This is a reprint of
Lecturas Matemáticas
Volumen **25** *(2004), páginas 15–24*

Fórmula de recorrência para a soma de séries infinitas

João Luiz Martins & Adilson J.V. Brandão
UUniversidade Federal de Ouro Preto, Brasil

Lecturas Matemáticas
Volumen **25** *(2004), páginas 15–24*

Fórmula de recorrência para a soma de séries infinitas envolvendo seqüências do tipo Horadam

João Luiz Martins[1] & Adilson J.V. Brandão
Universidade Federal de Ouro Preto, Brasil

Abstract. In this article we introduce a recurrence formula for certain infinite series whose terms include factors that belong to a generalized Horadam-type sequence. This recurrence formula is used to calculate the $\sum_{n=1}^{+\infty} n^k W_n x^n$ series sum without use of derivatives and at a lower computation cost. Some results are presented below which were obtained by numerical implementation of the recurrence formula for some particular values of k and x.

Key words and phrases. Horadam's generalized numbers, Fibonacci sums, Pell sums.
1991 Mathematics Subject Classification. Primary 11B37, 11B39.

[1] Apoio UFOP e CNPq

1. Introdução

Neste artigo, considera-se a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^k W_n x^n \tag{1}$$

em que x é um número real, k é um inteiro não-negativo e $\{W_n\}$ é uma seqüência numérica arbitrária. Aplicando-se o critério da razão [6] a (1), observa-se que sua convergência está diretamente ligada ao caráter (comportamento) da seqüência $\{W_{n+1}/W_n\}$. Uma questão que se coloca é a seguinte: a partir da escolha de seqüências $\{W_n\}$ que venham possibilitar que expressões do tipo $\{W_{n+1}/W_n\}$ sejam seqüências convergentes, é possível obter uma fórmula para a soma da série (1)?

O estudo está baseado em seqüências especificadas em [3], [4] e [5], isto é, $\{W_n\}$, dadas recursivamente por

$$W_{n+2} = pW_{n+1} - qW_n\,, \quad n \geq 0; \tag{2}$$

sendo $W_0 = W_{n=0}$, $W_1 = W_{n=1}$ valores iniciais, p e q inteiros arbitrários.

A finalidade deste trabalho é responder essa questão para o caso em que $\{W_n = Z_n\}$, sendo $W_0 = Z_0 = 0$, $W_1 = Z_1 = 1$, $q = -1$ e p um inteiro arbitrário, onde, para $n \geq 0$, tem-se

$$Z_{n+2} = pZ_{n+1} + Z_n. \tag{3}$$

O uso dos métodos das aproximações sucessivas [8] e o das diferenças finitas [1] permitem mostrar que a seqüência $\{Z_{n+1}/Z_n\}$ converge para o limite $\alpha_+ = (p + \sqrt{p^2+4})/2$ se $p > 0$ e para $\alpha_- = (p - \sqrt{p^2+4})/2$ se $p < 0$.

Num passo seguinte, mostra-se que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} Z_n x^n = \frac{x}{1 - px - x^2} \tag{4}$$

sempre que $|x| < 1/|\alpha_\pm|$.

É possível encontrar uma fórmula de recorrência para a soma da série (1), em que $\{W_n\} = \{Z_n\}$, mediante a utilização da identidade (3), do desenvolvimento binomial de Newton [6] e de alguns rearranjos dos termos dessa série.

A importância da fórmula para a soma dessa série está no fato de que a implementação numérica fica facilitada pela sua característica de recursividade. Algumas somas para essa série são apresentadas para os casos especiais em que $\{Z_n\} = \{F_n\}$ e $\{Z_n\} = \{P_n\}$, conhecidas como as *seqüências de Fibonacci e Pell*, respectivamente.

2. Preliminares

Considere a seqüência $\{W_n = W_n(W_0, W_1, p, q)\}_{n=0}^{\infty}$, estabelecida em [3], [4] e [5], dada pela fórmula de recorrência

$$W_{n+2} = pW_{n+1} - qW_n; \tag{5}$$

em que $W_0 = 0$ e $W_1 = 1$ são os valores iniciais, p e q, inteiros arbitrários.

