This is a reprint of
Lecturas Matemáticas
Volumen **25** *(2004), páginas 59–111*

Un siglo de teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales

Juan E. Nápoles Valdes
Universidad de la Cuenca del Plata, Argentina

Lecturas Matemáticas
Volumen **25** *(2004), páginas 59–111*

Un siglo de teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales

Juan E. Nápoles Valdes
Universidad de la Cuenca del Plata, Argentina

Abstract. In this essay, we present some ideas related to the development of the qualitative theory of ordinary differential equations, mainly to the techniques directly related to the theory of limit cycles.

Key words and phrases. Qualitative theory of ordinary differential equations, History of mathematics.

2000 Mathematics Subject Classification. Primary: 01A65. Secondary: 01A72

Resumen. En el trabajo presentamos algunas ideas relativas al desarrollo de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales ordinarias vinculadas, sobre todo a las técnicas relacionadas directamente con la teoría de ciclos límites.

1. Introducción

En los últimos 50 años hemos presenciado, un notable desarrollo de un campo de la física matemática, designado con el nombre de *mecánica no lineal.* Este término, probablemente, no es del todo correcto, pues los cambios no han ocurrido en la propia mecánica, sino mayormente, en las técnicas de resolución de sus problemas, sobre todo los tratados con ayuda de las ecuaciones diferenciales, que ahora se sirven de ecuaciones diferenciales no lineales.

Esta no es una idea nueva en la mecánica. En efecto, estos problemas no lineales son conocidos desde los estudios de EULER, LAGRANGE y otros geómetras, suficientes para ilustrar este período no lineal de más de un siglo. La principal dificultad de estos estudios, hoy clásicos, radica en la ausencia de un método general para tratar estos problemas, los cuales eran tratados sobre todo, con artificios especiales para obtener su solución. 1892 es un *annus mirabalis* en la formalización de métodos generales para la teoría de las ecuaciones diferenciales no lineales y la mecánica no lineal. LIAPUNOV y POINCARÉ,[1] convirtieron la nolinealidad en su objeto de estudio y aportaron métodos y conceptos fundamentales en el estudio de las ecuaciones diferenciales lineales y no lineales.

Ese año se publicó la famosa memoria de LIAPUNOV *Problema general de la estabilidad del movimiento* (en ruso), y el primer volumen del célebre *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste* de POINCARÉ, que marcaron un hito en el desarrollo de las ecuaciones diferenciales, en particular, cuando sus resultados son combinados con las nuevas técnicas matemáticas desarrolladas durante la pasada centuria[2]. Más estricto, algunos aspectos de estos trabajos han mostrado su conexión con la *teoría del caos*, el nuevo paradigma de las matemáticas y la física. Por ejemplo, los resultados de POINCARÉ sobre *movimientos cercanos a órbitas*

[1]Para mayores detalles biográficos de POINCARÉ (1854-1912) y LIAPUNOV (1857-1918) puede consultarse, por ejemplo, G. DARBOUX: *Eloge historique d'Henri Poincaré lu dans la séance publique annuelle du 15 décembre 1913*, Gauthier–Villars, París, 1913; A. T. GRIGORIAN: *Lyapunov, Alexandr Mijailovich, Dictionary of Scientific Biography* 8, New York (1970–1990), 559–563 y A. M. LUKOMSKAYA & V. I. SMIRNOV (eds.): *Aleksandr Mikhailovich Lyapunov*, Bibliografía, Moscow–Leningrad, 1953. Véase también http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Lyapunov.html.

[2]Para una mayor información técnica, consúltese por ejemplo J. MAWHIN: *The Centennial Legacy of Poincaré and Lyapunov in Ordinary Differential Equations*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, no. 34 (1994), 9–46 y J. E. NÁPOLES V. & C. NEGRÓN: *De la mecánica analítica a las ecuaciones diferenciales ordinarias*, LLULL (España), **17** (no. 32) (1994), 190–206 (un resumen de este trabajo fue publicado en el Bol. Soc. Cub. Mat. Comp., no. 15 (1993), 1–9).

homoclínicas y heteroclínicas y el concepto de LIAPUNOV de *números característicos*, hoy llamados *exponentes de Liapunov*.

Después de esa centuria de totalitarismo, se ha descubierto que las matemáticas pueden ser en ocasiones el estudio de estructuras y que la física puede ser la física cuántica. Y el común denominador de esta liberalización es la **no linealidad**.

La *teoría cualitativa* es una idea asombrosa, se ha desarrollado al hilo de una tradición alimentada por dos fuentes: de una recibe su caracterización teórica, programática; de la otra, su consistencia práctica y paradigmática. Según la primera, la teoría cualitativa es la unión de métodos y técnicas matemáticas de variados campos (análisis funcional, topología, etc.). Conforme a lo segundo, el paradigma de esta idea es la prueba rubricada por las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales; se ha dicho incluso que el primer rasgo característico de las ecuaciones diferenciales es sus aplicaciones[3].

Tomemos un sistema con dos grados de libertad, es decir, uno en el que podemos dibujar las figuras en el plano. A diferencia del péndulo, que también reside en el plano (o, al menos, sobre un cilindro, que es prácticamente lo mismo), este sistema no será hamiltoniano. De hecho, no corresponderá a ningún modelo físico particular. Se tratará de una construcción puramente matemática, pensada para ilustrar el comportamiento típico que presentaría un sistema con dos grados de libertad.

Puede recordarse que, dada una única ecuación diferencial, podemos visualizar el movimiento de todos los puntos iniciales posibles si pensamos en un fluido imaginario que corre a lo largo de las trayectorias de la ecuación. Si escogemos un punto de partida, es decir, un conjunto de condiciones iniciales para la ecuación, entonces las coordenadas de su movimiento subsiguiente son las soluciones de la ecuación diferencial para dicha condición inicial.

La imagen de cómo se ajustan estas líneas de flujo se denomina *retrato de fases* de la ecuación (Figura 1). “Retrato” parece ser suficientemente

[3]Basta echar un vistazo al desarrollo histórico de las ecuaciones diferenciales para comprobar tal afirmación.

claro, y es más imaginativo que muchos términos matemáticos. La curiosa palabra "fase", parece ser que proviene del campo de la ingeniería eléctrica. Las formas onduladas oscilantes tienen una *amplitud*, que nos dice lo grandes que son, y una *fase*, que nos indica el lugar del ciclo en que se encuentran. Si se representan ambas, se obtiene un dibujo en el plano.

El flujo se indica por líneas curvas, que corresponden a la evolución temporal de las coordenadas de varios puntos iniciales. Las flechas indican la dirección del movimiento a medida que transcurre el tiempo.

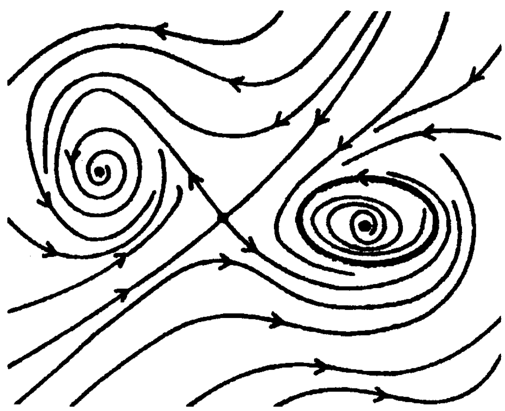


FIGURA 1. Retrato de fases de un flujo en un plano que muestra (de izquierda a derecha) un sumidero, una silla de montar, un ciclo límite y una fuente.

Nótese cómo el flujo encaja en su conjunto: las flechas en las curvas más próximas se hallan alineadas bastante más juntas. Esto significa que el fluido imaginario, cuyo flujo está representado por las líneas, no se separa: el movimiento es continuo.

Existen cuatro características de este flujo particular sobre las cuales me gustaría llamar la atención.

Primero, en la parte izquierda hay un punto hacia el cual confluyen en espiral todas las líneas de flujo próximas. Se le conoce como sumidero. Es bastante similar a un tubo de desagüe. Enfrente, en la parte derecha, hay un tubo de desagüe al revés, un punto a partir del cual el fluido se desparrama en espiral. Se le llama *fuente*. Piénsese en el agua saliendo a borbotones de un manantial.

En la parte central existe un lugar donde las líneas de flujo parecen cruzarse. Se le conoce como *silla de montar* (o *punto de silla*). De hecho, las líneas no se cruzan; sucede algo más interesante, si dos chorros de un fluido real chocan uno con el otro, se ven estas sillas de montar.

Finalmente, rodeando la fuente, a la derecha, hay un bucle que se cierra una sola vez. Este es un *ciclo límite*. Se parece a un remolino, donde el fluido gira y gira. Un torbellino. Hablando *grosso modo*, los flujos en el plano poseen estas características (algunas o todas), y nada más verdaderamente típico. Puede que haya más de una de estas características, pero no se encontrará nada más complicado. Pero, primero, pongámonos nosotros mismos al corriente más detalladamente con respecto a estas cuatro características fundamentales de los flujos en el plano, es decir, de las ecuaciones diferenciales con dos grados de libertad.

Sumideros. Un sumidero (Figura 2) es un lugar en donde una línea de flujo degenera para convertirse en un único punto, hacia el cual confluyen todos los puntos vecinos. Si el sistema inicia su movimiento en el punto central de un sumidero, no sucede nada. Simplemente se queda ahí. Así pues, el sumidero representa un estado estacionario del sistema. Por ejemplo, un pedazo de masa de repostería en un recipiente de los usados para batir puede permanecer en reposo en el fondo.

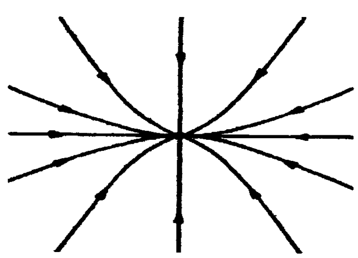


Figura 2. Un sumidero

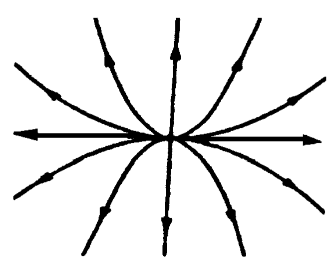


Figura 3. Una fuente

Mientras tanto, si el sistema comienza su movimiento por un punto próximo al sumidero, se moverá hacia él. Si se deja el pedazo de masa un poco en la parte superior de las paredes del recipiente, resbalará de un modo pegajoso hacia abajo, hasta que alcance el fondo y se pare (estoy usando masa pegajosa para introducir la fricción: si se usase una bolita sin fricción, tendríamos un sistema hamiltoniano y sucedería algo bastante diferente).

Esto significa que el estado estacionario en un sumidero es *estable*. Si tomamos el punto que representa el estado de un sistema y lo alejamos un poco del sumidero, entonces dicho punto gira en espiral dirigiéndose de nuevo hacia el punto de donde partió. Si se empuja la masa un poquito hacia arriba por la pared del recipiente, rodará hacia abajo. Los sumideros son, pues, estados estacionarios estables.

Fuentes. Las fuentes (Figura 3) son también estados estacionarios. Pero, ahora, los puntos vecinos se alejan. Es como un pedazo de masa colocado sobre un recipiente volcado. Si se tiene mucho cuidado, puede conseguirse que esté quieto en la parte superior, pero si se le da un leve empujón, resbala por las paredes y cae. Es decir, el estado estacionario es inestable. Recuérdese que el pedazo de masa sólo es muy ligeramente pegajoso: no se adherirá a una pendiente. Y piénsese en un recipiente con un fondo redondeado, no con uno plano. Quizás una analogía mejor consista en tratar de poner en equilibrio un canto rodado encima de otro. Puede hacerse -con cuidado-, pero resbalará con sólo una brizna de viento.

Sillas de montar. Las sillas de montar (Figura 4) son más interesantes. También son ese tipo de cosas en las que sólo pensaría un matemático, excepto que la madre Naturaleza tiene todavía una imaginación más viva. En cierto sentido, son estados estacionarios que son estables en algunas direcciones e inestables en otras.

Imaginemos un jinete con poca experiencia montado en un caballo, sobre una silla que ha sido engrasada. Si el jinete se mueve hacia adelante o hacia atrás en la silla, simplemente se deslizará retrocediendo a la posición central. Pero si empieza a resbalar hacia los lados, volcará. Su posición es estable con respecto a los desplazamientos hacia adelante y hacia atrás; inestable con respecto a los desplazamientos laterales. Debido a este tipo de analogía, a tales puntos se les da el nombre de "sillas de montar".

El punto de en medio de la "cruz", el punto de silla propiamente dicho, es -igual que todas las trayectorias que se reducen a puntos únicos- un estado estacionario. Dos líneas de flujo se denominan las *separatrices* de la silla. Se designan de esta forma porque separan el modo en que fluyen puntos próximos. Imaginémonos recorriendo una separatriz desde la izquierda de la Figura 4. Si empezamos justo por encima de ella, daremos un giro brusco hacia la izquierda a medida que nos aproximemos ni punto de silla; si empezamos por abajo, efectuaremos un giro brusco hacia la derecha.

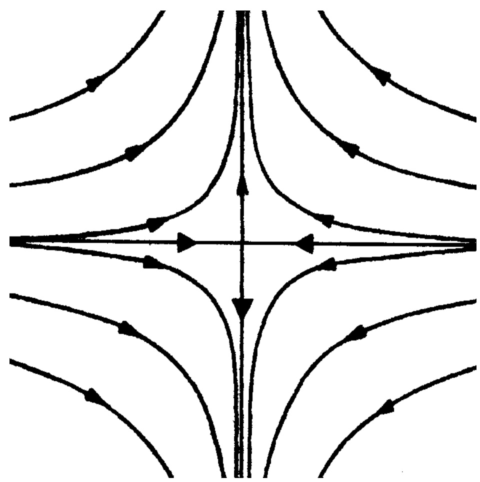


Figura 4. Una silla de montar: las líneas que se cruzan en el centro son sus separatrices.

Parece como si se estirase el flujo hasta desgarrarse en el punto de silla. Pero dije anteriormente que no es así. Esto es debido a que las separatrices no pasan realmente por el punto de silla, en el sentido siguiente: si nos aproximamos al punto de silla a lo largo de su separatriz, nos costaría un tiempo infinito alcanzarlo. Así, en las proximidades de dicho punto, el flujo se vuelve infinitamente lento. El fluido se estiraría los lados, pero no se desgarra.

