This is a reprint of
Lecturas Matemáticas
Volumen **25** *(2004), páginas 139–148*

Condiciones de hemicontinuidad para c-correspondencias

Erwin Suazo
Arizona State University, Tempe, EE. UU.

Lecturas Matemáticas
Volumen **25** *(2004), páginas 139–148*

Condiciones de hemicontinuidad para $c-$correspondencias

Erwin Suazo
Arizona State University, Tempe, EE. UU.

Abstract. In this paper sufficient conditions for multi-valued contraction mappings to be hemicontinuous are given.

Key words and phrases. Multivalued contraction mappings, Hemicontinuity, Mosco convergence, Hausdorff convergence.

2000 Mathematics Subject Classification. Primary: 26E25. Secondary: 54C60.

Resumen. En el presente artículo se presentan condiciones suficientes para que una correspondencia que es contracción sea hemicontinua.

Introducción

La teoría de correspondencias (funciones cuyos valores son conjuntos) es una interesante mezcla de diferentes campos de la matemática como la topología, la teoría de la medida, el análisis funcional no lineal y las matemáticas aplicadas. La necesidad de considerar aplicaciones con conjuntos como valores fue reconocida al comienzo del siglo XX y muchos prominentes matemáticos como Hausdorff, Vietoris, Hahn, y Kuratowski hicieron las primeras investigaciones. Sin embargo, un estudio sistemático solo comenzó en la década de los años sesenta de dicho siglo.

En este trabajo abordamos el estudio de las correspondencias que son contracciones (las llamadas $c-$correspondencias). Es bien conocido que toda función sobre un espacio métrico que es una contracción es continua. En el caso de las $c-$correspondencias esto no es cierto como mostramos en la sección 3 utilizando resultados de la sección 2. Por eso presentamos condiciones sobre la imagen y el dominio de la $c-$correspondencia para obtener hemicontinuidad y continuidad (sección 3). Estas condiciones se obtienen usando la noción de *convergencia de Mosco* entre conjuntos (sección 1). También presentamos resultados que facilitarán al lector la construcción de ejemplos que son $c-$correspondencias (sección 2).

1. Notación, definiciones y resultados preliminares

En esta sección listamos algunas definiciones y teoremas bastante conocidos, con indicación de las correspondientes referencias.

Sea (X,d) es un espacio métrico. Definimos:

a. $P_f(X)=\{A\subset X : A \text{ no vacío y cerrado}\}$. $P_f(X)\cup\{\emptyset\}$ con la distancia de Hausdorff (véase la definición 1.4) es un espacio métrico ([4, pág. 6].
b. $\hat{P}_f(X)=P_f(X)\cup\{\emptyset\}$.
c. $P_{fc}(X)=\{A\subset X :\ A \text{ no vacío, cerrado y convexo}\}$
d. $\hat{P}_{fc}(X)=P_{fc}(X)\cup\{\emptyset\}$

Si X es un espacio de Banach $s-$ denotará la topología fuerte sobre X y $w-$ la topología débil sobre X. Dada una familia $\{A_n\}_{n\geq 1}\subset P_{fc}(X)$ definimos:

$$s\text{-}\underline{\lim} A_n=\{x\in X : x=\lim x_n,\ x_n\in A_n, n\geq 1\}$$

y

$$w\text{-}\overline{\lim} A_n=\{x\in X : x=w\text{-}\lim x_{n_k},\ x_{n_k}\in A_{n_k},\ n_1<n_2<\ldots<n_k<\ldots\}.$$

Definición 1.1. Sean X y Y conjuntos. Una *correspondencia* $\varphi : X \to Y$ es una relación que asocia a cada elemento $x \in X$ un subconjunto no vacío $\varphi(x) \subseteq Y$.

Observemos que en esta definición aparece un *abuso de notación*, pues en sentido estricto una correspondencia es una *función multívoca*, es decir, una función de X en el conjunto de las partes de Y.

Para cada $A \subset Y$ definimos la *imagen inversa superior* de A como:

$$\varphi^u(A) = \{x \in X : \varphi(x) \subset A)\}$$

y la *imagen inversa inferior* como:

$$\varphi^\ell(A) = \{x \in X : \varphi(x) \cap A \neq \emptyset\} \ .$$

Definición 1.2. Sean X y Y espacios topológicos. Una *vecindad de un conjunto* $A \subset X$ es un conjunto $B \subset X$ para el cual hay un conjunto abierto $V \subset X$ que satisface $A \subset V \subset B$. Cualquier conjunto abierto V que satisface $A \subset V$ se llama una *vecindad abierta* de A. La correspondencia $\varphi : X \to Y$ es *hemicontinua superiormente* (abreviadamente: h.c.s) en $x \in X$ si para cada vecindad abierta G de $\varphi(x)$, $\varphi^u(G)$ es una vecindad abierta de x en X.

