EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. **16**, Núm. 2, 249 – 258 (2001)

Théorème de Gelfand-Mazur dans les Algèbres p-Normées Non-Associatives

H. Kemmoun

Département de Mathématiques, Ecole Normale Supérieure de Takaddoum-Rabat, B.P. 5118 *Rabat, Maroc. e-mail : hkemmoun@yahoo.fr*

(Research Paper presented by A. Rodríguez Palacios)

AMS *Subject Class.* (2000): 46H70, 17A15 *Received June* 9, 2000

1. Introduction

Le fameux théorème de Gelfand-Mazur (1941), à savoir que le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, est à isomorphisme prés, l'unique $\mathbb{C}$-algèbre associative normée de division ([1]), a été étendu par Kaïdi ([10], théorème 1.6, p. 80) en 1977, aux algèbres non nécessairement associatives normées complètes de division linéaire. Mais le problème de la détermination des $\mathbb{C}$-algèbres normées (non nécessairement complètes) de division linéaire, est encore une question ouverte. Dans le cas réel, Wright ([25]) conjectura en 1953 que les $\mathbb{R}$-algèbres normées (non-associatives), de division linéaire sont de dimension finie. Cette conjecture s'est avérée difficile et, on est loin actuellement d'une réponse affirmative. Seuls quelques résultats partiels ont été jusqu'à présent obtenus. En 1977, Kaïdi prouva que les $\mathbb{R}$-algèbres de Jordan non commutatives (n.c.), faiblement alternatives, normées de division linéaire sont quadratiques et isomorphes à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$. Par suite, la validité de la conjecture est confirmée pour les algèbres alternatives et de Jordan et, dans le cas Jordan n.c., il a montré que l'algèbre est cayleyenne ([10]). Mais le problème de l'existence des $\mathbb{R}$-algèbres de Jordan n.c., quadratiques, de division linéaire, de dimension infinie, n'est toujours pas résolu. D'un autre côté, Cuenca a donné des exemples d'une classe d'algèbres réelles normées complètes de dimension infinie, de division linéaire à gauche ([2]) que Rodríguez a complètement décrit ([23]).

Dans le cas associatif topologique non nécessairement normé, le théorème de Gelfand-Mazur a été étendu notamment aux algèbres p-normées ([26], [27]), et aux algèbres localement multiplicativement convexes ([26]). Mais Zelazko prouva que ce théorème tombe en défaut pour les algèbres topologiques en général en donnant un exemple d'algèbre localement convexe complète non-métrisable (cf. [26], exemple 10.11, p. 85) et un autre exemple d'algèbre non-complète métrisable (cf. [26], exemple 10.9, p. 83) qui sont des algèbres topologiques associatives complexes de division non isomorphes à $\mathbb{C}$.

S'intéressant aux algèbres non-associatives et se basant sur ces faits, nous avons déjà examiné, en utilisant des techniques propres aux algèbres non-associatives, les théorèmes de Gelfand-Mazur et Kaplansky ([12]) dans les algèbres de Jordan p-normées complètes ([5]). Dans ce travail, nous faisons une étude globale des algèbres p-normées non-associatives. Nous montrons alors qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une algèbre non-associative unitaire métrique à produit continu soit localement bornée, est qu'elle soit p-normée, $0 < p \leq 1$, ensuite nous donnons quelques propriétés générales de ces algèbres. Enfin, nous généralisons le théorème de Gelfand-Mazur au cas d'une $\mathbb{C}$-algèbre p-normée unitaire complète.

Dans le cas Jordan n.c., nous montrons qu'une $\mathbb{C}$-algèbre de Jordan n.c. p-normée unitaire (non nécessairement complète) est isomorphe à $\mathbb{C}$. Concernant le cas réel, nous remarquons, en utilisant un théorème de structure des algèbres quadratiques ([20]) et un autre pour les algèbres normées réelles de Jordan n.c. de J-division ([11]), qu'une algèbre réelle de Jordan n.c. p-normée unitaire de J-division, peut être de dimension infinie, ce qui constitue une différence essentielle avec le cas associatif. Toutefois, l'existence des algèbres réelles de Jordan n.c. p-normées unitaires de division linéaire de dimension infinie reste encore un problème ouvert.