Podríamos pensar que las sillas son menos comunes que las fuentes y los sumideros. Pero, de hecho, no lo son. Expondremos otra analogía, que ayuda a explicar por qué. Imaginemos un paisaje montañoso, y pensemos en qué lugares es horizontal el suelo (o, al menos, el plano tangente). Hay picos, puntos desde los cuales cualquier dirección es hacia abajo, análogamente a las fuentes. Hay depresiones, desde las cuales cualquier dirección es hacia arriba, análogamente a los sumideros.

Y hay curvas, en donde algunas direcciones son hacia arriba y otras son hacia abajo, estos son análogos a las sillas.

En un país de montañas, los pasos son tan comunes como los picos y las depresiones. Mírese un mapa de los Alpes suizos. Por similitud, las sillas son tan comunes como las fuentes y los sumideros. Puede vérselas, por ejemplo, en las isobaras de los mapas del tiempo, así como los bucles cerrados que están indicados por *altas* o *bajas*, que rodean las fuentes y los sumideros de presión. Las isóbaras se representan a unas determinadas presiones, múltiplos de 10 milibares. De este modo, raras veces se ven las separatrices en sí mismas, con su forma de "cruz" característica; pero se puede reconocer su presencia por las cuatro curvas "dándose la espalda" que aparecen en las proximidades.

POINCARÉ, y BENDIXSON[4], demostraron un teorema que prueba que "típicamente" sólo tienen lugar estos cuatro tipos de comportamiento en un sistema de ecuaciones diferenciales en el plano. Pero no es cierto que toda ecuación diferencial tenga sólo estas cuatro características. Se pueden inventar cosas más complicadas fácilmente: lugares donde se cruzan tres líneas, o ciclos límites que son estables por dentro e inestables por fuera.

---

[4]IVAR OTTO BENDIXSON (1861-1935). Matemático sueco, professor en la Stockholm University y Royal Technological Institute, desde 1911 hasta 1927 fue rector de la universidad. Hizo contribuciones importantes en álgebra y análisis, aunque es seguramente más recordado por el teorema de Poincaré-Bendixson, que ocupa un lugar central en nuestro trabajo. Mayores detalles en Bendixson, Ivar Otto, Svenskt Biogra.skt Lexikon 3 (Stockholm, 1922), 146–150 y L. Garding: Mathematics and Mathematicians: Mathematics in Sweden before 1950, Providence, RI, 1998, págs. 109–112.

Aquí es donde aparece la palabra típica. En un sentido que puede hacerse perfectamente preciso, pero a expensas de tecnicismos, tales como hablar de epsilon-homeomorfismos, cosas que consideramos no adecuadas para este trabajo, puede demostrarse que tales excepciones son infinitamente raras. Si sumideros, fuentes, sillas y ciclos límites son como cuando al lanzar una moneda sale cara o cruz, entonces, las excepciones son como cuando sale canto. Sí, en teoría puede suceder; pero, en la práctica, no lo hace.

En nuestro trabajo mostraremos algunas de las tendencias actuales de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales ordinarias vinculadas, sobretodo, a las técnicas relacionadas directamente con la teoría de ciclos límites, y como este desarrollo puede ser ilustrado mediante el propio avance conceptual y metodológico de las ecuaciones diferenciales ordinarias[5]. En cualquier caso, como veremos en el trabajo, las diferentes vías de análisis del desarrollo de la teoría de ciclos límites, convierten a esta en un interesante núcleo de problemas[6].

---

[5]Véase J. E. Nápoles & C. Negrón, *ob. cit.*, y los trabajos del autor *El legado histórico de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Consideraciones (auto)críticas*, Boletín de Matemáticas, **5**(1998), 53–79 (http://www.matematicas.unal.edu.co/revistas/boletin/vol5n1/98050105.pdf), *Del caos y esas cosas. Una introducci ón comentada a la matemática contemporánea*, Revista Argentina de Enseñanza de la Ingeniería, Año 2, **No. 3**, 2001, 65-74 y *Ley, orden y caos en el Universo*, Revista Argentina de Enseñanza de la Ingeniería, Año 2, **No. 4** (2001), 67–76.

[6]En un marco general sobre las perspectivas actuales en Filosofía e Historia de las Matemáticas sobre el conocimiento matemático, se deben destacar los ensayos de Morris Kline: *Matemática. La pérdida de la certidumbre*, Madrid: Siglo XXI, 1985, y de R. Hersh: *Experiencia matemática*, Barcelona: Labor, 1988, así como los trabajos de Mark Steiner: *Mathematical Knowledge*, Ithaca: Cornell University Press, 1975, por su agudeza crítica; Raymond L. Wilder: Mathematics as a Cultural System, New York/Oxford: Pergamon Press, 1981, una visión próxima (aunque un tanto superficial) a un sentir hoy común sobre los aspectos culturales, sociales e históricos del desarrollo de las matemáticas; Philip Kitcher: *The Nature of Mathematical Knowledge*, New York/Oxford: Oxford University Press, 1983, como perspectiva general del campo temático con singular atención a algunos puntos (e.g. la discusión del presunto estatuto a priori del conocimiento matemático, el cambio histórico en Matemáticas, la rigorización) y Mary Tiles: *Mathematics and the Image of Reason*, London/ New York: Routledge, 1991 una síntesis histórica-filosófica apropiada.

No deja de ser sorprendente que hoy día (en la onda postmoderna del autodenominado pensamiento débil, en pleno auge del falibismo y de otras epistemologías desilusionadas), dispongamos de algunos algoritmos efectivos que nos llevan lógicamente en una serie finita de pasos a resultados exactos (y nos hacen saber que ciertas clases de problemas son solubles, aunque sólo sea en ámbitos matemáticos de reducido alcance), y de patrones de desarrollo que nos dan a conocer la necesidad o la imposibilidad racional de algo, sin descartar, por supuesto, las palabras de MORRIS KLINE al ilustrar el estado actual de la teoría de la demostración cuando afirma que "...las demostraciones de una generación son las falacias de la siguiente."[7]

2. Ciclos límites como signos de los tiempos

Aquí no me referiré a las investigaciones del plano de fases vinculadas a la teoría de la estabilidad, a excepción de las necesarias para la correcta comprensión de la exposición. Para mayor claridad, hemos dividido la presentación, en diversos epígrafes.

Naturalmente, los apuntes presentados no pasan de ser un inventario provisional y abierto por diversos motivos. Sin embargo, no dejan de ser, creo, un tanto elocuente. Es un tema que, desde luego, no nos dirá gran cosa de las múltiples direcciones de la teoría cualitativa, pero si reviste cierta importancia para la historia de las ecuaciones diferenciales ordinarias por su valor de síntoma. Por otro lado, la consideración de esta suerte de indicios indirectos y sintomáticos tiene hoy el interés añadido de servir como una aplicación o puesta a prueba de una perspectiva historiográfica, la llamada teoría de la recepción, recientemente invocada para renovar la historia de las matemáticas[8]. En suma, el desarrollo de la teoría de ciclos límites (aún incompleta) puede ilustrar las posibilidades y limitaciones de la teoría de la recepción, al tiempo que

[7]Véase M. KLINE, ob.cit., pág. 384.

[8]Consulte el manifiesto de J. MCCLEARY: *A Theory of Reception for the History of Mathematics*, en *The History of Modern Mathematics* (eds. D. ROWE & J. MCCLEARY), New York, 1989, vol. 1: *Ideas and their Reception*.

nos da una información (al menos indirecta y complementaria) sobre la suerte de la teoría cualitativa en los tiempos modernos. A principios de la década de 1960, un topólogo americano, Stephen Smale[9], retomó la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales donde la habían dejado Poincaré y sus sucesores, especialmente George David Birkhoff. La topología había avanzado mucho durante el medio siglo transcurrido: puede que el momento fuera el adecuado para el progreso. Y aunque la mayoría de los topólogos habían olvidado que la topología provenía de problemas físicos, Smale no lo había olvidado.

He de mencionar ahora que entre Poincaré y Smale realizaron importantes contribuciones a la dinámica (únicamente estoy seleccionando el hilo de un rico tapiz). Como dije al comienzo Liapunov, introdujo los llamados *exponentes de Liapunov*, que se emplean corrientemente como un método para detectar la presencia del caos. El trabajo de Aleksandr Andronov, Aleksandr Adolfovich Vitt y S. E. Khaikin sobre los osciladores no lineales, junto con las ideas topológicas básicas de Solomon Lefschetz, merecen una mención especial en una sección posterior. La escuela rusa fundada por Andrei Kolmogorov ha hecho numerosos descubrimientos fundamentales, inspirados por la teoría cinética de la dinámica de los gases. En particular, tomó la noción de entropía, previamente un concepto de termodinámica, y la definió para un sistema dinámico arbitrario. El *criterio de Kolmogorov-Sinai*, sobre la entropía no nula, es uno de los más fiables para el caos. D. V. Anosov introdujo y estudió una clase importante de sistemas caóticos, y Ya. G. Sinai fue la primera persona que demostró el resultado extremadamente difícil de que un sistema de partículas elásticas, simulando un gas, se comporta, de hecho, caóticamente. Vladimir Arnold tiene una influencia tremenda en el desarrollo de la dinámica moderna, especialmente en los sistemas hamiltonianos, quizás con esto bastaría, pero nombres como Pontriaguin, Chetaev, Barbashin, Krasovski, Bogdanov, entre otros, son más que suficientes para ilustrar la importancia de la escuela rusa (ver el Apéndice para detalles específicos de la Escuela de Gorki). La escuela norteamericana tenía en Smale un abanderado ilustre.

[9](1930-¿?).

SMALE tenía una mente muy original. En su tesis doctoral demostró un teorema general que implica, entre otras muchas cosas, que se le puede dar la vuelta a una esfera (sin romperla) cambiando el interior con el exterior[10]. Está permitido pasarla a través de ella misma; pero ha de permanecer lisa, sin pliegues en ningún lugar ni en ningún momento. Esto sonaba tan extraño que su director de tesis no podía creerlo, pero resultó que SMALE estaba en lo cierto. Sin embargo, no fue hasta muchos años después cuando alguien consiguió hacerlo exactamente. Una de las personas que lo realizó, el matemático francés BERNARD MORIN, lo hacía ciego. En realidad, visualizar no es la palabra adecuada. La intuición, no la vista, es lo que se necesita para la topología. SMALE fue el topólogo más destacado de la época, responsable de varios otros descubrimientos importantes, incluyendo la primera demostración, en cinco o más dimensiones, de un problema que POINCARÉ propuso en 1906, y que el resto de las personas pensaba que era impenetrable.

Para destacar el nuevo punto de vista, SMALE usó el término *sistema dinámico* en lugar de "sistema de ecuaciones diferenciales". Y pensó en los sistemas dinámicos en términos de su geometría, la topología del retrato de fase, en lugar de las fórmulas empleadas para definirlos. De hecho, él raramente escribió fórmula alguna. Esto tendía a confundir a los teóricos de las ecuaciones diferenciales clásicas. SMALE llegó a ponerlos furiosos al bombardearlos con conjeturas que ellos ya sabían que eran falsas. Pero esto no era más que su modo de abordar el verdadero problema; y pronto los bombardeó con verdaderos teoremas que sorprendieron, incluso, a los más expertos.

Entre las primeras cuestiones que se preguntó había una muy natural: ¿cuál es el análogo en tres (o más) dimensiones del teorema de Poincaré-Bendixson? O sea, ¿cuál es la lista de formas típicas en que se comporta un sistema de ecuaciones diferenciales?

[10]Llamado la *eversión de la esfera*. Véase, por ejemplo, FRANCIS, G.; J. M. SULLIVAN; R.B. KUSNER; K.A. BRAKKE; C. HARTMAN & G. CHAPPELL: *The minimax sphere eversion, in Visualization and Mathematics*, eds. HEGE & POLTHIER, Springer, 1997, págs. 3–20, que contiene un esbozo histórico y láminas a colores muy ilustrativas.

POINCARÉ ya había comenzado a estudiar esta cuestión. Halló todas las clases típicas posibles de estado estacionario. Hay cuatro. Son las fuentes, los sumideros y dos tipos diferentes de sillas de montar. Una fuente todavía tiene todos los puntos próximos moviéndose hacia fuera, y un sumidero es lo opuesto de una fuente. Una silla de montar puede tener una superficie de puntos que se mueven hacia fuera y una línea de puntos que se mueven hacia adentro, o una línea de puntos que se mueven hacia afuera y una superficie de puntos que se mueven hacia adentro.

Por supuesto, se pueden encontrar ciclos límite en el espacio tridimensional, pero ahora son de tres clases: estables, inestables y con forma de silla de montar.

Eso parecía ser todo. Nadie había encontrado otras pautas de flujo típicas.

2.1. Ciclos Límites. Los ciclos límites son realmente interesantes. Si empezamos en uno (Figura 5), siempre estaremos dando vueltas, repitiendo constantemente el mismo movimiento. El movimiento es periódico. Hay dos tipos básicos de ciclo límite. El que se muestra en la figura de abajo es un ciclo límite estable: los puntos próximos se mueven hacia él. También existe un ciclo límite inestable: los puntos próximos se alejan de él (para dibujarlo, basta con invertir todas las flechas de dicha figura).

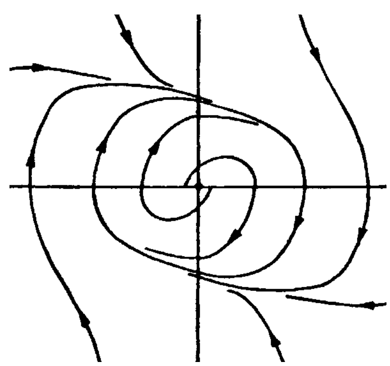


FIGURA 5. Un ciclo limite estable es un bucle cerrado hacia el cual convergen las trayectorias vecinas

Los círculos límites difieren de las fuentes, de los sumideros y de las sillas en que no podemos detectarlos mirando únicamente cerca de un punto. Hemos de observar toda una región. Esto es lo que hace más difícil detectar el movimiento periódico que los estados estacionarios. También lo hace mucho más interesante matemáticamente hablando.

En 1927, un ingeniero eléctrico holandés llamado BALTHASAR VAN DER POL encontró un ciclo límite extremadamente importante. Este tiene lugar en un modelo matemático de una válvula electrónica (lo que se conoce como tubo de vacío en los Estados Unidos de América). Éstas se usaban en las radios hasta que en 1947 WILLIAM SHOCKIEY, JOHN BARDEEN y WALTER BRATTAIN, de los laboratorios de la *Bell Telephone*, inventaron el transistor. Un análisis matemático similar también se aplica a los transistores. El *ciclo límite de Van der Pol* corresponde a una válvula oscilante: que da lugar a una forma ondulada la cual va hacia arriba y hacia abajo repetidamente. Suena como un silbido o un chirrido.