Definición 1.3. Sean X y Y espacios topológicos. La correspondencia $\varphi : X \to Y$ es *hemicontinua inferiormente* (abreviadamente: h.c.i.) en $x \in X$ si para cada conjunto abierto G tal que $\varphi(x) \cap G \neq \emptyset$, la imagen inversa inferior $\varphi^l(G)$ es una vecindad abierta de x en X.

Decimos que la correspondencia φ es *continua* si es h.c.s y h.c.i.

Definición 1.4. Sea (X, d) un espacio métrico fijo. Para cada par de subconjuntos no vacíos A y B de X definimos

$$h(A, B) = \max\left\{\sup_{a\in A} d(a, B), \sup_{b\in B} d(b, A)\right\} \ ,$$

donde $h(A, B) = \infty$ está permitido. Este valor lo llamamos la *distancia de Hausdorff* entre A y B relativa a la métrica d. La función h se llama la *métrica de Hausdorff inducida por d.*

Si ambos A y B son d-acotados entonces es claro que $h(A, B) < \infty$.

La siguiente definición extiende la noción de contracción de espacios métricos al caso de las correspondencias.

Definición 1.5. Sean (X, d) un espacio métrico y h la métrica de Hausdorff inducida. Una correspondencia $\varphi : X \to X$ es una $c-$*correspondencia* (o correspondencia que es una contracción) sobre X si

(i) sus valores son conjuntos no vacíos, cerrados y d-acotados en Y; y
(ii) hay una constante $0 < c < 1$ que satisface

$$h(\varphi(x), \varphi(y)) \leq c\, d(x, y) \ ,$$

para todo $x, y \in X$.

La constante c se dice el *módulo de contracción* de la correspondencia φ.

Sean X y Y dos espacios métricos. Decimos que la correspondencia $\varphi : X \to Y$ satisface la propiedad $(*)$ si cada vez que $x_n \to x$ y $y_n \in \varphi(x_n)$ para cada n, entonces la sucesión $\{y_n\}$ tiene un punto límite en $\varphi(x)$.

Teorema 1.1. *Sean X y Y espacios métricos y $\varphi : X \to Y$ una correspondencia entre X y Y. Entonces:*

1. *Si $\varphi : X \to Y$ satisface $(*)$ entonces φ es h.c.s en x.*
2. *Si Y es compacto, $\varphi(x)$ es siempre un conjunto cerrado y h.c.s para todo x, entonces φ cumple la condición $(*)$.*

Demostración. Véase [1, pág. 468] o también [5, pág. 16].

Teorema 1.2. *Sean X y Y dos espacios métricos. Para una correspondencia $\varphi : X \to Y$ las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *La correspondencia φ es h.c.i. en un punto x.*
2. *Si $x_n \to x$, entonces para cada $y \in \varphi(x)$ existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ y elementos $y_k \in \varphi(x_{n_k})$ tales que $y_k \to y$.*

Demostración. Véase [1, pág. 468] o también [5, pág. 16].

Recordemos que si X es un espacio normado y $X^{**} = (X^*)^*$ denota al*bidual* de X, la aplicación canónica $x \mapsto \hat{x}$, definida por $\hat{x}(f) = f(x)$ para $f \in X^*$, es un encaje lineal isométrico de X en X^{**}. Cuando este encaje es sobreyectivo y X es un espacio de Banach, decimos que X es un *espacio de Banach reflexivo.*

Definición 1.6. Sea X un espacio de Banach. Decimos que la sucesión $\{A_n\}_{n\geq 1} \subseteq P_{fc}(X)$ converge a $A \subseteq X$ en el *sentido de Mosco* (y escribimos $A_n \xrightarrow{M} A$) si $s\text{–}\underline{\lim}\, A_n = w\text{–}\overline{\lim}\, A_n = A$. Claramente $A \in \hat{P}_{fc}(X)$.

Sea $\{A_n, A\}_{n\geq 1} \subseteq P_f(X)$. Decimos que $\{A_n\}$ converge a A en el *sentido de Hausdorff* (y escribimos $A_n \xrightarrow{h} A$ o $h-\lim A_n = A$), si $h(A_n, A) \to 0$, donde h es la métrica de Hausdorff sobre $P_f(X)$.

