos que el comportamiento es acorde con una distribución de Maxwell-Boltzmann, entonces (para una temperatura constante) la fracción de líquido con una energía mayor que la mínima  $E_A$  debe ser proporcional a:

$$e^{-\eta E_A}, \quad \text{con } \eta > 0.$$

Puesto que para un gradiente de concentración dado, la ley de Fick nos dice que la difusividad es proporcional al flujo a través de la superficie, establecemos que la difusividad obedece:

$$\begin{aligned} D(I) &\sim e^{-\eta E_A} \\ &= e^{-\nu(1 - \frac{I}{\rho_u})} \\ &= d_0 e^{\beta I}, \quad \text{con } d_0 := e^{-\nu}, \quad \beta := \frac{\nu}{\rho_u}, \quad \nu > 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Nótese que de acuerdo con lo anterior, la difusividad crece al aumentar la concentración de líquido en los espacios intermedios. Este comportamiento lo reporta [10] como usual.

**2.2. Intercambio.** El fenómeno de intercambio ocurre entre la celulosa y los gránulos. Si denotamos mediante  $m_c$  la masa de la celulosa y mediante  $U_{CA}$  la *capacidad de absorción de la celulosa*, es decir la máxima masa de líquido que puede absorber la celulosa, entonces debido al efecto físico según el cual esta capacidad de absorción es proporcional a la masa de la celulosa:

$$U_{CA} \sim m_c$$

tenemos que

$$U_{CA} = \eta_c m_c, \quad \eta_c > 0. \quad (13)$$

La constante  $\eta_c$  la llamaremos *factor de empapamiento de la celulosa*.

Análogamente, si denotamos por  $m_G$  y  $U_{GA}$  la masa de los gránulos y la *capacidad de absorción de los gránulos* respectivamente, puede justificarse una fórmula similar, donde la constante de proporcionalidad  $\eta_G$  se denominará *factor de empapamiento de los gránulos*:

$$U_{GA} = \eta_G m_G, \quad \eta_G > 0. \quad (14)$$

Para la masa líquida  $U_{CA}$  podemos establecer la correspondiente concentración “máxima” a través de:

$$\bar{c} := \eta_c \frac{dm_c}{dV} = \eta_c \rho_c ; \quad (15)$$

y en forma análoga definir la concentración “máxima” en el gránulo (dependiendo de la posición):

$$\bar{g}(\mathbf{x}) := \eta_G \frac{dm_G}{dV}(\mathbf{x}). \quad (16)$$

Otro importante concepto que debe considerarse es la *capacidad de empapamiento del gránulo* el cual lo interpretaremos como el indicador de su calidad. Si

$$M := m_c + m_G$$

es la masa total, la capacidad de empapamiento del gránulo la podemos caracterizar por medio de:

$$\gamma(\mathbf{x}) := \frac{dm_G(\mathbf{x})}{dM}, \quad (17)$$

como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{dm_G(\mathbf{x})}{dV} &= \frac{dm_G(\mathbf{x})}{dM} \frac{dM}{dV} \\ &= \gamma(\mathbf{x}) \frac{dM}{dV} \\ &= \gamma(\mathbf{x}) \left( \frac{dm_c}{dV} + \frac{dm_G(\mathbf{x})}{dV} \right), \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{dm_G(\mathbf{x})}{dV} (1 - \gamma(\mathbf{x})) = \gamma(\mathbf{x}) \frac{dm_c}{dV}$$

por lo tanto:

$$\frac{dm_G(\mathbf{x})}{dV} = \frac{\gamma(\mathbf{x})}{1 - \gamma(\mathbf{x})} \frac{dm_c}{dV},$$

y de acuerdo con (16) y (15) se tiene:

$$\begin{aligned} \bar{g}(\mathbf{x}) &= \eta_G \frac{\gamma(\mathbf{x})}{1 - \gamma(\mathbf{x})} \frac{dm_c}{dV} \\ &= \eta_G \frac{\gamma(\mathbf{x})}{1 - \gamma(\mathbf{x})} \rho_c. \end{aligned} \quad (18)$$

Puesto que  $0 \leq \gamma(\mathbf{x}) < 1$  para todo  $\mathbf{x}$ , la capacidad de empapamiento del gránulo queda determinada por el producto del factor de empapamiento  $\eta_G$ , la densidad de la celulosa  $\rho_c$  y la cantidad  $\frac{\gamma(\mathbf{x})}{1 - \gamma(\mathbf{x})} \geq 0$ , que determina la *calidad del gránulo*.