Las ondas de radio oscilantes son la base de la transmisión por radio. La idea es comenzar con una onda regular que oscila muy rápidamente y entonces cambiar su forma de acuerdo con el sonido que se supone que representa. Las dos formas estándares para hacer esto son la modulación de la amplitud (AM) y la modulación de la frecuencia (FM). La primera cambia el tamaño de la onda mientras que la segunda cambia el espaciado entre las ondas. Pero primero se necesita un oscilador regular, para poder tener algo que modular. De este modo, el ciclo límite en el oscilador matemático de Van der Pol tiene importantes consecuencias para la tecnología. Es reconocido que uno de los descubrimientos fundamentales de POINCARÉ, es el establecimiento de la existencia de estos ciclos límites que, como dije, pueden ser clasificados en *estables* (E), *inestables* (I) y *semiestables* (S). Estos ciclos límites, son estructuras críticas a las cuales están vinculadas casi todas las nociones que indicaremos.

Estas nociones serán más completas si las consideramos *estructuras topológicas*. Así tenemos que en el interior de un ciclo límite E existe un punto singular I; análogamente, en el interior de un ciclo límite I, existe un punto singular E. De esta forma, la historia de un fenómeno oscilatorio puede brindarse completa. En el caso de un ciclo límite E, la trayectoria se *desarrolla* a partir del punto singular I y se *enrolla* sobre el ciclo límite por el interior. Para los ciclos límites I, tenemos el caso contrario. Estas observaciones son válidas para las trayectorias exteriores.

Es común designar el primer caso por el símbolo IE y el segundo por EI; la primera letra se refiere a la estabilidad del punto singular y la segunda a la estabilidad del ciclo límite.

La mayor parte de los fenómenos que nos encontramos en las aplicaciones son caracterizados por la configuración IE, baste como ejemplo la ecuación de Van der Pol $x'' + \mu(x^2 - 1)x' + x = 0$, que más se encuentra en la teoría de las oscilaciones *autoentretenues*.

Otras configuraciones simples que nos podemos encontrar, son las así llamadas *policíclicas* que designaremos por el símbolo $IEIE\ldots$ o bien $EIEI\ldots$; la primera letra se refiere a la estabilidad del punto singular, centro de la configuración, y las otras a la estabilidad de los ciclos sucesivos hasta el exterior. Una configuración del género EIE será llamada una *excitación dura*.

Estas generalizaciones son debidas a Poincaré, quien las estudió también, cuando existen varios puntos singulares en el interior de un ciclo. En este caso, cada punto es caracterizado por su índice. Llamaremos índice de la curva asociada al campo de vectores, al número entero de veces (generalmente 1) que el vector regresa con relación a su posición; este número j es positivo si el vector regresa en el mismo sentido que el punto C_0 de contacto del campo con la curva, en caso contrario, j es tomado con signo menos.

Exactamente él demostró el siguiente resultado:

> *Para que una curva cerrada, conteniendo un número de singularidades con índices $+1$ y -1, sea un ciclo debe suceder que*
>
> $$\sum_{j=1}^{n} j = +1 \ .$$

El mostró que los nodos, los focos y los centros tienen el número $j = +1$, mientras que el punto de silla posee $j = -1$.

La determinación directa de un ciclo límite a partir de una ecuación diferencial es una tarea muy difícil. La dificultad radica en que para determinar la existencia de un ciclo, el conocimiento de la ecuación diferencial (o sea de sus parámetros) no es suficiente. Es necesario conocer la *naturaleza de la solución* (generalmente desconocida) de suerte que estamos en un círculo vicioso.

Sin embargo, algunas tentativas han tenido éxito, así el *criterio de Bendixon*[11], permite decidir sobre la ausencia de ciclos límites. Existe también un *criterio positivo*, debido a POINCARÉ y BENDIXON. Este criterio permite usar una analogía hidrodinámica que identifica los elementos singulares (puntos singulares, ciclos) como flujos positivos y los elementos estables (puntos singulares, ciclos) como flujos negativos. Esta analogía es muy útil, en las cuestiones del análisis de la estructura topológica del plano de fases.

Para sistemas dinámicos sobre el plano o sobre la esfera, estos resultados han sido generalizados por Denjoy[12] para el caso del toro y por L. SCHWARTZ[13] para cualquier variedad de dimensión 2.

[11] *Sur les courbes définies par des équations différentielles*, Acta Math., **24** (1901), 1–88.

[12] ARNAUD DENJOY (1884-1974). Matemático francés. Alumno de BOREL, PAINLEVÉ y EMILE BOREL en la *École Normal Supérieure*, donde se graduó en 1906, pasando a la Fondation Thiers donde preparó su disertación de 1909: *Sur les produits canoniques d'ordre infini.* Fue profesor en Montpellier, Utrecht y París. Por sus conocidos aportes a la teoría de funciones de una variable real, recibió muchos honores, fue elegido a la *Académie des Sciences* en 1941, perteneció a diversas academias en la URSS (laureado con la Medalla M.V. Lomonosov de Oro en 1970), Amsterdam, Warsaw, and Liège. En 1954 recibió el honor de ser elegido Vicepresidente de la IMU. Véase mayores detalles en http://www-gap.dcs.stand.ac.uk/~history/Mathematicians/Denjoy.html

[13] Matemático francés (1915-2002). Graduado de la École Normal Supérieure en 1937, obtuvo su doctorado en Strasbourg en 1943. Las principales contribuciones de SCHWARTZ a la matemática, están referidos a la *teoría de las distribuciones.* Medalla Fields en 1950, recibió muchísimos más premios, entre los que se destacan los de la *Académie des Sciences de Paris* en 1955, 1964 y 1972. En 1972 fue electo miembro de la Academia. También recibió doctorados honoríficos de muchas universidades, incluyendo Humboldt (1960), Bruselas (1962), Lund (1981), Tel-Aviv (1981), Montreal (1985) y Atenas (1993). Consúltese también: http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Schwartz.html para detalles adicionales.

En el caso de la ecuación $u'' + h(u)u' + g(u) = 0$, que cuando $g(u) = u$ es la llamada ecuación de Liénard, se puede demostrar, bajo ciertas condiciones, la existencia de una única solución periódica. Problemas de este tipo se remontan a B. Van der Pol[14] y Liénard[15], resultados análogos, concernientes a la ecuación $u'' + h(u, u')u' + g(u) = e(t)$, fueron dados por Levinson, Langenhop y Opial más adelante y aún hoy son motivo de continuos refinamientos[16].

2.2. Teoría de la bifurcación. En los trabajos concernientes a los problemas cosmogónicos[17], Poincaré estudió la influencia de un parámetro ℓ de la ecuación diferencial sobre la naturaleza de las soluciones. Introdujo la definición siguiente (es claro que la solución depende de este parámetro):

1. Si para pequeñas variaciones del parámetro, digamos $\ell = \ell_0$, la solución de la ecuación diferencial, varía solamente de forma cuantitativa, este valor ℓ_0 se denomina 'valor ordinario' del parámetro ℓ.
2. Si, por el contrario, para un cierto valor $\ell = \ell_0$, esta variación entra ña un cambio cualitativo de la solución, este valor ℓ_0 se llamará un 'valor crítico' o de 'bifurcación'.

En este artículo de 1885, Poincaré estudia, entre otras, la cuestión de cuáles son las formas posibles de equilibrio de una masa de fluido homogéneo (sujeto a la gravedad) cuando gira alrededor de un eje fijo con un momento angular constante w, llegando a la conclusión de que para ciertos valores w_0 y w_1 existe una 'bifurcación' en las formas de equilibrio. Años más tarde (1892-1899) el mismo Poincaré en su *Les*

[14] (1889-1959). *On oscillation hysteresis in a triode generator with two degrees of freedom*, Philos. Mag. (6) **43** (1922), 700-719.

[15] Alfred–Marie Liénard: *Étude des oscillations entretenues*, Revue Générale de l'Electricité **23** (22) (1928), 901–954.

[16] Consulte la tesis doctoral del autor: *Comportamiento cualitativo de las trayectorias de sistemas no autónomos de ecuaciones diferenciales ordinarias* (Universidad de Oriente, Santiago de Cuba, 1994), donde se presenta un desarrollo histórico bastante completo de la teoría cualitativa de sistemas bidimensionales.

[17] Acta Math. **7** (1885): *Figures d'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation*, París 1905.

méthodes ... plantea un problema de bifurcación para estudiar, como ya dijimos, un sistema dinámico dependiente de un parámetro.

Cabe destacar también a LIAPUNOV, el cual desarrolló en la primera década del pasadosiglo, una serie de trabajos, publicados en 1908, relativos al fenómeno de la bifurcación y que siguen teniendo mucha influencia aún hoy día.

Con posterioridad, son de gran interés los estudios de V. KARMAN (1910), L. LANDAU (1944) y de E. HOPF, quien en 1942 hizo un trabajo completo sobre la bifurcación de soluciones periódicas a partir de una posición de equilibrio. Por último recordemos a CRANDALL y a RABINOWITZ cuyos trabajos en los últimos años, aportan una serie de resultados de gran importancia en los problemas de bifurcación. De la propia definición de valor de bifurcación, y siguiendo a ANDRONOV[18] y PONTRIAGUIN[19] , se deduce que para $\ell = \ell_0$ el sistema es no rudo.

[18]ALEXANDER A. ANDRONOV (1901-1952), científico ruso sobresaliente, una de las personas más prominentes en la teoría de sistemas dinámicos y uno de los pioneros de la ciencia nolineal. Fue también un gran tutor de investigación para muchos científicos y estudiantes, el creador de la mundialmente conocida Escuela de Gorky de oscilaciones nolineales, y coautor de varios famosos libros que jugaron un papel importante en la instrucción de muchas generaciones de científicos "nolineales" en la anterior Unión Soviética y en todo el mundo. Estos incluyen *Teoría de oscilaciones* por ANDRONOV, VITT & KHAIKIN, *Teoría cualitativa de sistemas dinámicos en el plano*, en dos volúmenes, y *Teoría de la bifurcación de sistemas planos* por ANDRONOV, LEONTOVICH, GORDON & MAIER. Sin exageración se puede decir que ALEXANDER ANDRONOV es uno de los científicos que formaron la cara moderna de la teoría de oscilaciones nolineales de sistemas dinámicos. Sus enfoques a la ciencia y la educación, la penetración profunda en el progreso futuro de la ciencia nolineal, así como su personalidad brillante hace que persista en la memoria de sus numerosos alumnos, de los seguidores, y de todas las personas que avalan la ciencia en Rusia, y en el exterior. ALEXANDER ANDRONOV fue uno de los fundadores del Departamento de la Física de la Radio en la Universidad de Nizhny Novgorod, (anteriormente Gorky en 1946) y uno de sus primeros conferencistas brillantes. Era el primer departamento en este campo en la antigua Unión Soviética, y hasta hoy es uno de los principales en el campo de la física de la radio y campos relacionados (la física del plasma, las microondas, la electrónica del quantum, la acústica, la ingeniería eléctrica, etc.).

[19]LEV SEMIONOVICH PONTRIAGUIN (1908-1988) matemático ruso (nacido en Moscú) de renombre mundial. La pérdida de la vista a los catorce años en un accidente

Para simplificar, consideremos el sistema autónomo de ecuaciones diferenciales de primer orden, dependiente de un parámetro ℓ:

$$x' = P(x, y, \ell) \ , \quad y' = Q(x, y, \ell) \ ;$$

donde P y Q son funciones analíticas de sus argumentos. Como el cuadro cualitativo de las trayectorias, en el plano de fases, se determina por elementos singulares, los valores de bifurcación del parámetro ℓ, provocan la aparición de elementos singulares que tienen naturaleza no ruda. Cuando con el valor de bifurcación, aparece en el plano de fases, sólo un elemento singular, se suele decir, que el sistema anterior posee *primer grado de dureza*. En semejantes sistemas, los elementos no rudos pueden ser de uno de los siguientes tipos:

1. Estado complicado de equilibrio, que se obtiene durante la unión de dos puntos singulares sencillos (por ejemplo, nodo y ensilladura).
2. Foco o centro degenerado.
3. Ciclo límite doble, por ejemplo uno estable y el otro inestable.
4. Separatriz que va de una ensilladura a otra, o bien a ella misma.

Poincaré menciona que las posiciones de equilibrio aparecen (o desaparecen) por pares "en la forma de las raíces de ecuaciones algebraicas". Estas ideas fueron generalizadas por Andronov en el caso de la bifurcación del ciclo a partir de un punto singular. Supongamos que tenemos

no le impidió graduarse en la Universidad de Moscú, donde se convirtió en profesor en 1935. Fue uno de los topólogos rusos más destacados y trabajó en el estudio de grupos topológicos, en la dualidad de la topología algebraica y en ecuaciones diferenciales, su libro, *Topological Groups* (1939), es todavía un estándar de trabajo. En 1941 fue uno de los primeros en recibir el Premio Stalin (posteriormente llamado Premios de Estado). En 1961 él publicó *Teoría matemática de procesos óptimos* con sus estudiantes V. G. Boltyanskii, R. V. Gamrelidze y E. F. Mishchenko, al año siguiente apareció una traducción inglesa y, también en 1962, Pontryagin recibió el Premio Lenin por su libro. En los años siguientes, produjo una serie de artículos en juegos diferenciales que extiende su trabajo en la teoría del control. El trabajo de Pontryagin en la teoría del control se discute en la retrospectiva de E. J. McShane: *The Calculus of Variations from the beginning through Optimal Control Theory*, SIAM Journal on Control and Optimization **27** (5) (1989), 916–939. En 1970 fue honrado a nivel mundial, al ser elegido a Vicepresidente de la Unión Internacional de Matemática (IMU), para mayores detalles consúltese http://wwwgap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Pontryagin.html la configuración topológica IE y que, gracias a un parámetro variable apropiado, podemos modificar la configuración de manera que el ciclo estable E disminuya indefinidamente hasta que se confunda en el límite $\ell = \ell_0$ sobre el punto singular. ANDRONOV afirma que

$$IE \leftrightarrow (IE)_0 \leftrightarrow E \ , \quad \text{igualmente} \quad EI \leftrightarrow (EI)_0 \leftrightarrow I \, .$$

Llamaremos a este género de bifurcación, *bifurcación de primera especie.* Significa que si el ciclo límite disminuye indefinidamente, como resultado de la variación del parámetro, cuando el ciclo se confunda con el punto singular (lo que es indicado entre paréntesis) los dos desaparecen y dan nacimiento a un punto singular de estabilidad opuesta al que existía anteriormente.

