This is a reprint of
Lecturas Matemáticas
Volumen **25** *(2004), páginas 25–40*

¡Vivan los determinantes!

Garry J. Tee
Universidad de Auckland, Nueva Zelanda

Lecturas Matemáticas
Volumen **25** *(2004), páginas 25–40*

¡Vivan los determinantes![1]

Garry J. Tee
Universidad de Auckland, Nueva Zelanda

Abstract. Determinants were developed very extensively until matrices became popular in 1925, after which determinants were regarded as a very small part of linear algebra. Some mathematicians have actually urged that determinants should be abolished. But determinants are a small but essential part of linear algebra.

Key words and phrases. Linear algebra, Determinants.

1991 Mathematics Subject Classification. Primary 15A15 15A18, Secondary 15-03 01A27 01A50 01A55 01A60.

Resumen. El desarrollo de la teoría de los determinantes tuvo un desarrollo muy intenso hasta que las matrices se popularizaron en 1925, después de lo cual se consideró que los determinantes solo eran una parte muy pequeña del álgebra lineal. De hecho, algunos matemáticos han urgido su desaparición. Sin embargo, aún siguen siendo una pequeña pero esencial parte del álgebra lineal.

Los determinantes fueron usados en 1683 por el matemático japonés Takakasu Seki Kôwa (1642–1708) para una construir una resolvente de un sistema de ecuaciones polinomias (véanse Mikami (1913, págs. 191–199;1977) y IMAGE **13** (octubre 1999, pág.8)). Por su parte, en 1693,

[1]Publicado en IMAGE30, abril de 2003, págs, 5–9. Traducido al español por Víctor S. Albis y publicado en Lecturas Matemáticas con autorización del autor y de los editores de la revista IMAGE.

GOTTFRIED WILHELM VON LEIBNIZ (1646–1716) los inventó independientemente. Sir THOMAS MUIR (1844–1934) dio una magistral panorámica de los detrminantes entre 1693 y 1920, en una serie de 5 volúmenes publicados entre 1890 y 1930. Véase también el reciente artículo de FAREBROTHER, JENSEN & STYAN (2002), el cual incluye una lista de 131 libros sobre determinantes publicados en el siglo XIX y una extensa biografía de MUIR.[2]

Las matrices, por su parte, sólo fueron formalizadas por primera vez en 1858 por ARTHUR CAYLEY (1821–1895) y permanecieron casi en el anonimato hasta que el físico teórico WERNER KARL HEISENBERG (1901–1976) las reinventó en 1925 para usarlas en la física cuántica. La mayor parte del trabajo sobre determinantes que revisó MUIR tiene más sentido en el lenguaje de las matrices que en el de los determinantes. De hecho, el mismo MUIR, a la edad de 87 años, en 1931, escribía que "le daba la bienvenida a las fáciles y claras demostraciones matriciales que contrastaban con el pesado método de 35 años atrás" [TURNBULL (1934), pág. 79].

SHELDON AXLER instiga con vehemencia, en su polémico artículo, de 1995, titulado *¡Abajo los determinantes!*, a hacer el álgebra lineal sin el uso de los determinantes. Afirma que "los determinantes se necesitan en un sólo lugar en el currículo de las matemáticas de pregrado: la fórmula del cambio de variables en las integrales múltiples". Concordantemente, define el determinante de una matriz como el producto de sus valores propios (contando multiplicidades) y procede entonces a "derivar la fórmula del cambio de variables para integrales múltiples de manera tal que hace que aquí la aparición del determinante resulte natural."

Concuerdo con AXLER en que la evaluación numérica efectiva del determinante de una matriz pocas veces se requiere. He escrito varios procedimientos basados en los procedimientos del ALGOL 60 [WILKINSON & REINSCH (1971)] que conforman la base de la NAG *Library of Mathematical Software*. Varios de estos procedimientos matriciales producen el valor del determinante como un subproducto, pero siempre he

[2]Se está elaborando un número especial de la revista *Linear Algebra and its Applications* bajo la dirección editorial de WAYNE BARRETT, SAMAD HEDAYAT, CHRISTIAN KRATTENHALER & RAPHAEL LOEWY.

borrado esta característica de mis propias versiones, porque nunca lo he requerido.