2. Préliminaires

Une algèbre D est dite alternative si $x^2y = x(xy)$ et $yx^2 = (yx)x$; $\forall x,y \in D$. Une algèbre D est dite algèbre de Jordan ([8]) si, $D \neq \{0\}$, est commutative et vérifie $(x^2y)x = x^2(yx)$, $\forall x,y \in D$. Une classe plus vaste d'algèbres non-associatives englobant les algèbres de Jordan et les algèbres alternatives est la classe des algèbres de Jordan n.c. Une algèbre D est dite de Jordan n.c. ([18]) si elle vérifie $(xy)x = x(yx)$ et $(x^2y)x = x^2(yx)$, $\forall x,y \in D$. Pour une algèbre de Jordan n.c., l'opérateur U_x est défini par $U_x(y) = x(xy + yx) - x^2y$. Il joue un rôle fondamental dans l'étude de ces algèbres.

Inversibilité dans les algèbres non-associatives. Il est clair que la théorie spectrale dépend d'une manière essentielle de l'inversibilité. Il est donc naturel, dans le cas non-associatif de rappeler les différentes notions d'inversibilité. Dans toute la suite, e désigne l'unité de l'algèbre D.

Inversibilité linéaire. Soit D une algèbre, un élément $x \in D$ est dit linéairement inversible (l-inversible), si les opérateurs de multiplication par x, L_x et R_x sont inversibles dans $L(D)$, (l'algèbre des opérateurs linéaires de D dans D). L'ensemble des éléments l-inversibles de D est noté $L - \mathrm{inv}(D)$. Un élément $x \in D$ tel que L_x (resp. R_x) est inversible dans $L(D)$ est dit l-inversible à gauche, (resp. à droite). L'ensemble des éléments l-inversibles à gauche, (resp. à droite) est noté $L - \mathrm{inv}_g(D)$, (resp. $L - \mathrm{inv}_d(D)$). Si D n'est pas réduite à $\{0\}$, elle est dite de division linéaire à gauche, (resp. à droite) si $L - \mathrm{inv}_g(D) = D - \{0\}$, (resp. $L - \mathrm{inv}_d(D) = D - \{0\}$). D est dite de division linéaire, si elle l'est à gauche et à droite.

Inversibilité au sens de Jacobson (J-Inversibilité). Pour une K-algèbre D, de Jordan n.c. unitaire d'unité e, un élément x est dit J-inversible dans D s'il existe $y \in D$ vérifiant $xy = yx = e$ et $x^2y = yx^2 = x$ ([18]). On notera le J-inverse de x par x^{-1} et l'ensemble des éléments J-inversibles par $J - \mathrm{inv}(D)$. D est dite de J-division si $J - \mathrm{inv}(D) = D - \{0\}$. On remarque que la notion de l-inversibilité et de J-inversibilité coïncide avec la notion usuelle de l'inversibilité dans le cas associatif et alternatif, dans le cas des algèbres de Jordan n.c. unitaires l'inversibilité linéaire entraîne la J-inversibilité, ([21]); mais on n'a pas l'equivalence des deux notions.

Soient D un espace vectoriel sur K et p un réel, $(0 < p \leq 1)$, on appelle p-semi-norme toute fonction $\|.\|_p$ de D vers $\mathbb{R}^+$ vérifiant:

1) $\|x\|_p \geq 0$
2) $\|\lambda x\|_p = |\lambda|^p \|x\|_p$ pour tout $x \in D$ et pour tout $\lambda \in K$
3) $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ pour tout $x, y \in D$

Une p-semi-norme est dite une p-norme si de plus: $\|x\|_p = 0 \Rightarrow x = 0$. Une partie B de D est dite p-disquée si pour tout $x, y \in B$, $\lambda x + \mu y \in B$, pour tout λ et μ positifs tels que $|\lambda|^p + |\mu|^p \leq 1$. Il est clair qu'une intersection quelconque de p-disqués est p-disquée. On note par $\Gamma_p(B)$ l'enveloppe p-disquée d'une partie B de D, (c.à.d. l'intersection de tous les p-disqués contenant B) et on démontre que $\Gamma_p(B) = \{\sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i x_i,\ x_i \in B \text{ et } \sum_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|^p \leq 1\}$.