Existe también la *bifurcación de segunda especie* que definiremos en el sentido de POINCARÉ

$$IEI \leftrightarrow (EI) \leftrightarrow I \ , \quad \text{igualmente} \quad EIE \leftrightarrow (EI)E \leftrightarrow E \ .$$

En esta bifurcación dos soluciones periódicas (una estable y la otra inestable) se confunden en el límite $\ell = \ell_0$ para desaparecer después. Las flechas dobles en estas relaciones, indican que estos fenómenos de bifurcación son reversibles cuando se cambia el sentido de variación del parámetro ℓ.

Conociendo la estructura de partición del espacio de fases, para algún punto del plano de los parámetros (que puede ser una recta, un plano propiamente dicho o un espacio de determinada dimensión, en dependencia del número de parámetros que aparezcan) se puede, desplazándonos continuamente por este plano, hallar la estructura del espacio de fases para cualquier otro punto del plano de dichos parámetros. Con ello, es necesario conocer sólo el carácter de la bifurcación que tiene lugar en el espacio de fases, al pasar por una u otra frontera de bifurcación. En esto consiste el *valor heurístico* de la teoría de bifurcación.

Ahora bien, la teoría de la bifurcación en sistemas dinámicos (y semidin ámicos) constituye uno de los campos más trabajados en los últimos tiempos en el área de las ecuaciones diferenciales. En ella se pueden distinguir dos tendencias: una de carácter formal que se basa en métodos del análisis funcional, la otra de tipo dinámico-geométrico, con énfasis en las propiedades cualitativas (como la estabilidad) de los sistemas considerados. Con respecto a la segunda, podemos decir que sólo ahora es que se están dando pasos en la creación de una teoría unificadora, que permita desarrollar, de manera sistemática, los métodos de análisis apropiados.

En particular, han faltado criterios generales para la existencia de una bifurcación de un punto de equilibrio (o de un conjunto invariante) en dependencia de un parámetro. La metodología requerida es precisamente la teoría general de los sistemas dinámicos y sus extensiones en espacios de dimensión tanto finita como infinita. Un primer paso en la dirección de una tal teoría unificadora fue dada en 1976[20], cuando los autores probaron de nuevo y aplicaron al problema de existencia de bifurcaciones, un *principio de persistencia* (o de *robustez*) para la estabilidad asintótica bajo pequeños cambios del parámetro.

Este principio fue formulado, originalmente en la primera mitad de los años 60, independientemente, por P. Seibert y T. Yoshizawa[21] y dice que cuando un sistema que contiene un *atractor*[22] estable (conjunto asintóticamente estable) es sometido a una pequeña perturbación, en el sistema resultante aparece un atractor estable cerca del atractor original. En el trabajo de 1976, se extendió al resultado principal del artículo de Hopf de 1942[23] que dio origen al término *bifurcación de Hopf* que fue descrito más arriba y que, en su esencia, en el caso de un sistema plano, dice que si al pasar un parámetro a un determinado "valor crítico", los autovalores complejos conjugados de la parte lineal del sistema cambian

[20]Marchetti, F.; P. Negrini, L. Salvadori & M. Scalia: *Liapunov direct method in approaching bifurcation problems*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **108** (1976), 211–226.

[21]*Stability under perturbations in generalized dynamical systems*, Internat. Symp. Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems, Acad. Press, New York, 1963, 463—473 y *Stability Theory by Liapunov's Second Method*, Jap. Math. Soc., Tokyo, 1966, respectivamente.

[22]Término usado primeramente por Smale y no por René Thom (1923–2002)como muchos señalan.

[23]*Abzeweigung einer periodischen Losung von einer stationaren Losung eines Differentialsystems*, Ber. Math. Phys. Sachsische Akad. d. Wiss., Leipzig, **94** (1942), 1-–22.

del signo negativo al positivo, el origen se convierte de foco estable en uno inestable y se separa de él una órbita periódica estable. La extensión mencionada consiste en reemplazar la condición que se refiere a la parte lineal por otra, más general, que pide simplemente el cambio de la estabilidad asintótica del origen (o de un conjunto invariante) a la inestabilidad completa (o, como se dice también, a la calidad del *repulsor*). Este resultado es importante en casos donde la parte lineal del sistema no da información necesaria. También es aplicable a sistemas más generales que los definidos por ecuaciones diferenciales ordinarias. Actualmente, algunos trabajos sobre el tema[24] utilizan la *bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf generalizada*, que no es más que el tipo de fenómeno caracterizado por la conversión de un atractor estable en un repulsor al sobrepasar el parámetro a un valor crítico, y que según el resultado citado, es necesariamente acompañado por la escisión del atractor en dos o más conjuntos invariantes, "pasando la estabilidad" a uno o más de ellos.

2.3. Estabilidad estructural. Lo primero que hizo SMALE al comenzar sus estudios sobre sistemas dinámicos, fue decidir sobre el significado preciso de típico. No se pueden demostrar buenos teoremas si no se tiene una idea clara sobre lo que se está hablando. La idea necesaria, para sistemas con dos grados de libertad, fue inventada por ALEKSANDR ANDRONOV y LEV PONTRYAGIN en los años treinta. Usaron el término sistemas *rudos, gruesos* o *burdos*. La idea es que el comportamiento atípico siempre puede descomponerse haciendo cambios muy pequeños en las ecuaciones. Por ejemplo, un lugar donde se cruzan tres líneas de flujo puede descomponerse en una con figuración de tres puntos de silla (Figura 6). Por otra parte, las cuatro clases típicas de comportamiento en el plano no cambian si en las ecuaciones se hacen cambios suficientemente pequeños. Si la altura de una montaña cambia *ligeramente*, digamos unos pocos metros, por efecto de un débil terremoto, los picos siguen siendo picos, las depresiones, depresiones, y los pasos, pasos. Todos ellos cambian un poco, pero no se puede destruir totalmente un pico con un *pequeño terremoto*.

[24]Véase P. SEIBERT & J. S. FLORIO:*On the Foundations of Bifurcation Theory*, Reporte de Investigación, UAM-Iztapalapa, 1993 y las referencias citadas allí.

Smale generalizó la idea de Andronov y Pontriagin a los sistemas con muchos grados de libertad, y acuñó el término *estructuralmente estable* para denotar un flujo cuya topología no cambia si se alteran las ecuaciones que lo describen en una cantidad suficientemente pequeña. *Esta es una idea muy diferente a la de estado estable de una ecuación duda.* Esta es una solución que es estable frente a pequeños cambios en las condiciones iniciales. Pero la estabilidad estructural es una propiedad de todo el sistema, y es estable con respecto a pequeños cambios en el sistema completo de ecuaciones.

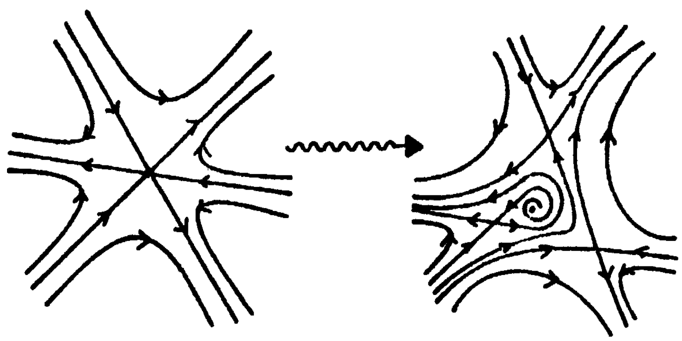


Figura 6. Inestabilidad estructural: una silla de montar con tres separatrices se rompe por la acción de pequeñas perturbaciones, y da lugar a tres sillas de montar y a un sumidero

Es importante destacar, que la estabilidad estructural debe considerarse en un *contexto determinado.* El contexto comprende: a) una clase de sistemas matemáticos C, b) una clase de perturbaciones P, c) una relación de equivalencia R. En este contexto, un sistema es estructuralmente estable si demostramos que toda perturbación en P, lleva a un sistema en C que es equivalente, con respecto a R, al original. Un péndulo simple, por ejemplo, considerado como un oscilador no forzado, es un sistema estructuralmente inestable (en el modelo usual) si la clase de perturbaciones incluye la posibilidad de términos de amortiguamiento. Restringiendo las perturbaciones al caso no disipativo solamente, es posible restaurar la estabilidad estructural.

Si consideramos la existencia de simetría, debemos restringir las clases P y C consecuentemente y así, de manera sucesiva.

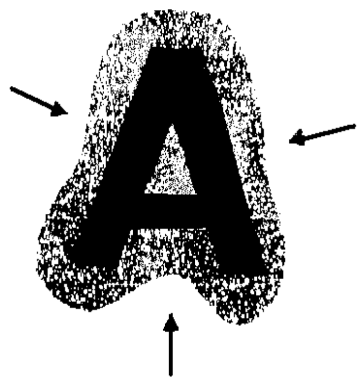


FIGURA 7. Representación esquemática de un atractor general, denotado aquí por una A negra: las regiones próximas (sombreadas) se contraen hacia el atractor a medida que pasa el tiempo

Después SMALE se preguntó: ¿cualquier sistema dinámico estructuralmente estable en tres dimensiones posee únicamente fuentes, sumideros, los dos tipos de sillas de montar y los tres tipos de ciclo límite? De modo más general, ¿podemos hacer afirmaciones similares para sistemas con un número arbitrario de grados de libertad?

Parecía como si no hubiera ejemplos que refutaran esta conjetura: todo lo que se había encontrado que fuese más complicado que los sumideros, las fuentes y los ciclos límites, resultaba ser estructuralmente inestable y, por lo tanto, no típico. Por otra parte, SMALE no podía establecer que éstos constituyesen la lista completa. El teorema, si es que en verdad era un teorema, resistía todos los esfuerzos que se hicieron para demostrarlo. La respuesta la encontraremos en la sección 2.5.

2.4. El método de las transformaciones puntuales. Había una buena razón por la que SMALE no podía demostrar que los únicos atractores en los sistemas típicos fueran los puntos y los ciclos límites. Porque no era cierto.

Finalmente, se dio cuenta de esto. El primer ejemplo, que se remonta a los matemáticos rusos V. V. Nemytskii y V. V. Stepanov en 1949, tenía cuatro grados de libertad, pero, al fin y al cabo, al espacio tridimensional le ocurría lo mismo que al espacio tetradimensional.

Muchos de los aspectos de la conducta de las trayectorias de fases de un sistema dinámico y, en una serie de casos, el retrato completo del espacio de fases, pueden ser aclarados mediante la investigación de la conducta de los puntos de intersección de las trayectorias con el llamado segmento sin contacto (en el caso de un espacio de fases bidimensional) o bien con la superficie secante (en el caso tridimensional).

La secuencia de los puntos de intersección forma cierta transformación puntual T, al estudio de la cual se reduce el problema acerca de la investigación de la conducta de las trayectorias de fase. Con ello, resulta que la estructura del sistema dinámico que consideramos se determina, biunívocamente, por la estructura de la transformación puntual T. En particular, las soluciones periódicas de las ecuaciones diferenciales, o sea, las trayectorias cerradas de fase, se ponen en correspondencia con los puntos fijos de la correspondiente transformación puntual T. A un movimiento periódico, estable o inestable, le corresponde un punto fijo estable o inestable.

Tracemos en el plano de fases, por los puntos no singulares un segmento que corte a la trayectoria t en cierto punto M (interior al segmento), y en un cierto instante de tiempo que puede considerarse inicial. Si en posteriores instantes de tiempo, la curva corta repetidas veces el segmento AB, se dirá que el punto M tiene *sucesores* o *posteriores*. Entonces, sobre la base del teorema sobre la dependencia de la solución respecto a los valores iniciales, todos los puntos en el segmento AB, suficientemente próximos al punto M, también tienen sucesores. Sean s y s' las coordenadas del punto M y de su sucesor sobre el segmento AB, de acuerdo con lo anterior, existirá la dependencia funcional $s' = f(s)$, que lleva el nombre de *función secuencial*. Ella expresa la ley de cierta transformación puntual del segmento AB (o parte de él) en si mismo, estableciendo la correspondencia biunívoca, entre los puntos de dicho segmento y sus sucesores. Los puntos fijos de la transformación T, se hallan partiendo de la intersección de la gráfica de la función secuencial y la bisectriz $s' = s$. Esta construcción geométrica lleva el nombre de *diagrama de Lamerais*.

En muchos de los problemas, es imposible obtener la función secuencial en forma explícita, en tal caso se debe hacer uso de la forma paramétrica de dicha función, en la que interviene de forma implícita, por lo menos dos soluciones de la ecuación o sistema. Esto facilita no sólo el hallazgo de la función secuencial, sino también su investigación.

El método expuesto, cuya aparición está ligada a los nombres de POINCARÉ y GEORGE DAVID BIRKHOFF[25], fue introducido en la teoría de las oscilaciones no lineales por ANDRONOV. Habiendo establecido la relación entre las autooscilaciones y los ciclos límites de Poincaré y apoyándose en el aparato matemático de la teoría cualitativa, ANDRONOV amplió notoriamente las posibilidades del método de traspaso y enunció los principios que constituyeron la base del método de las transformaciones puntuales y que permitieron emplear con eficacia dicho método durante las investigaciones de sistemas concretos de control automático y de radiotecnia. La representación paramétrica de las funciones secuenciales, introducidas por él, permitió resolver un gran número de problemas abiertos que, por largo tiempo, estaban sin resolver.

2.5. Los atractores como objetos matemáticos. . Desde el punto de vista de SMALE, la propiedad más importante de un sistema dinámico es su comportamiento a largo plazo. Esto "selecciona" un conjunto mucho más sencillo de movimientos de entre todos los del sistema completo. A veces, el comportamiento dinámico de un sistema natural se vuelve caótico y el tratamiento informático de las medidas efectuadas permite visualizar un atractor con una configuración geométrica "rara"; ¿ayudar á este objeto matemático a elucidar los mecanismos fundamentales de la turbulencia meteorológica?

Se encuentran frecuentemente en física, en química y en biología poblaciones por ejemplo, sistemas cuya evolución con el tiempo presenta un aspecto irregular, no periódico, "caótico". Puede pensarse en particular en el humo que se eleva por encima de un cigarrillo: a cierta altura aparecen unas oscilaciones complicadas, que parecen desafiar la

[25](1884-1944).

comprensión. Las leyes que rigen la evolución temporal del sistema (el conjunto de las partículas de humo en suspensión en el aire más o menos caliente) están bien definidas y son deterministas, pero el sistema parece provisto de una voluntad propia que le hace adoptar un comportamiento fantástico y complejo.