En 1958, cuando era consultor matemático en la *English Electric Company* (en Whetstone, Inglaterra), encontré a uno de los asistentes del laboratorio de computación perforando tarjetas para un ingeniero. Los datos consistían de muchas matrices cuadradas de orden 6, cada una de la forma $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ para varios valores de λ. El ingeniero me contó que pretendía usarlas como subrutinas en la Biblioteca DEUCE (escrita principalmente por James H. Wilkinson y sus colegas) para evaluar el determinante de cada una de esas matrices, y que entonces ¡usaría la interpolación inversa para hallar los valores de λ para los cuales el determinante fuese cero! Le expliqué al ingeniero, con mucho tacto, que existían mejores maneras de atacar el problema, y lo envié a subrutinas de la biblioeca DEUCE para calcular valores propios.

La necesidad de los determinantes

En 1963 asistí a un conferencia sobre álgebra lineal numérica en el Laboratorio Nacional de Física de Inglaterra. Mi colega Charles G. Broyden hizo un vehemente llamado para eliminar a los determinantes del álgebra lineal, y anunció que escribiría un libro de texto sobre cálculos matriciales en el cual nunca mencionaría a los determinantes. Yo le respondí que los determinantes necesitaban aparecer como una parte pequeña pero esencial del álgebra lineal, y que me parecía que un texto como el suyo requeriría por lo menos media página, en caracteres de imprenta pequeños, sobre la teoría de los determinantes. En efecto, el texto de Broyden (1977) contiene un apéndice de 3 páginas sobre determinantes.

Para desarrollar la teoría de los determinantes sólo se necesita álgebra elemental, y mucho de ella la pueden entender y usar los estudiantes de secundaria. La única parte de la definición estándar de un determinante [Aitken (1939, pág. 131)] que puede dificultarse a un estudiante de secundaria es la clasificación como pares e impares de las permutaciones. De hecho, esto no se demostró efectivamente sino hasta *circa* 1870, y en

1871 JAMES J. SYLVESTER (1814–1897) se mostraba muy complacido con este avance de la teoría.

AXLER (1995) usa el lenguaje de los operadores lineales T sobre un espacio vectorial $n-$dimensional complejo V. Pero yo prefiero usar el lenguaje alternativo de las matrices cuadradas $\mathbf{A}$ de orden n, pues existen interesantes relaciones entre los elementos de una matriz y sus vectores y valores propios. Por ejemplo, todo valor propio de $\mathbf{A}$ tiene su módulo menor o igual a cualquier norma de $\mathbf{A}$, y las normas por sumas de columnas o de filas son fáciles de calcular. Además una matriz puede manejarse numéricamente de manera directa en un computador, pero un operador lineal debe convertirse antes en una representación matricial, en alguna base escogida, antes de que pueda representarse en un computador. Para un analista numérico, buena parte del material contenido en el AXLER (1995) le dede parecer innecesariamente abstracto, puesto que no puede fácilmente programarse en un computador.

En su definición estándar, $\det(\mathbf{A})$ se calcula a partir de los elementos de $\mathbf{A}$ mediante un número finito de multiplicaciones, adiciones y substracciones. De manera que si todos los elementos de $\mathbf{A}$ son números enteros (o racionales, algebraicos, reales o complejos), entonces el valor de $\det(\mathbf{A})$ es un número entero (o racional, algebraico, real o complejo).

En un texto reciente, HOPPENSTEADT & PEAKIN (2002) recalcan (en el Apéndice A) que "el determinante se define de una manera complicada que no presentaremos aquí, [¡] pero MATLAB puede a menudo calcularlo rápidamente"[!] Los lectores de este texto deben comprender que el cálculo numérico de los determinantes es muy raramente deseable.

Matrices adjuntas y matrices inversas

En 1750, GABRIEL CRAMER (1704–1752), el de la *regla de Cramer*, usó los determinantes para demostrar un teorema de suma importancia [MUIR (1906, págs. 11-14)]. En notación matricial dice así:

$$\mathbf{A}\,\mathrm{adj}(\mathbf{A}) = \mathrm{adj}(\mathbf{A})\mathbf{A} = \det(\mathbf{A})\mathbf{I}\ , \tag{1}$$

donde los elementos de la matriz $\mathrm{adj}(\mathbf{A})$ son determinantes con signo de submatrices de $\mathbf{A}$ de orden $n-1$. Por consiguiente, $\mathbf{A}$ tiene como inverso (a izquierda y a derecha) a

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \operatorname{adj}(\mathbf{A}) \tag{2}$$

a menos que $\det(\mathbf{A}) = 0$, en cuyo caso $\mathbf{A}$ no es invertible.