Teorema 1.3. *Sea X es un espacio de Banach. Si $\{A_n\}_{n\geq 1} \subseteq P_{fc}(X)$ y $A_n \xrightarrow{h} A$, entonces $A_n \xrightarrow{M} A$.*

Demostración. Véase [4, pág. 662] o también [5, pág. 40].

El siguiente teorema es la herramienta más importante para demostrar los resultados de este trabajo.

Teorema 1.4. *Sea X un espacio de Banach reflexivo. Si $\{A_n, A\}_{n\geq 1} \subseteq P_{fc}(X)$ $A_n \xrightarrow{M} A$ y $x_n \to x$ en X, entonces $d(x_n, A_n) \to d(x, A)$.*

Demostración. Véase [4, pág. 663] o también [5, pág. 43].

2. Resultados sobre $c-$correspondencias

En esta sección se presentan resultados que nos permitirán construir ejemplos de $c-$correspondencias que no son h.c.s ni h.c.i. A lo largo de ella supondremos que estamos trabajando con espacios métricos.

Teorema 2.1. *Sean $X \subset \mathbb{R}$, $\varphi{:}X \to X$ una $c-$correspondencia con módulo de contracción λ y $\psi{:}X \to Y$ una correspondencia con módulo β. Si definimos $\varphi \cup \psi : X \to Y$ por $(\varphi \cup \psi)(x) = \varphi(x) \cup \psi(x)$ para todo $x \in X$, entonces $\varphi\cup\psi$ es una $c-$correspondencia con módulo* $\max\{\lambda, \beta\}$.

Demostración. Sea $x' \in \varphi(x) \cup \psi(x)$. Supongamos que $x' \in \varphi(x)$ y $c = \max\{\lambda, \beta\}$. Como $\inf(A \cup B) \leq \inf A$ tenemos que

$$\sup_{x' \in \varphi(x) \cup \psi(x)} d(x', \varphi(y) \cup \psi(y)) \leq \sup_{x' \in \varphi(x)} d(x', \varphi(y)) \leq c d(x, y) \ .$$

Así mismo, si $x' \in \psi(x)$ tenemos que:

$$\sup_{x' \in \varphi(x) \cup \psi(x)} d(x', \varphi(y) \cup \psi(y)) \leq \sup_{x' \in \psi(x)} d(x', \psi(y)) \leq c d(x, y) \ .$$

Reuniendo estos dos resultados obtenemos

$$\sup_{x' \in \varphi(x) \cup \psi(x)} d(x', \varphi(y) \cup \psi(y)) \leq c d(x, y) \ .$$

Cambiando ahora x' por y' y x por y en el desarrollo anterior, obtenemos

$$\sup_{y' \in \varphi(y) \cup \psi(y)} d(y', \varphi(x) \cup \psi(x)) \leq c d(x, y)$$

y así $h(\varphi(x) \cup \psi(x), \varphi(y) \cup \psi(y)) \leq c d(x, y)$. ☑

Para un resultado más general véase [3, Teorema 3].

Teorema 2.2. *Sean $X \subset \mathbb{R}$ y $\varphi : X \to X$ una $c-$correspondencia con módulo de contracción α. Si $X' \subset X$ y $\psi{:}X' \to X'$ es una correspondencia cuyos valores son subconjuntos cerrados, no vacíos, tales que $\psi(x') \subset \varphi(x')$ para todo $x' \in X'$, entonces ψ es una $c-$correspondencia con módulo de contracción α.*

Demostración. Es claro que ψ tiene valores d-acotados. Como por hipótesis los valores que toma φ son subconjuntos cerrados, no vacíos, para demostrar el resultado solo tenemos que verificar que

$$d(\psi(x), \psi(y)) \leq \alpha \, d(x, y) \ .$$

Ahora bien, si logramos demostrar que $d(\psi(x), \psi(y)) \leq d(\varphi(x), \varphi(y))$ tendríamos que $d(\psi(x), \psi(y)) \leq \alpha \, d(x, y)$. Para ello recordemos que si $A \subset B$ entonces $\sup A \leq \sup B \subset \mathbb{R}$ y como $\psi(x') \subset \varphi(x')$ para todo $x' \in X'$, vemos que

$$\sup_{z \in \psi(x)} d(z, \psi(y)) \leq \sup_{z \in \varphi(x)} d(z, \varphi(y))$$

y

$$\sup_{z \in \psi(y)} d(z, \psi(x)) \leq \sup_{z \in \varphi(y)} d(z, \varphi(x))$$