FIGURA 8. A partir de una transformación geométrica sencilla realizada en un anillo, SMALE, en Berkeley, elaboró un atractor extraño, el "solenoide", que traza una especie de ovillo de hilos enrollados alrededor de un eje

Físicos, químicos, biólogos y también matemáticos, han intentado comprender esta situación; les ha ayudado el concepto de *atractor extraño*[26] y la utilización de ordenadores. Los atractores extraños son unos objetos matemáticos abstractos, a los que los ordenadores han dado vida y apariencia. Nacieron de un deseo muy antiguo: el de comprender el comportamiento de los sistemas naturales. Para lograrlo, el enfoque consiste en intentar modelizar los fenómenos físicos, químicos y biológicos definiendo los estados de un sistema por medio de cierto número de parámetros. Estos parámetros (que designamos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en un

[26]Dos matemáticos, FLORIS TAKENS (n. 1941) y DAVID RUELLE (n. 1935), acuñaron dicho nombre para este nuevo tipo de atractor. Un atractor estructuralmente estable que no es uno de los tipos clásicos, el punto o el círculo, se dice que es un *atractor extraño.* El nombre constituye una declaración de ignorancia, siempre que los matemáticos denominan a una cosa como "patológica", "anormal", "extraña", o algo parecido, lo que quieren decir es "no entiendo esto". Pero es también una bandera, que contiene un mensaje, puede que no lo entienda, pero seguro que me parece importante.

formalismo matemático) corresponderían, en química por ejemplo, a las concentraciones de los diferentes reactivos que intervienen en el sistema.

Sabemos que durante una reacción se consumen los reactivos a la vez que se forman nuevos productos. Por lo tanto, las concentraciones de todas estas sustancias varían continuamente y su conocimiento en un instante dado define perfectamente el estado del sistema. Supongamos ahora que estos datos se transfieren a un registrador que tiene por objeto representar gráficamente la evolución temporal del sistema. Si la informaci ón consiste sólo en dos concentraciones, el registrador puede marcar en una hoja de papel un punto cuyas coordenadas son estas dos concentraciones. Este punto describe un estado instantáneo del sistema. Si por una razón cualquiera el sistema adopta un comportamiento caótico, se verá aparecer en la hoja de papel un atractor extraño en dos dimensiones. No hay que suponer que la forma de este atractor tenga el menor parecido con una cualquiera de las figuras observadas en el experimento. Por ejemplo, el que dibujaremos a propósito de la turbulencia de los fluidos no tiene nada que ver con los torbellinos visualizados por el experimentador. El objeto atractor extraño consiste en una infinidad de puntos, cada uno de los cuales representa un estado del sistema caótico considerado, pero no tiene realidad física. En el caso de la turbulencia atmosférica, el atractor se parece a unas alas de mariposa. De hecho, el ordenador sólo traza un número finito de puntos, suficientemente grande no obstante para visualizar el atractor.

Tomemos un ejemplo que tiene un valor histórico propio ya que fue el primer atractor extraño estudiado detalladamente por el investigador francés MICHEL HÉNON, del Observatorio de Niza. Su cálculo tenía un objetivo muy modesto, y la primera vez que lo realizó no disponía más que de una calculadora de bolsillo programable. Luego pasó a una máquina más potente.

FIGURA 9. Atractor de Hénon

A los cinco años de la publicación del trabajo de LORENZ, HÉNON descubría en el Instituto de Astrofísica de Paris un sistema dinámico de gran sencillez mediante el cual se podían explicar las pequeñas oscilaciones que hacen que ciertos cuerpos celestes se desvíen levemente de su órbita elíptica. En los dos casos, partió de un sistema de dos parámetros x e y, y de dos ecuaciones que permiten calcular $x(t+1)$ e $y(t+1)$ en función de $x(t)$ e $y(t)$ que son $x(t+1) = y(t)+1-ax(t)$, $y(t+1) = bx(t)$.

Dados los valores iniciales $x(0)$, $y(0)$, los parámetros $a = 1,4$ y $b = 0,5$, pudo calcular $x(t)$ e $y(t)$ para $t = 1, 2, \ldots, 10.000$ manteniendo siempre una precisión de dieciséis cifras significativas. Hecho "a mano", este cálculo requeriría varios meses y, como su interés no es evidente (no tiene ninguna aplicación inmediata al estudio de un sistema natural) nadie lo había realizado. Para un ordenador, esta tarea fastidiosa y repetitiva no tiene problemas y si se dispone de un plotter se pueden trazar en un tiempo bastante breve los 10.000 puntos de coordenadas $(x(t), y(t))$. Inesperadamente, los puntos se disponen sobre un sistema de líneas de estructura compleja. En el origen de este resultado había una elección, la del punto inicial definido por $x(0)$ e $y(0)$, de ahí la segunda idea de M. HÉNON, ¿qué pasa cuando se cambia $(x(0), y(0))$? Pues bien, si este par inicial está mal elegido, el punto $(x(t), y(t))$ se alejará hacia el infinito (y saldrá en concreto del marco de la hoja). Si se elige bien entonces $(x(1), y(1))$, $(x(2), y(2))$, se parecerán rápidamente a un *montón de spaghetti* cuyo aspecto general se reproducirá cuando se habrán marcado algunos miles de puntos (ver Figura 9). Este "montón de spaghetti" es precisamente el *atractor de Hénon*. Es extraño. Entre otras curiosidades señalemos que si se cambian un poco a y b el atractor puede desaparecer o cambiar de naturaleza. Tomemos por ejemplo $a = 1,5$ y $b = 0,3$, entonces cuando t se hace muy grande los puntos ya no se parecen al montón de spaghetti sino a un conjunto de siete puntos.

Ya no nos atrevemos a hablar de atractor extraño, y el atractor se dice entonces periódico (de período 7), ya que los puntos dibujados en los instantes t, $t + 7$ y $t + 14$ se superponen. Este resultado es bastante molesto desde el punto de vista matemático. En efecto, al no haber podido demostrar todavía que la aplicación que define el atractor de Hénon no tiene solamente atractores periódicos, nada nos permite afirmar sin ninguna duda que el primer atractor es extraño. ¡Por lo tanto, su existencia es de momento una creencia basada en cálculos de ordenador! Hay otro ejemplo de atractor extraño que sin duda vale la pena describir. En primer lugar es, estéticamente, más interesante ya que se desarrolla en un espacio en tres dimensiones ($n = 3$). Pero, sobre todo, se conoce bien desde el punto de vista matemático gracias a los trabajos de SMALE Berkeley. Esta vez, no escribimos las ecuaciones que permiten pasar de $x(t)$ a $x(t+1)$, sino que definimos geométricamente los pasos del sistema de un estado al siguiente. De hecho, suponemos que la transformación (F) toma un anillo A, lo estira, lo comprime transversalmente y lo enrolla de manera que el resultado, es decir la imagen $F(A)$, esté contenida en A y dé ahora dos veces la vuelta al hueco central. Partiendo de un punto X_0 del anillo A, se pueden marcar los puntos X_1, X_2, $\ldots$, hasta X_{5000} y se ve cómo se dibuja un nuevo atractor extraño. Es bastante fascinante observar el papel en el que se traza el dibujo. Aproximadamente cada segundo se marca un nuevo punto, de forma aparentemente errática. Sólo al cabo de un tiempo bastante largo se puede adivinar la forma final de la figura. Este atractor se ha llamado solenoide (véase la Figura 8). Recuerda en efecto un enrollamiento de hilos alrededor de un eje[27]. Para explicar su aspecto, hay que señalar que el solenoide en cuestión no solamente está contenido en el anillo A, sino también en sus imágenes

[27]Existe un aparato eléctrico denominado solenoide, en el cual se enrollan kilómetros de cobre alrededor de un núcleo de metal para hacer un electroimán. Los matemáticos tomaron prestado este nombre para la construcción de SMALE.

sucesivas que son unas "mechas" muy delgadas que giran numerosas veces alrededor del vacío central. Los parámetros $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\ldots$, $x_m(t)$ tienen que describir un sistema físico, químico o biológico en el instante t; se supone que el sistema tiene una evolución temporal determinista definida por unas ecuaciones. ¿Con qué precisión podremos predecir la evolución si los valores iniciales están afectados por un pequeño error, como sucede siempre con los datos experimentales? ¿Cómo crecerá (o decrecerá) el error cuando t aumenta? Desde luego, la respuesta podrá depender de las ecuaciones y de los valores iniciales.

Para el solenoide, un razonamiento simple lleva a afirmar que el error crece experimentalmente con el tiempo. La experiencia demuestra que esta afirmación sigue siendo válida para el atractor de Hénon. Se dice que los dos sistemas dinámicos considerados tienen una dependencia sensible de las condiciones iniciales (dependencia SCI).

Hasta ahora, he intentado presentar el concepto de atractor extraño sin introducir demasiadas herramientas matemáticas, la razón es simple: la teoría matemática de los atractores extraños es difícil y todavía está poco desarrollada, por lo que prefiero no dar una definición matemática de estos objetos. En la práctica, sin embargo, si la aplicación repetida de una transformación F produce unos puntos x_1, x_2, $\ldots$ que se acumulan en un conjunto A, y si hay dependencia SCI, se dirá que A es un atractor extraño.

Los atractores aparecen en numerosas ramas de la ciencia, sin embargo, al igual que ocurre con los fractales, hay un gran número de sistemas que se han desarrollado con carácter meramente estético. Uno de ellos es el creado por Clifford A. Pickover en el centro de investigación Thomas J. Watson de IBM.

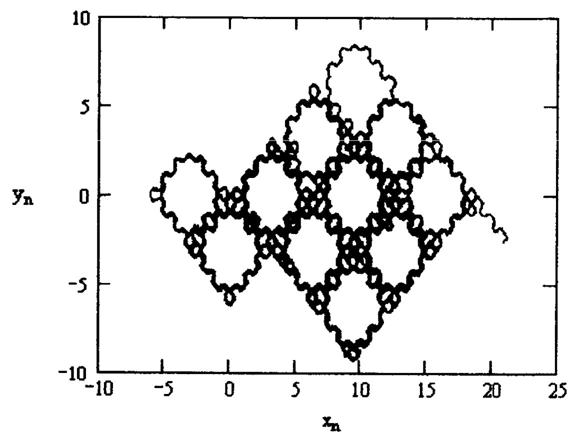
El planteamiento del sistema es como sigue, $n = 0,\ 1,\ \ldots,\ 50000$, el paso (h) es $0,05$ y el sistema es el siguiente:

$$x_{n+1}\& = x_n - h\,\mathrm{sen}\,(y_n + \tan(3 - y_n)),$$
$$y_{n+1}\& = y_n - h\,\mathrm{sen}\,(x_n + \tan(3 - x_n)),$$

con condiciones iniciales $(x(0), y(0)) = (-3, -2)$.

La representación del atractor de Pickover suele hacerse en color, actuando de esta manera se comprende que este sistema se conozca con el sobrenombre *palomitas* (*pororó*) *fractales.* Nosotros, sin embargo, nos limitaremos a la representación monocroma adjunta.

Por último, representaré un sistema de carácter caótico solamente en algunas regiones del plano. No entraré a analizar este sistema con más detalle, tan sólo mencionaré que las zonas estables se encuentran en los hexágonos solamente.



Se toma $n = 0, 1, \ldots, 50000$, con condiciones iniciales $(x(0), y(0)) = (-0,01, -0,01)$, el mismo paso h y el sistema es:

$$x_{n+1}\& = 1 - y_n + |x_n|,$$
$$y_{n+1}\& = x_n.$$

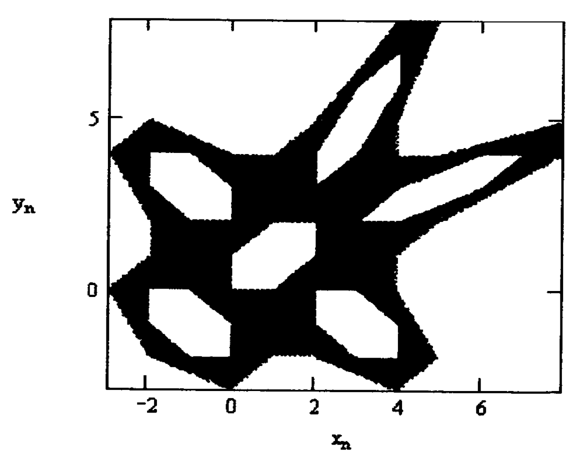
¿Proporcionan los atractores extraños una mejor descripción de la turbulencia que los atractores casi periódicos?

Lamentablemente, esta es una pregunta que no siempre tiene una respuesta definitiva. Así, del hecho de que la turbulencia se pueda interpretar por medio de atractores extraños no se tiene de deducir que todos los sistemas mecánicos den lugar a atractores. Los sistemas mecánicos sin rozamiento (conservativos) jamás darán lugar a atractores, cualesquiera que sean, aunque algunos de ellos presentan una dependencia SCI. En efecto, un resultado de la mecánica (el teorema de Liouville) afirma que el elemento de volumen, en el espacio de las fases, se conserva durante la evolución temporal, y esto impide la contracción del volumen que se observa cerca de un atractor.

Los sistemas fisicoquímicos que dan lugar a atractores extraños son sistemas disipativos, es decir sistemas en los que una forma "noble" de energía (energía mecánica, química, eléctrica, etc.) se transforma en calor, una energía "degradada", como dicen algunos.

Además, estos sistemas sólo presentan un comportamiento interesante si tienen una fuente constante de energía noble (en caso contrario tienden al reposo). Hace 30 años muchos investigadores, en particular químicos, consideraban que no existían reacciones químicas con un comportamiento caótico, es decir, si un experimental obtenía un trazado caótico en el estudio de una reacción, consideraban que el experimento estaba mal planteado.

Afortunadamente, las cosas han cambiado. Se conocen ahora reacciones químicas no periódicas: la reacción de Zhabotínski-Bellussov con las condiciones operativas modificadas, por ejemplo. ¿Corresponde a un atractor extraño o a un atractor casi periódico? Esto todavía no está claro.



La aplicación de las ideas que he discutido plantea a menudo serios problemas metodológicos. ¿Cómo mantener las condiciones experimentales constantes y hacer las medidas precisas? El reconocimiento del papel de los atractores extraños en muchos problemas es sin embargo un gran progreso conceptual. Las fluctuaciones no periódicas de un sistema no indican necesariamente un experimento "arruinado" por misteriosas fuerzas aleatorias sino, a menudo, un sistema dinámico con un atractor extraño, que se puede intentar comprender. No he hablado del atractivo estético o artístico de los atractores extra ños. Estos sistemas de curvas, estas nubes de puntos, recuerdan a veces galaxias o fuegos artificiales, y a veces extrañas e inquietante floraciones. Es todo un mundo de formas que están por explorar y de armonías que están por descubrir[28].