Luego, si todos los elementos de $\mathbf{A}$ son racionales (o algebraicos, reales o complejos) y $\det(\mathbf{A}) \neq \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{A}^{-1}$ tiene sus elementos racionales (o algebraicos, reales o complejos). Si $\mathbf{A}$ es unimodular, es decir, si $\det(\mathbf{A}) = \pm 1$, entonces $\mathbf{A}^{-1} = \pm \operatorname{adj}(\mathbf{A})$. De modo que si todos los elementos de $\mathbf{A}$ son números enteros también lo serán los de $\mathbf{A}^{-1}$ (Tee, 1972; 1994).

En mi opinión, la propiedad más importante de los determinantes es el teorema que resulta de (1) y que dice que toda matriz cuadrada es invertible, a menos que su determinante sea 0 [Axler (1995, Th. 9.1)]. Todo número es el determinante de una matriz, puesto que el hecho de que el determinante tome el valor particular cero es un caso *singular*. De allí que, con propiedad, las matrices de determinante igual a cero se denominen singulares. Este teorema lo usó Seki en 1683 [Mikami (1913, págs, 191-199;1977)], pero la primera demostración de que si $\det(\mathbf{A}) = 0$ entonces la ecuación homogénea $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ tiene una solución $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ la dio, en 1851, William Spottiswoode (1825–1883) [Muir (1911, págs. 54–58)]. ¡Muir describió el Teorema 10 de Spottiswoode como "nuevo pero sin importancia"! Para una genealogía de William Spottiswoode véase Farebrother (1999) y para una genalogía de la familia Spottiswoode véase Farebrother & Styan (2000).

La expresión explícita (2) de $\mathbf{A}^{-1}$ es útil en la teoría de matrices, pero no es eficiente para calcular la inversa de $\mathbf{A}$. Más aún, muy rara vez se necesita calcular el inverso de una matriz. De hecho, expresiones matriciales que involucran inversos pueden calcularse (en aritmética redondeada) más eficientemente usando otros algoritmos. Por ejemplo, el complemento de Schur $\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ puede evaluarse eficientemente usando el algoritmo de Aitken [Fox (1964, págs. 75–78)].

Una clase muy importante de matrices son las matrices alternantes

[AITKEN (1939, pág. 42)], donde

$$a_{i,j} = \mu_i^{j-1} \qquad (1 \leq i, j \leq n) \ . \tag{3}$$

Una propiedad importante es que una matriz alternante $\mathbf{A}$ es singular si, y sólo si, dos o más de los μ_i son iguales. Esto puede demostrarse usando factorización polimonia, pero la demostración estándar de los libros de texto, usando la fórmula

$$\det(\mathbf{A}) = \prod_{i>j} (\mu_i - \mu_j) \ ,$$

es más sencilla. Queremos resaltar que a las matrices alternantes las han llamado también *matrices de Vandermonde*. No existe en el importante artículo de 1771 de ALEXANDRE-THÉOPHILE VANDERMONDE (1735–1796) nada que corresponda a la noción de matriz alternante [MUIR (1906, págs. 17–24 & 306)]. Pero ABRAHAM DE MOIVRE (1767-1754) publicó la inversa de una matriz alternante general en 1738, de modo que las matrices alternantes bien pueden llamarse *matrices de de Moivre* [TEE (1993, págs. 89–90)].

Usando la definición de determinante resulta fácil mostrar que $\det(\mathbf{A}^\top) = \det(\mathbf{A})$, de lo cual resulta de inmediato que el rango por filas de una matriz rectangular es igual rango por columnas. ¿Se habría podido demostrar este importante teorema sin la ayuda de los determinantes?

Vectores y valores propios

El problema de dilucidar si el vector $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ es o no un vector propio de una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ de orden n (con su valor propio asociado λ)

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \ , \tag{4}$$

se reduce (por el teorema de Spottiswoode) a la ecuación polinomia característica para el valor propio λ

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \ . \tag{5}$$

Pero entonces el problema de la existencia de un vector propio es equivalente al teorema fundamental del álgebra. Este teorema es un resultado bastante profundo del análisis y, por lo tanto, no podemos esperar una demostración más sencilla de la existencia de vectores y valores propios.