Los gránulos y la celulosa (como “compuesto homogéneo”) intercambian el líquido alcanzando un equilibrio dinámico cuando  $t \rightarrow \infty$ ; es decir, la misma cantidad de líquido que absorben los gránulos es la que sale de la celulosa. Si ahora estudiamos el fenómeno de intercambio cuando se alcanza este estado de equilibrio, la concentración correspondiente, denotada por  $g_E$  y por  $c_E$  para los gránulos y la celulosa respectivamente, puede caracterizarse mediante la relación:

$$\frac{g_E(\mathbf{x})}{c_E} = \frac{\bar{g}(\mathbf{x})}{\bar{c}}. \quad (19)$$

Para saber cuál es la evolución temporal hacia este estado tiene sentido suponer inicialmente que la tasa a la cual el líquido pasa de la celulosa a los gránulos es proporcional a:

$$C(\mathbf{x}, t) \text{ y } (\bar{g}(\mathbf{x}) - G(\mathbf{x}, t)),$$

y que la tasa a la cual el líquido pasa de los gránulos a la celulosa es proporcional a

$$G(\mathbf{x}, t) \text{ y } (\bar{c} - C(\mathbf{x}, t)).$$

Estas dos hipótesis nos indican que la evolución temporal de la concentración en los gránulos puede describirse mediante:

$$\frac{\partial G}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \underbrace{kC(\mathbf{x}, t) \{\bar{g}(\mathbf{x}) - G(\mathbf{x}, t)\}}_{\text{reacción progresiva}} - \underbrace{k'G(\mathbf{x}, t) \{\bar{c} - C(\mathbf{x}, t)\}}_{\text{reacción regresiva}}, \quad k, k' > 0. \quad (20)$$

Puesto que en el estado de equilibrio debe cumplirse:

$$\frac{\partial G}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = 0$$

entonces, para  $t \rightarrow \infty$ , la ecuación (20) conduce a:

$$k c_E \{\bar{g}(\mathbf{x}) - g_E(\mathbf{x})\} = k' g_E(\mathbf{x}) \{\bar{c} - c_E\}$$

o sea

$$k c_E \bar{g}(\mathbf{x}) - k c_E g_E(\mathbf{x}) = k' g_E(\mathbf{x}) \bar{c} - k' g_E(\mathbf{x}) c_E.$$

De (19) se obtiene inmediatamente:  $k = k'$ , por lo tanto (20) se convierte en:

$$\frac{\partial G}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = k \{C(\mathbf{x}, t)\bar{g}(\mathbf{x}) - \bar{c}G(\mathbf{x}, t)\}. \quad (21)$$

### 3. LAS ECUACIONES DEL PAÑAL

Es claro que los cambios en las concentraciones de líquido en la celulosa son causados por la difusión en los espacios intermedios y por intercambio de líquido entre la celulosa y los gránulos, tal como lo describe la ecuación (5), mientras que los cambios en los gránulos son debidos únicamente al intercambio que describe la ecuación (21). Así, las ecuaciones que “matematizan” estos fenómenos son:

$$\frac{\partial C}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \text{div}(\sigma(\mathbf{x}, t)D(I(\mathbf{x}, t))\text{grad}(I(\mathbf{x}, t))) - \frac{\partial G}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \quad (22)$$

$$\frac{\partial G}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = k \{C(\mathbf{x}, t)\bar{g}(\mathbf{x}) - \bar{c}G(\mathbf{x}, t)\} \quad (23)$$

con (ver (10), (11) y (12))

$$\sigma(\mathbf{x}, t) = 1 - \frac{\rho_c}{\rho_F} - \frac{G(\mathbf{x}, t)}{\rho_u}, \quad (24)$$