2.6. Sistemas dinámicos discretos. A raíz de la mención de los dos últimos sistemas dinámicos de la sección anterior, pudiéramos preguntarnos si los sistemas dinámicos tienen mucho que mostrarnos. La respuesta es sí.

En un sistema dinámico auténtico, el tiempo fluye continuamente desde menos infinito hasta más infinito, y pasa por todo los valores intermedios. En nuestro sistema discreto, el tiempo fluirá en pasos de un único h: $1, 2, 3, \ldots$ unidades. No habrá nada entre 1 y 2: no habrá un tiempo de $11/2$ unidades, o $1,22789$, o cualquier otra cosa semejante. Solamente números enteros, un reloj digital en lugar de uno analógico. El sistema pasará de un estado al siguiente en cada cambio de su reloj digital. El término técnico para designar esto es dinámica discreta, y veremos más adelante que realmente existen conexiones muy estrechas entre la dinámica discreta y la dinámica continua genuina, que los matemáticos han explotado hasta la saciedad.

El sistema consistirá en un punto moviéndose sobre un círculo. Por simplicidad en la descripción, escojamos unidades de tal forma que el

[28]Consúltese, por ejemplo, V. I. ARNOLD & A. AVEZ: *Problémes ergodiques de la mécanique classique*, Paris, Gauthiers-Villars, 1967; R. ABRAHAM & J. E. MARSDEN: *Foundations of Mechanics*, 2a edición, Benjamin/Cummings, Reading,Mass., 1978 y *Bifurcation theory and applications in scientific disciplines*, Ann. N. Y. Acad. Sci. 316 (1979) y D. RUELLE: *Hasard et chaos*, Points, Odile Jacob, 1993.

perímetro de la circunferencia del círculo sea exactamente una unidad. Entonces podemos describir dónde está el punto sobre este círculo mediante un número comprendido entre 0 y 1; su distancia angular en estas unidades rodea el círculo desde alguna posición determinada, que tomamos como cero.

Pidamos ahora que el punto debe obedecer a la siguiente ley dinámica: si en un instante determinado se encuentra en la posición x, entonces, en el instante siguiente se moverá a x'(que será determinada más abajo). Geométricamente, el círculo se estira 10 veces su longitud, y se enrolla diez veces sobre sí mismo (Figura 10). La ley se aplica en cada instante, uno tras otro, de modo que el punto se mueve iterando la aplicación.

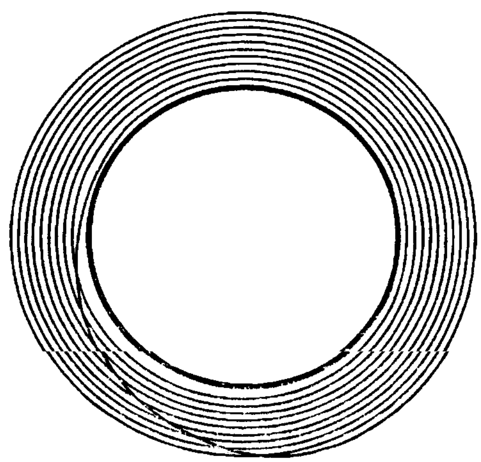


Figura 10. Representación esquemática de un círculo estirado y enrollado diez veces sobre sí mismo

Una *aplicación* es simplemente una regla del tipo "x se transforma en algo especificado en términos de A". Ya sabemos, entonces, lo que significa iterar: *repetir*.

Analicemos la dinámica de este sistema. Dividamos el perímetro del círculo en diez sectores idénticos que denotaremos por 0, 1, 2, ..., 9. Así, cuando diga itinerario de un punto sobre el círculo, me estaré refiriendo a la lista de sectores que visita a medida que se itera el procedimiento de enrollamiento.

En términos de la unidad angular de medida, el sector 0 comprende el intervalo desde 0 hasta $0,099999\ldots$, el sector 1 va desde $0,1$ hasta $0,199999\cdots$ y así sucesivamente. De este modo yo podría decir que un punto comienza en $0,25543786$. Esto significa que se encuentra en el sector 2, algo más allá de la mitad del recorrido. Cuando realizo la aplicación, y enrollo el círculo rodeándolo diez veces sobre sí mismo, su longitud aumenta en un factor 10. Así, el punto se mueve a la posición angular $2,5543786$. Ahora viene la cuestión de habilidad. Una unidad alrededor del círculo simplemente nos lleva de nuevo a 0, y lo mismo sucede para dos unidades, de tal manera que el resultado sería el mismo que si se tratase del ángulo $0,5543786$. Éste se encuentra en el sector 5. Cuando iteramos la representación, lo que observamos es esto:

tiempo 0	0,25543786	=0,5543786	sector 2
tiempo 1	2,5543786	=0,543786	sector 5
tiempo 2	5,543786	=0,43786	sector 5
tiempo 3	5,43786	=0,3786	sector 4
tiempo 4	4,3786	=0,786	sector 3
tiempo 5	3,786	=0,86	sector 7
tiempo 6	7,86	=0,6	sector 8
tiempo 7	8.6	=0,0	sector 6
tiempo 8	6		sector 0

después de lo cual se obtiene simplemente 0, 0, 0, ... En cada situación basta con multiplicar por diez y separar el primer dígito. El itinerario de dicho punto visita, por este orden, los sectores 2, 5, 5, 4, 3, 7, 8, 6, 0, 0, 0, ... ¿Hemos visto esos números antes?

Sí, son los dígitos decimales del punto de donde partimos. Esto no es accidental. Si se multiplica por diez y se elimina el primer dígito, sencillamente, se está desplazando la expansión decimal un lugar hacia la izquierda. Esto es válido para cualquier punto del que partamos. Por ejemplo, si empezamos con un punto situado en $\pi/10 = 0,314159265\cdots$, entonces su itinerario visitará los sectores 3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, ... por este orden. ¡La dinámica reproduce los dígitos decimales sucesivos de π!

Sea como fuere, espero que se estará de acuerdo en que este sistema dinámico discreto es muy sencillo y, sin duda alguna, determinista. No sólo existe una fórmula exacta para determinar hacia dónde se mueve x, a saber $x \to 10x$, sino que esta fórmula es muy fácil de calcular.

Primera curiosidad. Supongamos que el punto de partida tiene exactamente la misma expansión decimal que π para los primeros mil millones de decimales; pero que, a partir de entonces, va como $\ldots 1212121212\ldots$ por siempre. Llamemos π' a este nuevo número. Es extremadamente próximo a π, mucho más cercano de lo que cualquier medida práctica podría distinguir.

Por iteración del enrollamiento de diez pliegues, tanto π como π tienen el mismo itinerario para los primeros mil millones de pasos. Pero, después de ello, el punto π' simplemente oscila entre los sectores 1 y 2, mientras que π va a visitar... los billones y billones de dígitos que π tiene todavía por delante. No tengo ni idea de cuáles son, pero seguro que no serán $121212\ldots$ *De este modo, dos condiciones iniciales π y π', tremendamente próximas, acaban haciendo cosas totalmente independientes.*

Segunda curiosidad. Supóngase que tomamos un dado, cuyas caras están marcadas desde el 1 hasta el 6, y lo lanzamos al azar un número infinito de veces. Acabamos obteniendo una lista infinita, algo como $1162541456522124366451432\ldots$ y así sucesivamente. Esta es una secuencia aleatoria de números.

Y hay un punto sobre el círculo cuya expansión decimal reproduce esta secuencia, a saber $x = 0,1162541456522124366451432\ldots$ Si itero la representación a partir de x, genero la secuencia aleatoria. De modo que una representación determinista, aplicada a este punto inicial particular, genera una secuencia tan aleatoria como los lanzamientos de un dado. Tercera curiosidad. “Casi todos” los números en el intervalo desde 0 hasta 1 tienen expansiones decimales que son aleatorias. Esto fue demostrado por un matemático americano llamado Gregory Chaitin[29], quien estudió las limitaciones de la computación. Es creíble si se dice de

[29]Hijo de padres argentinos, vivió durante varios a.nos en Buenos Aires y dictó clases en la UBA. Para neófitos en el tema, consultar una entrevista que le realizó el diario *Clarín* en http://www.cs.auckland.ac.nz/CDMTCS/chaitin/gmartin.html

la forma adecuada: un número elegido "al azar" tendrá dígitos al azar. Por tanto, el sistema dinámico determinista que hemos construido se comporta de esta forma aleatoria, no solamente para unos pocos puntos iniciales raros, *¡sino para casi todos los puntos!*

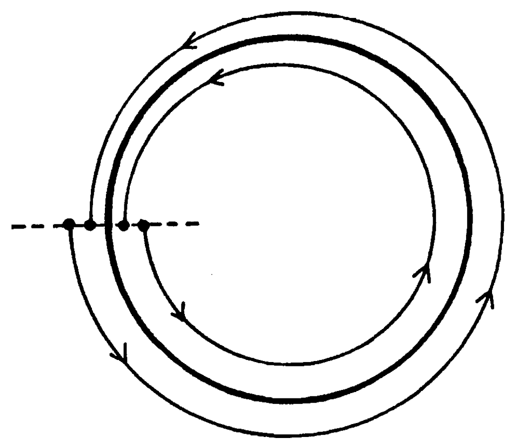


FIGURA 11. Sección de Poincaré (línea discontinua) a través de un ciclo límite (línea gruesa): los puntos iniciales sobre la sección de Poincaré se contraen en su primera vuelta hacia el punto que representa al ciclo límite.

Cuarta curiosidad. Preguntémonos cuándo es periódico el itinerario de un punto, es decir, cuándo se repite exactamente una y otra vez. La respuesta es: *cuando su expansión decimal se repita.* Hay un teorema que dice que tales números son precisamente aquellos que son racionales: son fracciones exactas de p/q, siendo p y q números enteros. Existen infinitos números racionales entre 0 y 1 (tales como $2/3$ o $199/431$), e infinitos números irracionales entre 0 y 1 (tales como $\pi/10$, $\pi^2 - 1$). Se hallan totalmente mezclados: entre dos racionales cualesquiera hay un irracional, y entre dos irracionales cualesquiera, un racional. De manera que los puntos iniciales que conducen a movimientos periódicos, y aquellos que no, se encuentran mezclados como el azúcar y la harina en un pastel. Esto significa también que los puntos periódicos son todos inestables; si los desplazamos ligeramente hacia un irracional próximo, dejan de ser periódicos. ¡De hecho, *todos* los movimientos posibles son inestables!

Incidentalmente, no imaginemos que los racionales e irracionales se alternan de cualquier manera a lo largo del intervalo, que es lo que puede sugerir la descripción anterior. Por el contrario, la "mayoría" de los números en el intervalo son irracionales: los racionales son muy, pero que muy raros.

Por supuesto, puede argumentarse que esta es una ecuación bastante absurda. Los sistemas dinámicos reales no hacen este tipo de cosas. Para empezar, en el sistema anterior, los puntos diferenciados $0,42$ y 0,52 se mueven ambos hacia el mismo punto $0,2$ en la primera etapa; pero en un sistema dinámico genuino los puntos diferentes nunca se juntan cuando se mueven. De manera que todo el comportamiento extraño que acabamos de describir es una consecuencia de la receta ridículamente artificial que hemos utilizado para la dinámica ¿Correcto? Falso.

Para ver por qué, debemos echar otra ojeada a una de las ideas fundamentales de Poincaré: cómo detectar soluciones periódicas mirando a una sección transversal.

Consideremos un sistema en el plano que tenga un ciclo límite estable. Recuérdese que esto es un bucle cerrado y que los puntos vecinos se mueven hacia él. Un topólogo lo llamaría un atractor periódico. Dibujemos un pequeño segmento de línea que corte por la mitad el ciclo límite (Figura 11). Para cada punto en el segmento, sigamos su recorrido dinámico. Al final choca de nuevo contra el segmento. Puede hacerlo, de hecho, sobre el ciclo límite, si es así, vuelve a donde empezó. Si no es así, acaba más cerca del ciclo límite que donde estaba al comenzar. Es decir, la receta "sigamos la dinámica hasta que nos choquemos de nuevo con el segmento por primera vez" determina una aplicación del segmento en sí mismo que lo comprime hacia el punto en el cual el ciclo límite lo cruza. Hemos oído hablar del "punto sin retorno", pero éste es el punto del primer retorno. Si se itera la aplicación del primer retorno, se obtiene el primer retorno, después el segundo, luego el tercero... Se está midiendo la dinámica completa a intervalos regulares de tiempo. Un ingeniero eléctrico llamaría a esto "muestreo estroboscópico". Es así como se ajusta el rotor de un lector de CD o DVD para que gire a la velocidad correcta, el muestreo se hace, en este caso, mediante un "lector" que parpadea a la frecuencia requerida y detecta marcas colocadas periódicamente en el borde del CD. Tomemos ahora otro sistema, el cual puede o no tener un ciclo límite. No lo sabemos, todavía. Supongamos que hay algún segmento de línea en el espacio de las fases, con la propiedad de que cada punto inicial en el segmento finalmente regresa y choca de nuevo contra el segmento. Puede que lo haya, o puede que no, veamos qué pasa cuando lo hay.

FIGURA 12. La sección de Poincaré puede ser muy complicada en dos dimensiones. En el atractor de Ueda, que se ilustra aquí, los puntos se arremolinan de modo muy similar a como cuando se agita una taza de café.

Afirmo que necesariamente hay al menos un ciclo límite que atraviesa el segmento. La razón es un teorema de topología, cada aplicación continua de un segmento de línea en sí mismo debe tener al menos un punto fijo, un punto que se aplica sobre sí mismo. La idea que subyace en la demostración es parecida a lo que sigue. El extremo izquierdo del segmento se aplica en algún punto del segmento. Si este punto es también el extremo izquierdo, ya tenemos nuestro punto fijo. Si no, el extremo izquierdo se desplaza a la derecha.

Similarmente, el extremo derecho se mueve hacia la izquierda, de modo que todo el segmento se contrae dentro de sí. Miremos a lo largo del segmento de izquierda a derecha. Los puntos próximos al extremo izquierdo también se mueven para la derecha; los puntos próximos al extremo derecho se mueven para la izquierda. En algún lugar de en medio debe haber un sitio en donde el movimiento cambie de ir hacia la derecha a ir hacia la izquierda. La única forma de cambiar continuamente del movimiento hacia la derecha al movimiento hacia la izquierda es a través del movimiento nulo. Si conducimos a lo largo de una carretera y comenzamos girando hacia la derecha y posteriormente giramos hacia la izquierda, entonces, en algún lugar intermedio debemos haber ido, por un instante, recto hacia adelante (puede haber más de un lugar de éstos, en una carretera llena de curvas a derecha e izquierda hemos de enderezar, al menos momentáneamente, entre cada curva y la siguiente).