Pour une partie B de D et p un réel, on pose $J_{B,p}(x) = \inf\{|\lambda|^p : x \in \lambda B\}$, avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$; $J_{B,p}$ s'appelle la p-jauge de B. Si B est absorbant, $J_{B,p}$ est une fonction finie. On démontre alors que la p-jauge d'un

p-disqué absorbant B est une p-semi-norme, ([9], [22]).

Dans toute la suite, l'appelation "algèbre" signifie algèbre non nécessairement associative.

3. Définitions et propriétés

En 1971, C. Viola ([24]) a défini les algèbres de Jordan topologiques à inverse continu et fait une étude spectrale de ces algèbres. En fait, ces algèbres sont des algèbres de Jordan localement convexes à inverse continu. N. El Yacoubi ([6], [7]) a appelé algèbre de Jordan topologique toute algèbre de Jordan J munie d'une topologie τ telle que l'espace vectoriel sous-jacent (J,τ) soit un espace vectoriel topologique et l'application $(x,y) \mapsto U_x(y)$ soit séparèment continue, définition que l'on peut même étendre au cas Jordan n.c. Pourtant cette définition ne constitue pas une généralisation naturelle de celle des algèbres normées non-associatives, ni de celle des algèbres topologiques associatives. Nous nous proposons d'appeler de telles algèbres, algèbres de Jordan J-topologiques, pour réserver l'appelation "algèbre topologique" à toute algèbre non-associative vérifiant la définition suivante:

Définition 3.1. Une algèbre D est dite topologique si elle est munie d'une topologie τ, telle que l'espace vectoriel sous-jacent (D,τ) soit un espace vectoriel topologique et l'application $(x,y) \mapsto x.y$ soit séparèment continue.

Remarque 3.2. Ainsi toute algèbre normée (associative ou non) est naturellement une algèbre topologique, et toute algèbre topologique associative l'est aussi. D'autre part, si D est une algèbre de Jordan n.c. topologique alors l'opérateur U_x est continu. Si D est à produit continu, alors elle est J-topologique, la réciproque est vrai dans le cas commutatif unitaire. En effet, soit D une algèbre de Jordan J-topologique unitaire, on a $R_y = \frac{1}{2}(U_{y+e} - U_e - U_y)$. Donc pour tout y fixé, l'application $x \mapsto R_y\,(x)$ est continue. De même, $y \mapsto R_y\,(x)$ est continue, pour tout x fixé. Inversement, si l'on suppose $(x,y) \mapsto xy$ globalement continue, R_y et R_{y^2} sont continues et, par suite $U_y(x) = 2(xy)y - xy^2$ est continue par rapport à x. De plus $U_y(x)$ est continue par rapport à y du fait que $U_y(x) = 2yL_x\,(y) - L_x\left(y^2\right)$, (On remarque même que l'application $(x,y) \mapsto U_x(y)$ est globalement continue, et dans ce cas les deux notions d'algèbre de Jordan topologique et J-topologique coïncident).

Par ailleurs, si D est une algèbre topologique non commutative alors D^+, (D^+ étant l'algèbre de même structure vectorielle que D, munie du produit

$x.y = \frac{1}{2}(xy + yx))$ est une algèbre topologique, si D est de Jordan n.c. à produit continu alors D^+ est J-topologique.

THÉORÈME 3.3. (Condition nécessaire et suffisante pour qu'une algèbre métrisable unitaire soit localement bornée.) *Soit D une algèbre métrisable à produit continu unitaire. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

1) *Il existe sur D une distance équivalente d définissant la topologie de D et telle que $d(xy,0) \leq d(x,0)d(y,0)$.*

2) *D est localement bornée.*

3) *La topologie de D peut être définie par une p-norme $\|.\|_p$, $0 < p \leq 1$ vérifiant $\|xy\|_p \leq \|x\|_p \|y\|_p$ pour tout x,y et $\|e\|_p = 1$.*

En plus si D est complète, alors D est aussi complète relativement à la p-norme $\|.\|_p$.