Em particular, $U_n = W_n(0, 1, p, q)$ é a seqüência de Fibonacci generalizada (números de Fibonacci generalizados). A forma de Binet [3] para U_n é dada por

$$U_n = \left(\alpha_+^n - \alpha_-^n\right)/\sqrt{\Delta}; \tag{6}$$

onde $\Delta = p^2 - 4q$,

$$\alpha_+ = \frac{p + \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{e} \quad \alpha_- = \frac{p - \sqrt{\Delta}}{2} \tag{7}$$

são as raízes distintas da equação $x^2 - px + q = 0$.

Utilizando as expressões (6) e (7), é fácil ver que a seqüência

$$\left\{\frac{Z_{n+1}}{Z_n}\right\}_{n=1}^{\infty} \tag{8}$$

converge para α_+ se $p > 0$ e α_- se $p < 0$.

A próxima seção é destinada ao estabelecimento de uma fórmula de recorrência para a soma da série

$$S(x, k) = \sum_{n=1}^{\infty} n^k Z_n x^n; \tag{9}$$

sendo $\{Z_n\}$ a seqüência (5), x um número real e k um inteiro não-negativo.

3. Fórmula de Recorrência

Antes de apresentarmos a soma da série (9), vamos estabelecer alguns resultados que deverão ser úteis na especificação dessa soma.

A série

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n x^n, \tag{10}$$

converge, sempre que $|x| < 1/|\alpha_\pm|$ (α_+ se $p > 0$ e α_- se $p < 0$).

Além disso, sua soma é a função

$$S(x) = \frac{x}{1 - px - x^2}. \tag{11}$$

De fato, a convergência da série (9) pode ser vista mediante o uso do teste da razão [6] e do fato de (8) ter como limite $\alpha_\pm$. Para mostrar que (11) é a soma de (10), considere

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} Z_n x^n \\ &= Z_1 x + Z_2 x^2 + \ldots + Z_n x^n + \ldots . \end{aligned} \tag{12}$$

Multiplicando (12) por $-px$, obtém-se

$$-pxS(x) = -pZ_1 x^2 - \ldots - pZ_n x^{n+1} - \ldots . \tag{13}$$

Depois, multiplicando (12) por $-x^2$, tem-se

$$-x^2 S(x) = -Z_1 x^3 - Z_2 x^4 - \ldots - Z_n x^{n+2} - \ldots . \tag{14}$$

Finalmente, somando as expressões (12), (13) e (14) e usando a fórmula de recorrência (5), obtém-se

$$S(x) = \frac{x}{1 - px - x^2}\,, \tag{15}$$

que é a soma da série (10).

É óbvio que, dentro do intervalo de convergência, a série (9) pode ser obtida através da aplicação na série (10) do teorema de derivação termo a termo [6].

De fato, tal fórmula é obtida aplicando-se o operador $D = \frac{xd}{dx}$, k vezes na conhecida série (10).

Definindo

$$S(x,k) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^k Z_n x^n \,, \tag{16}$$

uma fórmula de recorrência pode ser expressa da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S(x,0) &= \frac{x}{1-px-x^2}, \qquad (17)\\ S(x,j) &= D[S(x,j-1)] \quad j = 1,2,\ldots,k. \end{aligned}$$

O problema do algoritmo (17) é o alto custo de, em cada passo, obter a derivada de uma função. Por isso, encontrar uma soma para a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nZ_n}{2^n}$ não parece difícil, a partir do algoritmo (17). Entretanto, para determinar a soma da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{100}Z_n}{2^n}$, aplicando esse algoritmo, a obtenção do resultado torna-se bem exaustivo e computacionalmente muito caro.

Um dos propósitos deste artigo é obter uma outra fórmula de recorrência para a série (9) sem o uso de derivadas e a um custo computacional mais baixo.