Recapitulemos. Si hay un segmento de línea, tal que todo punto que comienza sobre él finalmente regresa a él, *entonces* hay al menos una solución periódica que pasa a través de dicho segmento.

Dejando aparte el espinoso asunto de encontrar dicho segmento, vemos que este es un teorema bastante notable. *No depende de los detalles de la dinámica.* Aunque usa una característica fundamental de la dinámica, el "fluido" no se desgarra en partes. El flujo es continuo. Pero esto es todo lo que usa. Lo que hemos hecho es la esencia de la dinámica cualitativa. Hemos empleado un hecho topológico para deducir un resultado dinámico. El hecho topológico es "toda representación continua de un intervalo en sí mismo tiene un punto fijo". El hecho dinámico es la existencia, dado un segmento adecuado, de un movimiento periódico.

Como ya se mencionó, este tipo de segmento se denomina *sección de Poincaré.* La aplicación asociada es la *aplicación de Poincaré.* Existe una idea semejante en tres dimensiones; pero ahora el segmento ha de reemplazarse por una porción de superficie. Típicamente, esto es un disco topológico, un pequeño pedazo de superficie sin ningún agujero. Las aplicaciones de un disco en sí mismo pueden ser muy complicadas (Figura 12). A pesar de esto, en topología hay un teorema general sobre las aplicaciones de un disco en sí mismo, de nuevo debe haber un punto fijo. Así, un flujo en tres dimensiones que posee una sección de Poincaré que es un disco, ha de tener una trayectoria periódica que pase a través de dicho disco.

De hecho, existe una versión $n-$dimensional. La sección de Poincaré es un hiperdisco $(n-1)-$dimensional; y un resultado algo complicado, llamado el teorema de Brouwer del punto fijo, lleva a la conclusión de que, al menos, una trayectoria periódica debe pasar a través suyo. La topología, como ya hemos señalado, es muy poderosa. Ella también cambia el énfasis. En lugar de resolver las ecuaciones, examino la sección de Poincaré, lo que hace que las técnicas empleadas sean bastante diferentes.

3. A modo de conclusión

De esta manera, he apuntado algunos detalles que permitirán comprender la importancia que ha tenido, en el desarrollo de las ecuaciones diferenciales ordinarias, la teoría cualitativa y diversas ramas de la propia matemática relacionada con ésta y como, tomando un tópico particular de las ecuaciones diferenciales ordinarias, el desarrollo de una y otra se han ido entrelazando y han contribuido, como peldaños mutuos, al desarrollo simultáneo de ambas. Un punto que nos permite abundar en el marco anterior, lo constituye el hecho de que, la proliferación de los dispositivos del control automático en la técnica moderna, confiere a la teoría de la regulación automática un papel extraordinariamente importante. Uno de los principales problemas que se les plantea a los constructores de reguladores automáticos es el de la *estabilidad del funcionamiento* del sistema máquina-regulador, o sea, la determinación de un régimen de trabajo estable, en cierta forma lo más "parecido" posible a un ciclo límite estable, al cual todos los demás "modos" de funcionamiento convergen.

En muchos casos, este problema puede resolverse con ayuda del *método directo de Liapunov.* El sistema de regulación automática más antiguo, es el formado por la máquina de vapor y el *regulador centrífugo de Watt.* Este regulador centrífugo, ideado por WATT a finales del siglo XIX, cumplió perfectamente sus funciones hasta la segunda mitad del siglo XIX, cuando hubo que modificar su estructura y, con ello, su funcionamiento resultó menos seguro.

Numerosos ingenieros y científicos trataron de dar solución a este problema, que fue resuelto de manera especialmente elegante y sencilla por el ingeniero ruso Vichnegradski, fundador de la teoría de la regulación automática. La memoria de Vichnegradski: *Sobre los reguladores de acción directa* (1876, en ruso) constituyó el punto de partida de la teoría de la regulación de las máquinas, para hacer frente a las exigencias de la práctica industrial. En este siglo se han ido desarrollando nuevos métodos a partir de los trabajos de Poincaré, Andronov, Khaikin, Witt, Bulgakov, ... los que han contribuido al desarrollo de esta dirección, y sus resultados son considerados como clásicos.

En los últimos años, se modificó fuertemente el aspecto de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Uno de los progresos más importantes, como ya presenté, consistió en el descubrimiento de regiones límites de nuevo tipo, que recibieron el nombre de atractores.

Resultó que, paralelamente a los regímenes límites estacionarios y periódicos, son también posibles regímenes límites de una naturaleza completamente distinta, en las cuales cada trayectoria por separada es inestable, mientras que el mismo fenómeno de la salida al régimen límite en cuestión es estructuralmente estable. El descubrimiento y el estudio detallado de tales regímenes (atractores) para los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, requirió de la participación de los recursos de la geometría diferencial y la topología, del análisis funcional y la teoría de las probabilidades. En la actualidad tiene lugar una penetración intensiva de estos conceptos matemáticos en las aplicaciones. Así, por ejemplo, los fenómenos que tienen lugar durante el paso de una corriente laminar a una turbulenta, con el aumento de los números de Reynolds, se describen mediante un atractor. Durante la utilización de cualquier modelo matemático surge el problema de la validez de la aplicación de los resultados matemáticos a la realidad objetiva. Si el resultado es fuertemente sensible a una pequeña modificación del modelo, entonces, variaciones tan pequeñas como se quiera del mismo, conducirán a un modelo con propiedades distintas. No se pueden extender tales resultados al proceso real investigado, debido a que en la construcción del modelo se realiza siempre una cierta idealización y los parámetros se determinan solamente de manera aproximada.

De aquí al concepto de *sistemas gruesos* y de *estabilidad estructural* (de ANDRONOV, PONTRIAGUIN y SMALE) fue un paso lógico, si se quiere. Este concepto resultó muy fructífero, en el caso de los espacios de fases de dimensiones pequeñas (1 ó 2) y en este caso, los problemas de la estabilidad estructural, fueron detalladamente estudiados. De esta manera, la teoría de las ecuaciones diferenciales en el presente, constituye una rama de la matemática, excepcionalmente rica por su contenido, que se desarrolla rápidamente, en estrecha relación con otros dominios de la matemática y sus aplicaciones. Sin embargo, no se puede negar la significación que para las matemáticas, han tenido algunos problemas particulares.

El objetivo primordial de estas investigaciones relacionadas con los ciclos límites viene a ser, por regla general, el de facilitar una base matemática necesaria para atender ciertas demandas insoslayables de capacitación técnica, olvidémonos de la división *matemática pura / matemática aplicada*. Es decir, nuestros autores se mueven sobre todo por intereses de orden teórico o práctico, con contribuciones que persiguen unos efectos relativamente inmediatos.

Estos trabajos sugieren, en fin, la existencia de dos vías principales de *ilustración* de las ecuaciones diferenciales como bien fue apuntado al inicio del trabajo. Sobre la vía específicamente teórica, dependía más de empeños personales (sobre todo a inicios de siglo) que de un plan o ideario general; en el caso de la vía práctica, esta representó una forma de acumulación de hechos que se resistían a ser clasificados de alguna forma y de relación directa con las aplicaciones.

Como colofón, queremos apuntar dos observaciones finales sobre las limitaciones del material y del enfoque que se ha empleado, en particular si se adoptan como un elemento de juicio acerca de la índole de los motivos matemáticos o acerca de la calidad del conocimiento matemático en las ecuaciones diferenciales de esta época.

En primer lugar, no estaría de más tomar en consideración otros tópicos de interés para esta época. Por ejemplo, la ecuación de Liénard o la teoría de la estabilidad. En segundo lugar, conviene contrastar o compensar estos resultados, sugeridos por el enfoque de la teoría de la recepción, con la información que se haya obtenido o se pueda obtener a la luz de otras perspectivas historiográficas y, por referencia a otras formas diversas de contribución al desarrollo de la teoría cualitativa en el siglo XX. El cauce fundamental de la matemática; como el de un gran río, es alimentado, en primer lugar, por los arroyuelos. Los grandes descubrimientos, con mucha frecuencia, se garantizan y preparan mediante el trabajo meticuloso de muchos investigadores. Todo lo dicho no sólo se refiere a la matemática, sino también, a una de sus líneas más ricas, la teoría de las ecuaciones diferenciales, rama que en la actualidad constituye un conjunto difícilmente abarcable de hechos, ideas y métodos muy útiles para las aplicaciones y capaces de estimular las investigaciones teóricas en otras ramas de las matemáticas y fuera de esta.

Apéndice

Empezaremos a desarrollar el caso de la Escuela de Gorki de Andronov, desde el punto en que resulta menos familiar al lector[30]. Las raíces y sus fuentes, por ellos mismos reconocidas, son dos: (1) su mentor, el físico L. I. Mandelsthaln, que trabajó en óptica, radiofísica, y teoría de oscilaciones contenía un programa unificado para el estudio de la Naturaleza en base de la "física de las oscilaciones" y (2) Poincaré, cuyo trabajo él reseñó desde antes de 1928 y nunca dejó de estudiar, recomendándolo a los estudiantes, y logró publicarlo en la Unión Soviética. Después de adquirir un fuerte entrenamiento en matemáticas y

[30]Véase S. Diner: *Les voies du chaos déterministe dans l´école russe*, en *Chaos et déterminisme*, A. Dahan Dalmedico, J. L. Chabert & K. Chemlam (Eds), Editions du Seuil, París, 1992; A. Dahan Dalmedico: *La renaissance des systèmes dynamiques aux États-Unis après la deuxième guerre mondiale: L'action de Solomon Lefschetz*, Suplemento ai Rendiconti dei circolo matemático di Palermo, Ser. II **34** (1994), 133-–166;A. Dahan Dalmedico: *La théorie des oscillations d´Andronov*, Ponencia presentada en la Conferencia *A. A. Andronov, des cycles limites de Poincaré aux lasers*, Institut Henri Poincaré, París, 1996, Marzo 23, para algunos aspectos de la escuela de Andronov, y también D. Aubin & A. Dahan Dalmedico: *Writing the history of dynamical system and chaos: Longue Durée and Revolution, Disciplines and Cultures*, Historia Matemática **29** (2002), 273-–339 y A. Dahan Dalmedico & I. Gouzevitch: *Andronov and the Gorki school: from auto-oscillations to radiophysics and control theory*, de próxima aparición.

en física, en su tesis ANDRONOV atacó un problema de ingeniería sugerido por MANDELSTHALN: tomar la autoinducción en cuenta en el caso del interruptor electromagnético, análogo a la oscilación-relajación de van der Pol, este oscilador es un sistema disipativo cuyas vibraciones son sostenidas por una fuente externa de energía no oscilante. En el espacio de fases, Andronov[31] notó, que este movimiento es análogo a los ciclos límites de Poincaré. Usando resultados del "Méthodes nouvelles de la mécanique", desarrolló un método para estudiar la estabilidad de soluciones periódicas. Esto significaba, lejos de ser evidente, que uno podría transferir métodos y resultados de POINCARÉ para sistemas mecánicos hamiltonianos a sistemas disipativos con pocos grados de libertad; y esto era un paso crucial. Más adelante, transponiendo, o extendiendo el arsenal de POINCARÉ, ANDRONOV se esforzaría por desarrollar el programa de MANDELSTHALN. Usando también la herencia de LYAPUNOV, ANDRONOV se centró en el problema de la estabilidad. Combinando el método del pequeño-parámetro de POINCARÉ con la teoría de la estabilidad de Lyapunov, estableció un método para encontrar soluciones periódicas y estudiar su estabilidad (la teoría de LYAPUNOV ha tendido a ser descuidada en las reseñas históricas dadas por los teóricos de los sistemas dinámicos, influenciados por SMALE, sobretodo).

En 1931 ANDRONOV colocó lejos de Moscú, en Gorki, donde había un instituto pequeño de radiofísica, el liderazgo en este campo. Este instituto, al que él decidió desarrollar, le permitió encontrar su propia escuela de investigación dedicada al estudio de oscilaciones no lineales. Desde un punto de vista científico y estratégico, el contexto era favorable al estudio de oscilaciones auto-sostenidas (auto-entretenues). En este período, las preguntas referentes a oscilaciones en circuitos eléctricos, termoiónicos, y electrónicos, y después la exploración electrónica y la televisión atrajeron mucho más interés que el que siempre hizo el estudio de las vibraciones mecánicas. Una razón para esto era que las vibraciones, indeseables en los dispositivos mecánicos (tales como trenes y aeroplanos), eran los efectos parásitos que un investigador intentaba eliminar o al menos controlar, más que estudiar y calibrar de hecho

[31]A. ANDRONOV: *Les cycles lymites de Poincaré et la théorie des oscillations auto-entretenues*, Comptes Redus de l´Académie des sciences **189** (1929), 559—561.

exacto (e.g., en los receptores de radio)[32]. En los años 30, la estabilización de vibraciones y de fenómenos no lineales de la resonancia parecía vital para la potencia militar soviética. En la Primera Conferencia de la Unión sobre las Auto-oscilaciones, llevada a cabo en Moscú en noviembre de 1931, la importancia científica y tecnológica del problema fue subrayada, el trabajo fue organizado, y pusieron en Andronov y su instituto de Gorki todo el peso de los esfuerzos de dicha investigación. Recolectando a un equipo de matemáticos, de físicos, y de ingenieros puros y aplicados, él se propuso abordar problemas teóricos y prácticos simultáneamente y en colaboración estrecha. En el curso de los años 30, la teoría de oscilaciones no lineales, el estudio de las ecuaciones diferenciales con un número pequeño de grados de libertad que provenían principalmente de la radio tecnología, formó el campo privilegiado de investigación de Andronov, en contacto cercano con sus aplicaciones: circuitos eléctricos con tubos al vacío, tubos de neón, oscilaciones de relajación en radiofísica e ingeniería eléctrica, oscilación en ruedas del vehículo, regulación y control de máquinas, etc. Las variadas herramientas, altamente teóricas, usadas y desarrolladas por Andronov y sus colaboradores (aplicaciones puntuales, recurrencias, bifurcaciones, casos críticos, estabilidad, y la famosa noción de "systèmes grossiers" discutida abajo) eran todas destinadas a las aplicaciones. En particular, el método de las aplicaciones puntuales, explorado por Poincaré en el caso de la sección que lleva su nombre, fue, por una época, esencial. Bien adaptado a los problemas de ingeniería (especialmente a la regulación automática) donde eran útiles las ecuaciones discretas, este período, las preguntas referentes a oscilaciones en circuitos eléctricos, termoiónicos, y electrónicos, y después la exploración electrónica y la televisión atrajeron mucho más interés que el que siempre hizo el estudio de las vibraciones mecánicas. Una razón para esto era que las vibraciones, indeseables en los dispositivos mecánicos (tales como trenes y aeroplanos), eran los efectos parásitos que un investigador intentaba