Luego, si todos los elementos de **A** son números complejos (o reales), entonces ella tiene n valores propios, contando multiplicidades.

El polinomio característico podría de hecho construirse en términos de los elementos de la matriz, a partir de la definición de determinante. De hecho, para una matriz cuadrada **A** de orden n, se define el polinomio

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \\ &= (-1)^n \left(\lambda^n - c_1\lambda^{n-1} - c_2\lambda^{n-2} - \cdots - c_n\right) \ , \end{aligned} \tag{6}$$

como su polinomio característico. A partir de esta definición, es claro que los coeficientes del polinomio característico se obtienen de los elementos de la matriz mediante multiplicaciones, adiciones y substracciones. Luego, si los elementos de una matriz son números enteros, también lo son los coeficientes de su polinomio (unitario) característico, multiplicado por $(-1)^n$. De manera análoga, si sus elementos son números racionales, algebraicos, reales o complejos.

Un teorema estándar basado en la definición (6) expresa los coeficientes del polinomio característico como las sumas de los determinantes de las menores principales de **A**. Los casos más simples de esto son:

$$c_1 = -\text{traza}\,(\mathbf{A})\,, \quad c_n = (-1)^{n-1}\det(\mathbf{A})\ , \tag{7}$$

Síguese inmediatamente de las *fórmulas de Vieta* [François Vieta, Seigneur de la Bigottière (1540–1603)] para el polinomio característico, que la suma y el producto de los valores propios son la traza (**A**) y el det(**A**), respectivamente. Así, todas las funciones simétricas de los valores propios pueden expresarse (mediante los coeficientes del polinomio característico) en términos de los elementos de **A** [Tee (1994)]. Por ejemplo, el algoritmo más sencillo para construir el polinomio característico de **A** es el de le Verrier [Urbain Jean Joseph le Verrier (1811–1877)] (véase, por ejemplo, Faddeev & Faddeeva (1963)), el cual está basado en el siguiente y bien conocido resultado:

$$\text{traza}\,(\mathbf{A}^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k\ , \tag{8}$$

el cual depende de la segunda igualdad en (7) entre los elementos de **A**.

Sea λ un valor propio de $\mathbf{A}$ que satisfaga la ecuación entre determinantes (5). Definamos

$$\mathbf{B} = \operatorname{adj}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \ , \tag{9}$$

de modo que de (4) y (5) se sigue que

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{B} = 0 \ . \tag{10}$$

Esto significa que toda columna de $\mathbf{B}$ que no sea nula es un vector propio de $\mathbf{A}$, con valor propio λ. Este método para construir valores propios sólo fallará cuando $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, es decir, cuando el rango de $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ sea menor que $n - 1$ (es decir, cuando cuando tienen defecto o nulidad mayor que 1). Y esto sólo puede suceder cuando λ es un valor propio múltiple de $\mathbf{A}$, lo cual ocurre en más de una celda de Jordan en la forma canónica de Jordan de $\mathbf{A}$.

Este método es a menudo útil para obtener una expresión explícita de un vector propio $\mathbf{v}$ con valor propio λ, aunque no es eficiente para valores grandes de n.

Axler (1995) define los valores propios así: "Un número complejo λ se dice un valor propio del operador lineal T definido sobre V, si $T - \lambda I$ no es inyectivo." Y en su Teorema 2.1, se propone demostrar que: *Todo operador lineal sobre un espacio vectorial complejo de dimensión finita tiene un valor propio.* La demostración de Axler es como sigue: para mostrar que T tiene un valor propio, fijamos un vector $v \neq 0$, $v \in V$. Los vectores v, Tv, T^2v, $\ldots$, T^nv no pueden ser linealmente independientes, porque V tiene dimensión n y tenemos en total $n + 1$ vectores. Por consiguiente, existen números complejos a_0, $\ldots$, a_n, no todos nulos, tales que

$$a_0v + a_1Tv + \cdots + a_{n.1}T^{n-1}v + a_nT^nv = 0 \ .$$

Consideremos a los a_j como los coeficientes de un polinomio que puede escribirse así:

$$a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n = c(z - r_1)\cdots(z - r_n) \ ,$$

donde c es un número complejo distinto de cero y cada r_j es complejo, y la ecuación es válida para todo número complejo z. Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= (a_0 I + a_1 I + \cdots + a_{n-1} T^{n-1} + a_n T^n) v \\ &= c(T - r_1 I) \cdots (T - r_m I) v \ , \end{aligned}$$

Lo cual significa que $T - r_j I$ no es inyectivo para por lo menos un j. Con otras palabras, T tiene un valor propio.