Inicialmente, apresenta-se uma expressão para a soma

$$R(x,k) = \sum_{n=k}^{+\infty} Z_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} Z_n x^n - \sum_{n=1}^{k-1} Z_n x^n. \tag{18}$$

Utilizando a identidade (10), tem-se

$$\begin{aligned} R(x,k) &= \frac{x}{1-px-x^2} - \\ &- (Z_1x + Z_2x^2 + Z_3x^3 + \ldots + Z_{k-1}x^{k-1}). \end{aligned} \tag{19}$$

Efetuando a soma em (19) e usando a fórmula (5), obtém-se

$$R(x,k) = \sum_{n=k}^{+\infty} Z_n x^n = \frac{Z_k x^k + Z_{k-1}x^{k+1}}{1-px-x^2}. \tag{20}$$

Através do uso do teste da razão [6] e do fato estabelecido em (8), é fácil ver que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^k Z_n x^n \tag{21}$$

converge sempre que $|x| < \dfrac{1}{|\alpha_\pm|}$.

Com o intuito de obter uma fórmula de recorrência para a série (9), considera-se

$$S(x,k) = \sum_{r=1}^{+\infty} r^k Z_r x^r = 1^k Z_1 x + 2^k Z_2 x^2 + \ldots + r^k Z_r x^r + \ldots . \tag{22}$$

Mas,

$$\begin{aligned} S(x,k) &= (1^k - 0^k)(Z_1x + Z_2x^2 + \ldots + Z_nx^n + \ldots) \\ &+ (2^k - 1^k)(Z_2x^2 + Z_3x^3 + \ldots + Z_nx^n + \ldots) \\ &\vdots \\ &+ (n^k - (n-1)^k)(Z_nx^n + \ldots + \ldots) + \ldots . \end{aligned} \tag{23}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} S(x,k) &= (1^k - 0^k)\sum_{r=1}^{+\infty} Z_r x^r + \\ &+ (2^k - 1^k)\sum_{r=2}^{+\infty} Z_r x^r + \\ &\vdots \\ &+ (n^k - (n-1)^k)\sum_{r=n}^{\infty} Z_r x^r + \ldots . \end{aligned} \tag{24}$$

Utilizando a identidade (20), segue então que

$$S(x,k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[n^k - (n-1)^k](Z_n x^n + Z_{n-1} x^{n+1})}{(1 - px - x^2)} \tag{25}$$

sempre que $|x| < \dfrac{1}{|\alpha_\pm|}$.

Separando (25) em duas séries e utilizando uma mudança de variável na segunda série do lado direito, tem-se

$$\begin{aligned} S(x,k) &= \frac{1}{1-px-x^2}\sum_{n=1}^{+\infty}[n^k - (n-1)^k] Z_n x^n + \\ &+ \frac{1}{1-px-x^2}\sum_{n=0}^{+\infty}[(n+1)^k - (n)^k] Z_n x^{n+2}. \end{aligned} \tag{26}$$

Usando o desenvolvimento binomial e rearranjando os termos integrantes de (26), encontra-se

$$\begin{aligned} S(x,k) &= \frac{1}{1-px-x^2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{j+1} n^{k-j} Z_n x^n + \right. \\ &+ \left. x^2 \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j} n^{k-j} Z_n x^n \right). \end{aligned} \tag{27}$$

Portanto, sempre que $|x| < \dfrac{1}{|\alpha_\pm|}$, tem-se

$$S(x,k) \quad = \quad \frac{1}{1-px-x^2}\left(\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}[(-1)^{j+1}+x^2]S(x,k-j)\right) \tag{28}$$

A fórmula de recorrência (28) permite obter a soma de séries do tipo (9) a um custo computacional pequeno em comparação ao algoritmo (17).

4. Somas de Séries Especiais

Esta seção tem a finalidade de apresentar algumas somas de séries do tipo (9) em que $\{Z_n\} = \{F_n\}$ e $\{Z_n\} = \{P_n\}$, conhecidas como seqüências de Fibonacci e Pell [2], [3], [4] e [7], respectivamente.