Démonstration. Dans la preuve du cas associatif ([26]), l'associativité est utilisée d'une manière essentielle. Notre démonstration est une adaptation au cas p-normé de la preuve du résultat analogue dans le cas normé dû á Ocaña, ([19]; Teorema 4.3, p. 33, [10], Teorema de Ocaña, p. 46).

2) $\Rightarrow$ 3): L'espace vectoriel topologique sous-jacent à D est localement borné (séparé), d'aprés le théorème d'Aoki-Rolewicz ([9], Theorem 6.3, p. 114) il existe p, $0 < p \leq 1$, tel que la topologie de D peut être définie par une p-norme $|x|_p$. Comme le produit de D est continu, il existe K tel que $|xy|_p \leq K\,|x|_p\,|y|_p$. Posons $|x|'_p = K\,|x|_p$, il est clair que $|x|'_p$ est une p-norme équivalente à $|x|_p$ et vérifie:

$$|xy|'_p \leq |x|'_p\,|y|'_p$$

Soit $V = \{x \in D : |x|'_p \leq 1\}$ et $V' = V \cup \{e\}$. C'est facile de voir que V' est un voisinage borné de zéro stable par la multiplication de D, (c.à.d. $V'V' \subseteq V'$).

Soit $W = \Gamma_p(V')$, par un calcul direct on vérifie que W est un voisinage borné, p-disqué de zéro stable par la multiplication de D. La p-jauge associée à W, $\|.\|_p$ est une p-norme équivalente à $|.|'_p$ et vérifie les conditions de l'énoncé. ∎

Une algèbre topologique munie d'une p-norme vérifiant $\|xy\|_p \leq \|x\|_p \|y\|_p$; sera appelée par la suite algèbre p-normée, il est clair que lorsque $p = 1$, on retrouve la notion d'algèbre normée. Citons ici que l'hypothèse "unitaire" est essentielle dans ce théorème, en effet tout espace de Fréchet non localement borné trivial c.à.d. de multiplication nulle satisfait 1) mais pas 2).

Rappelons que le résultat suivant a été obtenu dans le cas non-associatif normé par Kaïdi (1977, [10]), dans le cas Jordan-Banach par S. Devados Rao et P.S. Rema (1988, [3]), puis dans le cas Jordan J-topologique p-normé complet par N. El Yacoubi, résultat que nous pouvons facilement étendre au cas Jordan n.c. Nous l'étendons ici au cas d'une algèbre p-normée unitaire complète quelconque.

Théorème 3.4. *Soit D une algèbre p-normée complète unitaire d'unité e, alors tout élément x de D tel que $\|x-e\|_p < 1$ est l-inversible.*

Démonstration. Considérons l'algèbre associative $BL(D)$ des applications linéaires bornées sur D ([9], 6.9, p. 117-118), c'est une algèbre p-normée complète pour la p-norme $|.|_p$ définie par $|f|_p = \sup_{x\in S(D)} \|f(x)\|_p$, où $\|.\|_p$ est la p-norme de l'algèbre D. Alors il suffit de remarquer que $L_{x-e} = L_x - I_D$ où I_D est l'identité de D. ∎

Théorème 3.5. *Soit D une algèbre p-normée complète unitaire d'unité e, alors:*

1) L'ensemble $L - \mathrm{inv}_g(D)$, (resp. $L - \mathrm{inv}_d(D)$, resp. $L - \mathrm{inv}(D)$) de D, est ouvert.

2) L'application $\psi_g : (x,z) \mapsto L_x^{-1}(z)$, (resp. $\psi_d : (x,z) \mapsto R_x^{-1}(z)$, resp. ψ_g et ψ_d) de $L - \mathrm{inv}_g(D) \times D$, (resp. $L - \mathrm{inv}_d(D) \times D$, resp. $L - \mathrm{inv}(D) \times D$), dans D est séparément continue, (resp. ψ_d est séparément continue, resp. ψ_g et ψ_d sont séparément continues).