Con presunción AXLER declara (pág. 154) que "la demostración más sencilla de la existencia de valores propios dada en el [su] teorema 2.1 (véase arriba) debe ser aquella que esté grabada en nuestras mentes, escrita en el tablero y publicada en nuestros libros de texto." Esta demostración puede parecerle muy sencilla, pero usa conceptos matemáticos *mucho* más complicados que los del álgebra de secundaria usados en la demostración estándar de (5) usando determinantes. Por otra parte, su definición de valor propio dista mucho de ser sencilla, su demostración no ofrece ninguna construcción del polinomio característico y es más difícil de comprender que la demostración estándar.

¡Lo que es peor, parece que es incorrecta!

El coeficiente c es igual a a_n, el cual puede ser cero. En efecto, si $\mathbf{v}$ es un vector característico de $\mathbf{A}$ (el cual existe por la demostración estándar usando determinantes), con valor propio λ (como en (4)), entonces la dependencia lineal de AXLER subsiste para los coeficientes

$$a_0 = -\lambda, \ a_1 = 1, \ a_2 = \cdots = a_n = 0 \ , \tag{11}$$

y, en particular, $c = a_n = 0$, a menos que $n = 1$. [Subrayamos que AXLER (dos veces) escribe r_m en vez de r_n, pero como no dice nada acerca de m, sólo podemos suponer que se trata de una errata.]

Si $v \in V$, AXLER dice que v es un "un vector propio de T si $Tv = \lambda v$ para algún valor propio de λ" y en la proposición 2.2 habla de "vectores propios no nulos". Pero la definición estándar de un vector propio de una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ de orden n dice que un vector *no nulo* $\mathbf{v}$ es un vector propio si (4) se tiene para algún escalar λ. Si se aceptase a $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ como vector propio, entonces $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ sería un vector propio de cualquier matriz cuadrada de orden n y todo escalar sería un valor propio de $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Creo que la definición de multiplicidad de un valor propio dada por AXLER es más complicada que la definición estándar en téminos de la descomposición en factores lineales del polinomio característico, cuando se define como $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$. Si R es cualquier función racional, entonces $\mathbf{v}$ es un vector propio de $R(\mathbf{A})$ con valor propio $R(\lambda)$, cuya periodicidad se determina a partir de la descomposición en factores lineales del polinomio característico de $\mathbf{A}$. ¿Existe alguna manera sencilla de hacer esto sin el uso de los determinantes?

Una manera práctica de resolver la ecuación polinomia $q(z) = 0$ consiste en construir la matriz acompañante $\mathbf{Q}$ de q y calcular luego sus valores propios. Pero la demostración de que el polinomio característico de $\mathbf{Q}$ es precisamente q, se realiza desarrollando $\det(\mathbf{Q} - z\mathbf{I})$ por su última fila para obtener $q(z)$.

¿Cómo podría uno mostrar, en la versión de AXLER, que todo valor propio r tienen por lo menos un vector propio $\mathbf{v}$ (y, por lo tanto, un subespacio propio de dimensión por lo menos 1)? ¿Cómo podría uno relacionar los coeficientes del polinomio característico con los elementos de la matriz, como lo hemos hecho arriba, sin determinantes? ¿Cómo pordía uno construir funciones simétricas de los valores propios, en términos de los elementos de la matriz, sin determinantes? Es posible suponer que se pueden hacer estas cosas sin usar determinantes, pero no veo cómo puede ser más sencillo que el abordaje estándar de ellas con determinantes.