$$I(\mathbf{x}, t) = \frac{C(\mathbf{x}, t)}{\sigma(\mathbf{x}, t)}, \quad (25)$$

$$D(I) = d_0 e^{\beta I}. \quad (26)$$

Las ecuaciones (22)-(23) forman un sistema acoplado no lineal de ecuaciones de difusión que satisfacen condiciones iniciales y de frontera. Para imponer estas condiciones supongamos un bloque rectangular:

$$W := (0, X_{\text{máx}}) \times (0, Y_{\text{máx}}) \times (0, Z_{\text{máx}})$$

para representar el pañal objeto de estudio.

La condición inicial que imponemos debe describir el fenómeno al término de la entrada inicial de líquido el cual entra en contacto con la capa de distribución y fluye en diferentes direcciones hacia el interior del pañal, ofreciendo una concentración mayor en las primeras capas que encuentra. Esto quiere decir que:

$$C(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}), \quad (27)$$

donde la función  $f(\mathbf{x})$  puede ser dada, atendiendo resultados experimentales que ilustran su comportamiento. Por su parte los gránulos, en el primer instante, aún no se han empapado y no tenemos entonces concentración en ellos. Esta suposición la extendemos a nuestro instante  $t = 0$ , el cual tiene lugar cuando concluye la entrada inicial de líquido:

$$G(\mathbf{x}, 0) = 0. \quad (28)$$

Naturalmente nuestras condiciones iniciales (27) y (28) simplifican el problema, ya que el estudio del fenómeno para el corto tiempo de la entrada inicial de líquido implica un trabajo matemático extra; sin embargo, teniendo en cuenta que este tiempo es despreciable, comparado con el tiempo total, y que el interés radica en el estudio de la difusión en un pañal que ha sido “llenado” previamente, las condiciones propuestas cumplen a cabalidad con las expectativas del estudio.

La imposición de las condiciones en las fronteras es sencilla de plantear. Como el transporte sólo ocurre a través de los espacios intermedios y el pañal debe evitar fugas de líquido:

$$\left. \frac{\partial I}{\partial n} \right|_{\Omega} = 0, \quad (29)$$

donde  $\Omega$  es la frontera de  $W$  y  $n$  es el vector normal exterior.

Es importante hacer énfasis en la dificultad que presenta el sistema (22)-(23) con la condición (29), ya que esta frontera combina la concentración  $C$  y la concentración  $G$  a través de  $I$  y no ofrece explícitamente valores de frontera para cada una de ellas.

#### REFERENCIAS

- [1] Alonso M. & Finn E., *Física Campos y Ondas*, vol II. Addison-Wesley Iberoamericana, 1987.
- [2] Byron R. & Stewart W. & Lighfoot E., *Transport Phenomena*, John Wiley & sons, inc, 2002.
- [3] <http://www.buybabydiapers.com/diapers-mitestones.htm>.
- [4] Miller R. D. & Bresler E., *A quick method for estimating soil water diffusivity functions*, Sci. Soc. Amer. J., **41**, (1977), 1020.
- [5] Richer C., “*Diaper History*”, <http://www.gpoabs.com.mx/cricher/history.html>.
- [6] Roller D.E. & Blum R., *Mecánica, ondas y termodinámica* Editorial Reverté S.A., 1983.
- [7] Roncancio W., *Un modelo matemático para fenómenos de intercambio y difusión en pañales superabsorbentes*, Tesis de Maestría, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2005.
- [8] Simpson W. T. *Determination and use of moisture diffusion coefficient to characterize drying of northern red oak wood*, Sci. Technol. **27**, (1993), 409.
- [9] Stockie J. & Budd C. J., *A nonlinear diffusion problem arising from moisture transport in porous media*, preprint, (2005).
- [10] Weickert J., *A mathematical model for diffusion and exchange phenomena in ultra napkins*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, **16**, (1993), 759-777.

RECIBIDO: Marzo de 2005. ACEPTADO PARA PUBLICACIÓN: Junio de 2005.