Démonstration. 1) On sait que l'ensemble $\mathrm{inv}(BL(D))$ des éléments inversibles de $BL(D)$ est ouvert ([26]). De plus D est métrisable complète, donc x est l-inversible à gauche si et seulement si L_x est inversible dans $BL(D)$. Comme l'application $G_L : x \mapsto L_x$ est continue et $L - \mathrm{inv}_g(D) = G_L^{-1}(\mathrm{inv}(BL(D)))$, alors $L - \mathrm{inv}_g(D)$ est ouvert.

2) L'algèbre D étant de Fréchet, pour tout $x \in L - \mathrm{inv}_g(D)$, l'application L_x^{-1} est continue. D'autre part, les applications: $x \in D \mapsto L_x \in BL(D)$, $f \in \mathrm{inv}(BL(D)) \mapsto f^{-1} \in \mathrm{inv}(BL(D))$ et l'application $f \in BL(D) \mapsto f(z) \in D$, sont continues, pour tout $z \in D$ fixé . D'où le résultat.

La preuve est analogue si l'on considère l'opérateur R_x et l'inversibilité linéaire à droite. ∎

Corollaire 3.6. *Avec les hypothèses du dernier théorème, la fermeture de tout idéal propre de D est un idéal propre de D, et par conséquent tout idéal maximal de D est fermé.*

4. Théorème de Gelfand-Mazur

Le résultat suivant est une extension au cas p-normé du théorème de Gelfand-Mazur pour les $\mathbb{C}$-algèbres normées complètes de division linéaire obtenu par Kaïdi dans ([10]). La preuve que nous donnons ici, est une adaptation de la démonstration faite dans ([13]) du fait, qu'une $\mathbb{C}$-algèbre de dimension finie sans diviseurs de zéro est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Théorème 4.1. *Toute algèbre p-normée complète de division linéaire à gauche est isomorphe à $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Soit $a \in D$, $a \neq 0$; étant donné que D est complète, on a pour tout $x \in D$, $L_a^{-1}L_x \in BL(D)$ et $BL(D)$ est p-normée complète, d'où $Sp(L_a^{-1}L_x) \neq \emptyset$ ([26]), soit $\lambda \in Sp(L_a^{-1}L_x)$, alors $L_a^{-1}L_x - \lambda I_D = L_a^{-1}(L_x - \lambda L_a) = L_a^{-1}(L_{x-\lambda a})$ est non inversible dans $BL(D)$, et donc dans $L(D)$, (théorème des isomorphismes de Banach [22]), ce qui entraîne que $L_{x-\lambda a}$ est non inversible dans $L(D)$, d'où $x - \lambda a = 0$ et D est une $\mathbb{C}$-algèbre de dimension 1, donc isomorphe à $\mathbb{C}$. ∎

Remarque 4.2. Dans le cas associatif l'existence d'un élément $x \in D$ tel que L_x soit inversible est équivalente au fait que l'algèbre est unitaire. La situation est totalement différente dans le cas non-associatif, le $\mathbb{R}$-espace $\mathbb{C}$ muni du produit $x*y = \overline{x}.\overline{y}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre de division linéaire commutative sans unité.

La question de l'existence ou non, des algèbres complexes de division linéaire p-normées (non complètes) de dimension infinie est, à notre connaissance, ouverte même pour $p = 1$ (cas normé).

Concernant les algèbres réelles de division linéaire p-normées la situation est plus compliquée, et le problème est posé même pour les algèbres de Jordan n.c. normées complètes de division linéaire.