Los valores propios de $\mathbf{A}$ son funciones continuas de los coeficientes del polinomio característico, los cuales a su vez son funciones continuas de los elementos de $\mathbf{A}$. Luego, los valores propios son funciones continuas de los elementos de $\mathbf{A}$. Esta continuidad es importante en el análisis de perturbaciones, incluyendo el análisis de redondeo. Además, es necesaria para demostrar el importante teorema de Gerschgorin [SEMEON ARANOVICH GERSCHGORIN (1901–1933)] que dice que la unión de k discos de Gerschgorin de $\mathbf{A}$ (disyuntos de los otro $n - k$ discos) contiene exactamente k valores propios de $\mathbf{A}$ (contando multiplicidades). Con la definición del polinomio característico usando determinantes, la continuidad de los valores propios (cuando se perturba $\mathbf{A}$) se obtienen del primer curso de análisis de pregrado. ¿Puede este resultado demostrarse tan sencillamente sin determinantes?

Los valores y vectores propios de una matriz simétrica real $\mathbf{A}$ se calculan usando la transformación de semejanza de Householder para convertir a $\mathbf{A}$ en una matriz simétrica tridiagonal:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & & & \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & & & & \\ & \beta_2 & \alpha_3 & \beta_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \beta_{n-3} & \alpha_{n-2} & \beta_{n-2} & \\ & & & & \beta_{n-2} & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ & & & & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Sin pérdida sustancial de la generalidad, podemos tomar todos los β_j distintos de cero, pues si algún $\beta_j = 0$ entonces T se escinde (después de la columna y la fila $j-$ésima) en una suma directa de submatrices tridiagonales, y los valores propios de cada una de estas submatrices pueden hallarse independientemente de las otras. Desarrollando el determinante de la submatriz $\mathbf{T}-x\mathbf{I}$ que consiste de las filas columnas de la primera a la $j-$ésima, por la $j-$ésima columna, obtenemos su polinomio característico usando la siguiente relación de recurrencia:

$$p_j(x) = (\alpha_j - x)p_{n-1}(x) - \beta_{j-1}^2 p_{j-2}(x)\,; \quad j = 2, \ldots, n\,,$$

donde $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = \alpha_1 - x$ y $p_n(x)$ es el polinomio característico de $\mathbf{T}$. La anterior relación de recurrencia muestra que la sucesión $p_0(x)$, $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ es una *sucesión de Sturm*, cuyos cambios de signo dan el número de valores propìos menores que x. Por consiguiente, los valores propios de $\mathbf{T}$ pueden hallarse por un método de bisección, lo cual es un método útil, práctico y confiable para calcular los valores y los vectores propios de una matriz simétrica real $\mathbf{A}$. ¿Podría hacerse esto de manera sencilla sin el uso de los determinantes?

Resultantes polinomias

La resultante de dos o más polinomios (que es igual a cero si, y sólo si, los polinomios tienen un cero común) se expresa más fácilmente como un determinante. Por ejemplo, los dos polinomios

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \ ,$$
$$q(x) = ex^4 + fx^3 + gx^2 + hx + i$$

tienen un cero común si, y sólo si, la resultante $R(p, q) = 0$, donde $R(p, q)$ es el determinante de la matriz

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a & b & c & d \\ 0 & 0 & a & b & c & d & 0 \\ 0 & a & b & c & d & 0 & 0 \\ a & b & c & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f & g & h & i \\ 0 & e & f & g & h & i & 0 \\ e & f & g & h & i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz $\mathbf{R}$ tiene un patrón claramente comprensible, mientras que la forma explícita del determinante $R(p, q)$ tiene centenares de términos, que no tienen un patrón claro. La definición alternativa de $R(p, q)$ como el producto de los cuadrados de las diferencias entre los ceros de p y q no da indicación alguna sobre la naturaleza de los coeficientes del desarrollo del producto que representa a $R(p, q)$. Pero su definición como determinante muestra inmediatamente que si los coeficientes de p y q son números enteros (reales, atc.), también lo son entonces los coeficientes de $R(p, q)$.

El teorema de Cayley–Hamilton

Sea P el polimomio característico de la matriz cuadrada $\mathbf{A}$. El conocido teorema de Cayley–Hamilton dice que $P(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$. La demostración que da AXLER usa una larga sucesión de teoremas sobre operadores lineales, que muchos estudiantes de pregrado pueden considerarlos muy difíciles. Pero el teorema de Cayley–Hamilton puede demostrarse muy sencillamente usando determinantes (véase, por ejemplo, FADDEEVA (1959), págs. 154–155).