Ahora por la definición de la métrica de Hausdorff $h(\psi(x), \psi(y)) \leq h(\varphi(x), \varphi(y))$, tal como queríamos. ☑

Ejemplo 1. La correspondencia $\varphi : (-\infty, \infty) \to (-\infty, \infty)$ definida como

$$\varphi(x) = \{x/2\} \cup \{x/2 + 1/2\} \ ,$$

es una $c-$correspondencia de módulo 1/2. En efecto, dado que $f(x) = x/2$ y $g(x) = x/2 + 1/2$ son $c-$correspondencias (ya que f y g son funciones que son contracciones con módulo 1/2), por el teorema 2.1, $\varphi = f \cup g$ es una $c-$correspondencia con módulo 1/2.

El siguiente ejemplo nos permitirá construir $c-$correspondencias continuas con valores convexos.

Ejemplo 2. Sea $X = \mathbb{R}$ y sea f una contracción con módulo α definida sobre $\mathbb{R}$. Consideremos $\varphi : X \to 2^X$ definida por $\varphi(x) = \{z \in X : 0 \leq z \leq f(x)\}$. Veamos que φ es una $c-$correspondencia. Nótese que de la definición de φ, la familia $\{\varphi(x) : x \in X\}$ está totalmente ordenada por inclusión. Dados $x \neq y$ en X, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\varphi(x) \subset \varphi(y)$. Se tiene que $d(z, \varphi(y)) = 0$ para todo $z \in \varphi(x)$, y así

$$h(\varphi(x), \varphi(y)) = \max\big\{0, \sup_{y' \in \varphi(y)} d(y', \varphi(x))\big\}.$$

Para todo $y' \in \varphi(y) \setminus \varphi(x)$ tenemos que

$$d(y', f(x)) = y' - f(x) \leq f(y) - f(x) = d(f(y), f(x)) \leq \alpha\, d(y, x) \ ,$$

pues f es una contracción de módulo α. Resumiendo:

$$h(\varphi(x), \varphi(y)) = \max\{0, \sup_{y' \in \varphi(y)} d(y', \varphi(x))\} \leq d(f(y), f(x)) \leq \alpha\, d(y, x)\,.$$

Es decir, φ es una $c-$correspondencia de módulo α.

3. Condiciones de hemicontinuidad

En esta sección se presentan los resultados centrales de este trabajo.

Teorema 3.1. *Sea φ una $c-$correspondencia tal que dada $x_n \to x$ en X, se tenga que $\varphi(x_n) \xrightarrow{M} \varphi(x)$. Entonces es φ es h.c.i.*

Demostración. Podemos usar la caracterización por sucesiones de h.c.i. (Teorema 1.2). Sea $x \in X$, $x_n \to x$, y $y \in \varphi(x)$. Como $\varphi(x_n) \xrightarrow{M} \varphi(x)$ tenemos que existe una sucesión $y_n \in \varphi(x_n)$ tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, teniendo la caracterización de hemicontinuidad inferior por sucesiones. ☑

El siguiente ejemplo nos muestra una $c-$correspondencia que no es hemicontinua inferiormente (h.c.i.)

Ejemplo 3. Sean $X = Y = \mathbb{R}$ y definamos la $c-$correspondencia φ como sigue:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \{x/2\} & \text{si } x < 1 \\ \{x/2 + 1/2\} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

En efecto, φ es una $c-$correspondencia por el teorema 2.2 y el ejemplo 1. Veamos que φ no es h.c.i. en $x = 1$. Para ello utilizaremos la caracterización por sucesiones de h.c.i. (teorema 1.2). Consideremos la sucesión $\{x_n\} = \{1 - 1/n\}$ la cual converge a 1. Ya que $\varphi(1)$=$\{1\}$ y $\varphi(1 - 1/n)$=$\{$1/2-1/2n$\}$, tomando $y = 1 \in \varphi(1)$ tenemos que para toda subsucesión $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$, si $y_k \in \varphi(x_{n_k})$ es convergente, entonces $\{y_k\}$ converge a $1/2$ y no a 1.

El siguiente ejemplo nos muestra una $c-$correspondencia que no es h.c.s.