A seqüência de Fibonacci é obtida de (5), tomando $p = 1$. Para obter a soma da série

$$S_F(x,k) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^k F_n x^n, \tag{29}$$

basta substituir $p = 1$ em (28). O resultado é dado por

$$S_F(x,k) = \frac{1}{1-x-x^2}\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}[(-1)^{j+1}+x^2]S_F(x,k-j), \tag{30}$$

válido para $|x| < \frac{1}{\phi}$; com $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Similarmente, a seqüência de Pell é obtida de (5), agora tomando $p = 2$. A soma da série

$$S_P(x,k) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^k P_n x^n \tag{31}$$

é dada a partir da substituição de $p = 2$ em (28). O resultado é dado por

$$S_P(x,k) = \frac{1}{1-2x-x^2} \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} [(-1)^{j+1} + x^2] S_P(x, k-j) \qquad (32)$$

sempre que $|x| < \frac{1}{\gamma}$; com $\gamma = 1 + \sqrt{2}$.

5. Implementação Numérica

Esta seção tem por finalidade apresentar alguns exemplos númericos gerados pelos algoritmos (30) e (32). A Tabela (I) apresenta certos resultados de somas envolvendo o algoritmo (30) para alguns valores especiais de k e de x dentro do intervalo de convergência da série (29). Da mesma forma, a Tabela (II) ilustra algumas somas para os mesmos valores de k e de x também dentro do intervalo de convergência da série (31).

Tabela (I): Somas da série de Fibonacci

x	k=1	k=5	k=50	k=100
$1/\pi$	1.041	6.288×10^2	1.656×10^{73}	4.105×10^{175}
$1/3$	1.2	9.688×10^2	6.526×10^{74}	5.932×10^{178}
$1/e$	1.692	2.752×10^3	4.667×10^{78}	2.549×10^{186}
$1/5$	0.360	2.598×10	2.893×10^{61}	2.130×10^{152}
$-1/3$	-0.247	-0.349×10	-1.010×10^{54}	-3.639×10^{137}

Tabela (II): Somas da série de Pell

x	k=1	k=5	k=50	k=100
$1/\pi$	5.104	1.271×10^5	3.835×10^{93}	1.105×10^{216}
$1/3$	7.5	4.036×10^5	7.042×10^{97}	3.074×10^{224}
$1/e$	25	1.522×10^7	1.771×10^{111}	1.062×10^{251}
$1/5$	0.663	2.848×10^2	1.150×10^{71}	2.749×10^{171}
$-1/3$	-0.153	-0.784	-7.970×10^{48}	-3.594×10^{127}

6. Observações Finais

Alguns resultados análogos aos obtidos anteriormente, mediante o uso da seqüência com a notação (2), em que q seja um inteiro arbitrário, bem como séries cujos coeficientes sejam as seqüências Tribonacci, Tetrabonacci, dentre outras, deverão ser objetos de futuros trabalhos.

Referências

[1] R. C. Bassanezi & W. C. Ferreira, *Equações Diferenciais com Aplicações*, Editora Harbra Ltda, 1988.

[2] R. A. Dunlap, *The Golden Ration and Fibonacci Numbers*, World Scientific, 1997.

[3] P. Filipponi, *Evaluation of certain infinite series involving terms of generalized sequences.* The Fibonacci Quarterly **38.4** (2000), 310-316.

[4] N. Gauthier, *Identities for class of sums involving Horadam's generalized numbers* $\{Z_n\}$. The Fibonacci Quarterly **36.4** (1998), 295-304.

[5] A. F. Horadam, *Basic properties of a certain generalized sequence of numbers.* The Fibonacci Quarterly **3.2** (1965), 161-176.

[6] K. Knopp, *Theory and Application of Infinite Series*, Dover Publications Inc, New York, 1990.

[7] G. Ledin, *On a certain kind of Fibonacci sums.* The Fibonacci Quarterly **5.1** (1967), 45-58.

[8] E. L. Lima, *Curso de Análise*, IMPA (Projeto Euclides), 1976.

(Recibido en marzo de 2004)

João Luiz Martins
e-mail: jmartins@iceb.ufop.br
Adilson J.V. Brandão
Departamento de Matemática, Universidade Federal de Ouro Preto
35.400-000, Ouro Preto, MG, Brasil