Definimos

$$\mathbf{B} = \operatorname{adj}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,, \tag{12}$$

de modo que cada elemento de $\mathbf{B}$ es el determinante con signo de una submatriz (de orden $n-1$) de $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ y, por lo tanto, es un polinomio en λ de grado -1 o menor. Así, la Matriz $\mathbf{B}$ puede escribirse en la forma

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{n-1} + \mathbf{B}_{n-2}\lambda + \cdots + \mathbf{B}_0\lambda^{n-1}\ , \tag{13}$$

donde las matrices $\mathbf{B}_{n-1}$, $\mathbf{B}_{n-2}$, $\ldots$, $\mathbf{B}_0$ no dependen de λ. De (1) resulta

$$\begin{aligned}(\mathbf{B}_{n-1}{+}\mathbf{B}_{n-2}\lambda + \cdots + \mathbf{B}_0\lambda^{n-1})(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})&\\ = \mathbf{B}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{I}&\\ = (-1)^n(\lambda^n - c_1\lambda^{n-1} - c_2\lambda^{n-2}\cdots - c_n)\mathbf{I}\,.&\end{aligned}$$

Igualando los coeficientes (matrices) de λ a ambos lados (lo cual puede hacerse elemento por elemento), encontramos un sistema de $n+1$ ecuaciones matriciales

$$\begin{aligned}-\mathbf{B}_0 &= (-1)^n\mathbf{I}\\ \mathbf{B}_0\mathbf{A} - \mathbf{B}_1 &= (-1)^{n+1}c_1\mathbf{I}\\ \cdots\quad &\ \ \cdots\\ \mathbf{B}_{n-2}\mathbf{A} - \mathbf{B}_{n-1} &= (-1)^{n-1}c_{n-1}\mathbf{I}\\ \mathbf{B}_{n-1}\mathbf{A} &= (-1)^{n+1}c_n\mathbf{I}\end{aligned}$$

Premultiplicando estas ecuaciones por $\mathbf{A}^n$, $\mathbf{A}^{n-1}$, $\mathbf{A}^{n-2}$, $\ldots$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{I}$, obtenemos la siguiente ecuación polinomia de matrices:

$$\mathbf{0} = (-1)^n(\mathbf{A}^n - c_1\mathbf{A}^{n-1} - c_2\mathbf{A}^{n-2} - \cdots - c_n\mathbf{I}) = P(\mathbf{A})\ ,$$

donde P es el polinomio característico de $\mathbf{A}$, tal como se ha definido en (6).

La demostración con determinantes del teorema de Cayley-Hamilton es mucho más sencilla que la demostración de AXLER de su Teorema 5.1, pues solamente usa álgebra elemental, y ni siquiera requiere del teorema fundamental del álgebra. AXLER desarrolla la teoría de vectores propios, polinomio mínimo, forma canónica de Jordan y bases orotogonales generalizados, para demostrar que el álgebra lineal puede hacerse sin determinantes. Pero varios textos, incluyendo los de FADDEEVA (1950) y FADDEEV & FADDEEVA (1963), usan los determinantes para establecer resultados básicos sobre inversión, singularidad, polinomios característicos, valores y vectores propios y el teorema de Cayley-Hamilton como lo hemos hecho arriba y a partir de allí desarrollan el álgebra lineal con poco o ningún uso explícito de los determinantes.

Aunque AXLER reconoce que los determinantes tiene uso en las matemáticas en el ámbito de la investigación, concluye, sin embargo, su artículo con la consigna *¡Abajo los determinantes!*. Pero aquí hemos demostrado que muchas partes significativas de la matemática de pregrado requieren ciertamente del uso de los determinantes. Por lo tanto, decimos *¡Arriba los determinantes!*

Referencias

[1] A. C. AITKEN (1939) *Determinants and Matrices.* Oliver & Boyd, Edinburgh. [Ninth edition, reset and reprinted: 1967. Fourth edition, revised: 1946; reprinted: 1983, Greenwood Press,Westport, CT. Existe traducción castellana de la segunda edición inglesa, hecha por TOMÁS RODRÍGUEZ BACHILLER. Editorial Dossat, Maddrid/Buenos Aires.]

[2] SHELDON AXLER (1995) *Down with determinants!* The American Mathematical Monthly, **102**, 139–154.

[3] CHARLES GEORGE BROYDEN (1975) *Basic Matrices: An Introduction to Matrix Theory and Practice.* Macmillan, London.