Ejemplo 4. Sean X=[0,1] y

$$\varphi(x) = \begin{cases} \{x/2\} & \text{si } x \neq 1/2 \text{ y } x \geq 0 \\ \{x/2 + 1/2\} & \text{si } x \geq 1/2 \end{cases}$$

Nótese que φ es una $c-$correspondencia por el teorema 2.2 y el ejemplo 1. Tomemos la sucesión $\{1/2 + 1/n\}$ en X, que claramente converge a $1/2$. Sea $y_n \in \varphi(1/2 + 1/n)$, tal que $y_n = 1/4 + 1/2n$; es decir, $\{y_n\}$

converge a $1/4$, valor que no pertenece a $\varphi(1/2)$. Así usando el teorema 1.1 hemos mostrado que no es h.c.s.

Definición 3.1. Sea φ una $c-$correspondencia sobre X y sea $x \in X$. Decimos que φ satisface la propiedad (M) en x si dada la sucesión $x_n \to x$ en X, se tiene que $\varphi(x_n) \overset{M}{\to} \varphi(x)$, donde M es la convergencia en el sentido de Mosco.

Teorema 3.2. *Sea φ una $c-$correspondencia definida en un espacio de Banach reflexivo X y x un punto de X. Si φ toma valores convexos y satisface la propiedad* (M) *en x, entonces φ es continua en x.*

Demostración. Por el teorema 3.1, φ es h.c.i., de modo que es suficiente probar que φ es h.c.s. Sea $x_n \to x$ y sea $\{y_n\}$ una sucesión en X tal que $y_n \in \varphi(x_n)$. En virtud del teorema 1.1, para probar que φ es h.c.s, basta probar que $\{y_n\}$ tiene un punto límite $y \in \varphi(x)$. Veamos primero que $\{y_n\}$ es de Cauchy en X. Sea $\epsilon > 0$ dado y sea $l \in N$ tal que $d(x_n, x_m) < \epsilon$ para todo $n, m \geq l$.

Si α denota el módulo de contracción de φ se tiene

$$\begin{aligned} d(y_n, y_m) &\leq h(\varphi(x_n), \varphi(x_m)) \\ &\leq \alpha\, d(x_n, x_m) \\ &< \alpha\, \epsilon < \epsilon\ , \end{aligned}$$

para todo $n, m > l$. Como X es un espacio de Banach, $\{y_n\}$ converge a algún $y \in X$. Veamos que $y \in \varphi(x)$ y así φ es h.c.s. Como $\varphi(x_n) \overset{M}{\to} \varphi(x)$ y $y_n \to y$, por el teorema 1.4 tenemos que $\lim_{n\to\infty} d(y_n, \varphi(x_n)) = d(y, \varphi(x))$. Ahora bien, $y_n \in \varphi(x_n)$ para todo n. Por lo tanto, $d(y_n, \varphi(x_n)) = 0$ para todo n, y así $d(y, \varphi(x)) = 0$. Como φ es a valor cerrado (por definición de contracción) se tiene que $y \in \varphi(x)$. ☑

Corolario 3.2.1. *Sea φ una $c-$correspondencia definida en un espacio de Banach reflexivo X y sea $x \in X$. Si φ toma valores convexos y dada una sucesión $x_n \to x$ en X, se tiene que $\varphi(x_n) \overset{h}{\to} \varphi(x)$, entonces φ es continua en x.*

Demostración. Es un resultado inmediato del teorema 1.3 junto con teorema 3.2. ☑

Agradecimientos

El autor quiere agradecer al profesor RAFAEL AHUMADA del Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia, sede de Bogotá, a la profesora MARÍA LUISA COLOSANTE, profesor visitante en Arizona State University en el segundo semestre del 2002, y al anónimo revisor científico por sus observaciones y su ayuda en la preparación de la versión final del manuscrito.

Bibliografía

[1] CHARALAMBOS D. ALIPRANTIS & KIM C. BORDER, *Infinite Dimensional Analysis*. Springer-Verlag, Berlín, 1993.

[2] E. KLEIN, *Theory of Correspondences*. John Wiley & Sons,1984.

[3] S. B. NADLER, *Multivalued contraction mappings*. Pacific Journal of Mathematics. **30** (1969), 475-488.

[4] SHOUCHUAN HU & NIKOLAS S. PAPAGEORGIOU, *Handbook of Multivalued Analysis*. Kluwer Academic Publishers, 1997.

[5] SUAZO ERWIN, *Introducción a la teoría de correspondencias*. Trabajo de grado. Universidad Nacional de Colombia, 2000.

(Recibido en julio de 2003; versión revisada en diciembre de 2004)

ERWIN SUAZO
GRADUATE SCHOOL OF ARIZONA STATE UNIVERSITY
TEMPE, ARIZONA, EE. UU.
e-mail: suazo@mathpost.la.asu.edu