[32]Para la historia de la ingeniería eléctrica y de la radio, véase S. Bennett: *History of control engineering 1930-1955*, IEEE Control Engineering, Vol. 47, London: Peter Peregrinu, 1993 y P. Dunsheath: *A history of electrical engineering*, London: Faber & Faber, 1962.

eliminar o al menos controlar, más que estudiar y calibrar de hecho exacto (e.g., en los receptores de radio)[33]. En los años 30, la estabilización de vibraciones y de fenómenos no lineales de la resonancia parecía vital para la potencia militar soviética. En la Primera Conferencia de la Unión sobre las Auto-oscilaciones, llevada a cabo en Moscú en noviembre de 1931, la importancia científica y tecnológica del problema fue subrayada, el trabajo fue organizado, y pusieron en Andronov y su instituto de Gorki todo el peso de los esfuerzos de dicha investigaci ón. Recolectando a un equipo de matemáticos, de físicos, y de ingenieros puros y aplicados, él se propuso abordar problemas teóricos y prácticos simultáneamente y en colaboración estrecha. En el curso de los años 30, la teoría de oscilaciones no lineales, el estudio de las ecuaciones diferenciales con un número pequeño de grados de libertad que provenían principalmente de la radio tecnología, formó el campo privilegiado de investigación de Andronov, en contacto cercano con sus aplicaciones: circuitos eléctricos con tubos al vacío, tubos de neón, oscilaciones de relajación en radiofísica e ingeniería eléctrica, oscilación en ruedas del vehículo, regulación y control de máquinas, etc. Las variadas herramientas, altamente teóricas, usadas y desarrolladas por Andronov y sus colaboradores (aplicaciones puntuales, recurrencias, bifurcaciones, casos críticos, estabilidad, y la famosa noción de "sistemes grossiers" discutida abajo) eran todas destinadas a las aplicaciones. En particular, el método de las aplicaciones puntuales, explorado por POINCARÉ en el caso de la sección que lleva su nombre, fue, por una época, esencial. Bien adaptado a los problemas de ingeniería (especialmente a la regulación automática) donde eran útiles las ecuaciones discretas, este método hizo natural pensar en los estados del sistema como puntos en el Espacio de Fases. También hizo más fácil extender el marco teórico común a los sistemas hamiltonianos y disipativos. La mayoría de estos resultados, junto con su contexto de uso, fueron recolectados en el libro *Teoría de oscilaciones* de ANDRONOV, VITT y KHAIKIN, publicada en 1937 (víctima de la purga Stalinista de

[33]Para la historia de la ingeniería eléctrica y de la radio, véase S. BENNETT: *History of control engineering 1930-1955*, IEEE Control Engineering, Vol.47, London: Peter Peregrinu, 1993 y P. DUNSHEATH: *A History of Electrical Engineering*, London: Faber & Faber, 1962.

1937, Aleksandr Adolfovich Vitt no apareció en la edición rusa original. El libro fue traducido al inglés por Lefschetz en 1949 en una forma abreviada, y en 1966 en su totalidad). La estructura del tratado reflejó el programa de investigación del cual emergió: el asunto básico eran las oscilaciones en sistemas no lineales con un grado de libertad y la atención fue centrada especialmente en los ejemplos concretos tratados tan completamente como fuera posible (el péndulo de Froude, circuito con tubos al vacío, estabilizador de naves, roturas de Prony, y así sucesivamente). Contrario a la Mecánica Celeste (donde la Ley de Newton fue supuesta para ser exactamente cierta), la consideración de los *sistemas físicos verdaderos nos fuerzan siempre a simplificar e idealizar.*[34]

En una larga introducción ellos explicaron que: Es evidente que puesto que las pequeñas perturbaciones al azar son inevitables en todos los sistemas físicos, los procesos que son posibles solamente en ausencia de cualquier desviación al azar o las perturbaciones cualesquiera no pueden ocurrir realmente en ella[35]. Estas consideraciones habían conducido a Andronov y a sus colaboradores (su esposa E. Leontovich, A. G. Maier, N. N. Bautin, y otros) a desarrollar la teoría de bifurcaciones, es decir, el estudio de cambios cualitativos en retratos de la fase donde los parámetros fueran variados levemente, y, de allí, a la doble estabilidad del sistema, con respecto a variaciones en las condiciones iniciales (en referencia a la teoría de Lyapunov), y con respecto a variaciones en un parámetro, o, como él escribió, "el modelo matemático sí mismo". La implicación de este segundo tipo de estabilidad estaba clara: *tenemos siempre que tener en cuenta la posibilidad de variaciones pequeñas de la forma de las ecuaciones diferenciales que describen un sistema físico.*[36] De tales preocupaciones emergió la noción de "sistemas gruesos". Primero introducido en la literatura como "systèmes grossiers" por Andronov y Pontriagin, este término se ha traducido en inglés, como "sistemas gruesos" o "ásperos". En su traducción de 1949 del citado

[34]Véase la edición en inglés de 1966, pág. xv, de Andronov, Vitt & Khaikin: Ob.cit..

[35]*Ibid.*, pág. xviii.

[36]A. Andronov & L. Pontriaguin: *Systèmes grossiers*, Doklady Akademi Nauk SSSR 14 (1937), 247-–250.

libro de ANDRONOV, VITT y KHAIKIN, Lefschetz llamó a estos sistemas "sistemas estructuralmente estables". Como ARNOLD ha enfatizado[37], esta noción apareció en el trabajo de Andronov como una definición matemáticamente rigurosa e idea general sobre el tipo de sistemas útiles para modelar matemáticamente en la física e ingeniería. En términos matemáticos, indicó que un sistema era grueso si una variación pequeña en la ecuación inducía un homeomorfismo "pequeño" bajo el cual el retrato de la fase permanecía sin cambios desde el punto de vista cualitativo, transforma trayectoria en trayectoria, puntos críticos en puntos críticos, ciclos límites en ciclos límites, etcétera, es decir, en dosdimensiones, el retrato de fases del sistema modificado,

$$x' = P(x,y) + p(x,y); \qquad y' = Q(x,y) + q(x,y),$$

era cualitativamente equivalente al no perturbado (con $p = q = 0$). La pregunta física más importante referida a estados estacionarios, estados de equilibrio o movimientos periódicos, "los [movimientos] más típicos sobre intervalos largos del tiempo".[38] Esta es la razón por la cual la búsqueda de ciclos límites, en general muy difícil, era crucial, y el tratado resumió los métodos disponibles para esta tarea (el método del índice de Poincaré, el criterio de Bendixson, y los propios métodos de ANDRONOV). Bajo la restricción de la doble estabilidad mencionada arriba, estaba interesado en clasificar los comportamientos típicos previstos. Los métodos matemáticos sofisticados fueron elaborados para contestar a la pregunta: ¿Qué es necesario conocer sobre un sistema dado para poder determinar totalmente la estructura cualitativa de sus órbitas? En el lenguaje topológico contemporáneo, esto significa identificar un invariante completo del sistema bajo conjugación topológica. Desde 1937, parece, la escuela de ANDRONOV había desarrollado la teoría de sistemas gruesos de dos dimensiones, incluyendo una caracterización de las bifurcaciones posibles y de la identificación de un invariante topológico (el esquema), la consecuencia de las cuales era que, en sistemas gruesos

[37] V. I. ARNOLD: *Catastrophe Theory*, en *Dynamical systems V: Bifurcation theory and catastrophe theory*, Encyclopedia of Mathematical Sciences, V. I. ARNOLD (Ed.) Vol.5, 1994, Berlín, Springer Verlag, págs. 207—264.

[38] ANDRONOV *et al.* 1949, pág. xxvii.

de dos dimensiones, sólo los ciclos límites estables podrían representar fenómenos auto-oscilantes.

Al final de los años 30, Andronov y su escuela volcaron su atenci ón a la teoría del control automático (dinámica de vuelo, de relojes, de reguladores engranados, etc.). Un rasgo característico fue que Andronov consideró problemas multidimensionales, los que apuntaron el arsenal desarrollado para el caso de dos dimensiones a situaciones no estándard. Andronov, Bautin, Maier, y otros, se ocuparon de problemas de la estabilización (e.g., para aeroplanos con piloto-automático, el también llamado problema de Mises-Vishegradsky) y de otros problemas de oscilaciones no lineales. Las preguntas referentes a la física teórica de las oscilaciones también fueron estudiadas desde un punto de vista práctico: diodos y magnetrones en particular, lo que condujo al estudio estadístico de la alta frecuencia. La escuela de Andronov por lo tanto, inició el estudio de fluctuaciones y la influencia del ruido parásito en los procesos auto-oscilantes, en los cuales confió la electrónica moderna y, más adelante, los masers y los lasers.[39]

Durante la "Gran Guerra Patria", y más aún en la Guerra Fría, el financiamiento del Instituto de Gorki creció grandemente. Una Escuela de Radiofísica fue establecida, la cual permanecía en estrecho contacto con el Instituto de Andronov. Los contratos con los militares y las "P.O. Box" eran abundantes (para las comunicaciones *top-secret* con el Ministerio de defensa en la vieja Unión Soviética; un número de P.O. Box era a menudo la única identidad dada a las correspondencias). Varios otros temas, de variados campos de la física (física de alta frecuencia, electrónica, astrofísica) así como ciencia de la ingeniería, se convirtieron en su reino: ondas y radar, interacciones entre los campos magnéticos (cruciales para los problemas de la instrumentación), problemas de lanzamiento de los misiles, etc. Después de la muerte de Andronov en 1951, sus colaboradores Zheliztsov y Neimark fueron conectados con

[39]Pontryagin, Andronov, y Vitt publicaron su famosa nota *Sobre el tratamiento estadístico de los sistemas dinámicos* en 1933; sobre los masers y los lasers, véase a J. L. Bromberg: *The laser in America*: 1959-1970, Cambridge, MA, MIT Press, 1991.

trabajos secretos sobre los reactores nucleares y el control de los procesos de explosión, debido a su maestría en la regulación.

El cuadro global del trabajo realizado en la Unión Soviética todavía sigue siendo algo oscuro[40]. Mencionemos que hubo otra escuela desarrollada en Kiev, Ucrania, en los años 30. Los más famosos representantes eran NIKOLAI M. KRYLOV y NIKOLAI M. BOGOLIUBOV (N. M. KRYLOV no debe ser confundido con N. S. KRYLOV, mencionado antes). Para exposiciones accesibles de este período, véase KRYLOV & BOGOLIUBOV[41]. La Escuela de Kiev centrada en la "mecánica no lineal" utilizaba, más que los acercamientos cualitativos analíticos, los métodos cuantitativos, tales como métodos asintóticos, desarrollos en serie, y procedimientos de aproximación y promediación, que provenían principalmente de POINCARÉ[42]. En Kiev, como en Gorki, las preocupaciones prácticas y tecnológicas fueron mezcladas firmemente con progresos teóricos o matemáticos fundamentales.

La segunda escuela que desempeñó un papel fundamental en la Unión Soviética era, por supuesto, la de ANDREI N. KOLMOGOROV, cuyo trabajo sobre mecánica clásica fue influenciado por KRYLOV y BOGOLIUBOV. Comparable solamente a POINCARÉ en el alcance y la profundidad, la obra de KOLMOGOROV cruzó la teoría de los sistemas dinámicos desde diferentes ángulos: teoría de las probabilidades, procesos estocásticos, teoría de información, turbulencia, teoría espectral, y, sobretodo, la teoría general de sistemas hamiltonianos en la mecánica clásica y la teoría ergódica. El editor de sus *Trabajos Selectos*, V. M. TIKHOMIROV, dividió los trabajos de KOLMOGOROV en tres reinos: orden (matemáticas y mecánicos), "caos" (teoría de las probabilidades y estadística), e

---

[40]El artículo que da el examen más completo de la diversidad de la investigación soviética en el dominio es S. DINER, Ob. Cit.

[41]N. M. KRYLOV & N. BOGOLIUBOV: *Problèmes fondamentaux de la mécanique non linéaire*, Revue générale des sciences pures et apliquées **44** (1933), 9—19 e *Introduction to nonlinear mechanics: A free translation by Solomon Lefschetz of excerpts from two russian monograph*, Princeton: Princeton Univ Press, London: Oxford Univ. Press, 1943. Una exposición influyente es N. BOGOLIUBOV & Y. A. MITROPOLSKI: *Asymptotic methods in the tehory of nonlinear oscillations*, New York: Gordon & Breach, 1961.

[42]*Les méthodes nouvelles* ..., Vol. 2.

informaci ón y teorías algorítmicas, donde estos dos reinos no tenían ninguna frontera natural. Como Tikhomirov explicó, "el concepto de la aleatoriedad como complejidad algorítmica, la tentativa en descubrir la esencia de la noción de la orden y el caos llenan la vida creativa de Andrei Nikolaievich, y así podemos hablar de todos sus esfuerzos creativos en un solo nudo".[43] Es importante acentuar que, contrariamente a Poincaré, Kolmogorov entrenó a los estudiantes para que se hicieran líderes del mundo en el campo de los sistemas dinámicos, con comunicaciones de la teoría que fueron conocidas en el oeste en los años 70; entre dichos estudiantes tenemos a Manin, Arnold, Sina y Novikov[44]. Claramente, un estudio detallado de las matemáticas en la Unión Soviética y su impacto en la "revolución del caos" todavía está por llegar.

(Recibido en noviembre de 2003)

Juan E. Nápoles Valdes
e-mail: jnapoles@frre.utn.edu.ar ; idic@ucp.edu.ar
Universidad de la Cuenca del Plata
Lavalle 50 (3400) Corrientes, Argentina
Universidad Tecnológica Nacional
French 414 (3500) Resistencia, Chaco, Argentina

[43]Citado en S. Diner, *Ob. Cit.*, 353-–354.

[44]Sobre Kolmogorov véase S. Diner, *Ob. Cit.*, V. I. Arnold: *On A. N. Kolmogorov*, en Golden years of Moscow mathematics, S. Zdravkovska & P. L. Duren (Eds.), Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1993, 129–153 y A. N. Shiryaev: *Kolmogorov: life and creative activies*, Annals of Probability **17** (1989), 866—944, así como el volumen corregido por las sociedades matemáticas americana y de Londres del 2000, *Kolmogorov in perspective*, H. M. McFaden.