[4] D. K. FADDEEV & V. N. FADDEEVA (1963). *Computational Methods of Linear Algebra*, translated from the Russian by Robert C.Williams. W. H. Freeman, San Francisco.

[5] V. N. FADDEEVA (1959). *Computational Methods of Linear Algebra*, translated from the Russian by Curtis D. Benster. Dover, New York.

[6] R. WILLIAM FAREBROTHER, SHANE T. JENSEN & GEORGE P. H. STYAN (2002). *Sir Thomas Muir and nineteenth-century books on determinants.* IMAGE 28, 6–15.

[7] R. WILLIAM FAREBROTHER, SHANE T. JENSEN & GEORGE P. H. STYAN (2002). *Sir Thomas Muir and nineteenth-century books on determinants.*IMAGE 28, 6-15.

[8] R. WILLIAM FAREBROTHER & GEORGE P. H. STYAN (2002). *A genealogy of the Spottiswoode family: 1510-1900.* IMAGE 25, 19-21.

[9] RICHARD WILLIAM FAREBROTHER (2002). *A genealogy of William Spottiswoode: 1825-1883.* IMAGE 23, 3-4.

[10] LESLIE FOX (1964). *An Introduction to Numerical Linear Algebra.* Clarendon Press, Oxford.

[11] S. A. GERSCHGORIN (1931) *Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix.* Izvestija Akademii Nauk SSSR, VII Serija, 749–754.

[12] FRANK C. HOPPENSTEADT & CHARLES S. PEAKIN (2002). *Modeling and Simulation in Medicine and the Life Sciences*, Second edition. Springer-Verlag, New York.

[13] YOSHIO MIKAMI (1913). *The Development of Mathematics in China and Japan. Abhandlugen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften* 30, Leipzig. [Reprinted: 1961, Chelsea, New York.]

[14] YOSHIO MIKAMI (1977). *On the Japanese theory of determinants.* In *Science and Technology in East Asia* (Nathan Sivin, ed.), Science History Publications, New York, págs. 3–30.

[15] THOMAS MUIR (1890). *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development, Part I: Determinants in General, Leibniz (1693) to Cayley (1841).* Macmillan, London. [Second edition: 1906. Reprint edition: 1960, Dover, New York.]

[16] THOMAS MUIR (1906). *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development, Part I: General Determinants up to 1841, Part II: Special Determinants up to 1841.* Second Edition. Macmillan, London. [Reprint edition: 1960, Dover, New York.]

[17] THOMAS MUIR (1911). *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development, Volume II: The Period 1841 to 1860.* Macmillan, London. [Reprint edition: 1960, Dover, New York.]

[18] THOMAS MUIR (1920). *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development, Volume III: The Period 1861 to 1880.* Macmillan, London. [Reprint edition: 1960, Dover, New York.]

[19] THOMAS MUIR (1923). *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development, Volume IV: The Period 1880 to 1900.* Macmillan, London. [Reprint edition: 1960, Dover, New York.]

[20] THOMAS MUIR (1930). *Contributions to the History of Determinants: 1900-1920.* Blackie, London.

[21] JAMES JOSEPH SYLVESTER (1871). *A plea for the mathematician.* Nature, 1, 238. [Reprinted in The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester: Volume II, 1854-1873, Cambridge University Press, pp. 655–656, 1908.]

[22] GARRY J. TEE (1972). *A simple example of an ill-conditioned matrix.* SIGNUM Newsletter, **7** (2), 19–20.

[23] GARRY J. TEE (1993). *Integer sums of recurring series*. New Zealand Journal of Mathematics, **22**, 85–100.
[24] GARRY J. TEE (1994). *Fermat's little theorem generalized to algebraic integers and to integer matrices*. The Australian Mathematical Society Gazette, **22**, 160–164.
[25] HERBERT WESTREN TURNBULL (1935). *Thomas Muir*, The Journal of the London Mathematical Society, **10**, 76–80.
[26] JAMES H. WILKINSON & C. REINSCH, eds. (1971). *Handbook for Automatic Computation: Volume II, Linear Algebra*. Springer-Verlag, Berlin.

(Recibido en noviembre de 2003)

GARRY J. TEE
e-mail: tee@math.auckland.ac.nz
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF AUCKLAND
AUCKLAND, NEW ZEALAND