Pour étendre au cas des algèbres p-normées, les résultats partiels obtenus par Kaïdi ([10], [11] et [14]) dans le cas normé, on a besoin de la théorie spectrale dans les algèbres de Jordan n.c. p-normées, associée à la notion de J-inversibilité, établie par Martínez dans le cas Jordan-Banach ([16], [17]); par

Kaïdi pour les algèbres de Jordan-Banach n.c. ([10], [11]); par Viola dans le cas des algèbres de Jordan topologiques à inverse continu ([24]) et par N. El Yacoubi pour les algèbres de Jordan p-normées complètes ([6], [7]). L'extension se fait sans problème en utilisant le fait bien connu suivant: $J - \mathrm{inv}(D) = J - \mathrm{inv}(D^+)$. On a ainsi:

Théorème 4.3. *Dans une K-algèbre ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de Jordan n.c. p-normée complète unitaire D: Tout élément a de D, est inclus dans une sous-algèbre associative commutative fermée et pleine de D, (une sous-algèbre B de D est dite pleine, si $e \in B$ et $J - \mathrm{inv}(B) = B \cap J - \mathrm{inv}(D)$), et le spectre de tout élément a de D, $Sp(a)$, est un compact non vide.*

On rappelle que $Sp(a,D) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - a \notin J - \mathrm{inv}(D)\}$ si D est complexe et $Sp(a,D) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - a \notin J - \mathrm{inv}(D_{\mathbb{C}})\} = Sp(a,D_{\mathbb{C}})$ si D est réelle, ($D_{\mathbb{C}}$ dénote la complexifiée de D, [1]).

Théorème 4.4. *Toute algèbre de Jordan n.c. complexe unitaire p-normée de J-division est isomorphe à $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Soit $\hat{D}$ la complétée de D, c'est une $\mathbb{C}$-algèbre de Jordan n.c. p-normée complète. Pour tout $x \in D$, on a $\emptyset \neq Sp(a,\hat{D}) \subseteq Sp(a,D)$. Par suite, si $\lambda \in Sp(a,D)$ on a $\lambda - a \notin J - \mathrm{inv}(D)$ ce qui implique $a = \lambda$. ∎

Corollaire 4.5. *Toute algèbre de Jordan n.c. complexe unitaire p-normée de division linéaire est isomorphe à $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Toute algèbre de Jordan n.c. de division linéaire est de J-division ([10], [21]). ∎

Définition 4.6. Une K-algèbre D est dite quadratique si elle est unitaire et pour tout $a \in D$, la sous-algèbre engendrée par l'unité de D et a, $K[a]$, est de dimension ≤ 2.

Théorème 4.7. *Soit D une $\mathbb{R}$-algèbre de Jordan n.c. unitaire de J-division p-normée alors D est quadratique flexible.*

Démonstration. Mutatis mutandis du cas normé ([10], [11]). Si $a \in D$, $a \neq 0$, $Sp(a) \neq \emptyset$ entraîne l'existence de $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda \in Sp(a)$, on a aussi $\overline{\lambda} \in Sp(a)$ d'où $(a-\lambda)(a-\overline{\lambda}) = a^2-(\lambda+\overline{\lambda})a+\lambda\overline{\lambda} \in D$ et n'est pas J-inversible dans $D_{\mathbb{C}}$ donc n'est pas J-inversible dans D, d'où $a^2 - (\lambda + \overline{\lambda})a + \lambda\overline{\lambda} = 0$. ∎

Corollaire 4.8. *Soit D une $\mathbb{R}$-algèbre de Jordan n.c. unitaire p-normée de division linéaire alors D est quadratique flexible.* ∎

Définition 4.9. Une K-algèbre D est dite faiblement alternative si elle est de Jordan n.c. et vérifie l'identité suivante:

$$x^2(xy - yx) = x(x(xy - yx)).$$

Il est clair que toute algèbre alternative ou de Jordan est faiblement alternative.

Théorème 4.10. *Soit D une $\mathbb{R}$-algèbre unitaire faiblement alternative de division linéaire p-normée, alors D est isomorphe à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ (l'algèbre des quaternions de Hamilton) ou $\mathbb{O}$ (l'algèbre des octonions de Cayley).*

Démonstration. En utilisant une démarche analogue à ([15]) et ([10]), on montre qu'une $\mathbb{R}$-algèbre faiblement alternative quadratique sans diviseurs de zéro est isomorphe à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$ et donc alternative de dimension finie. ∎

Corollaire 4.11. *Soit D une $\mathbb{R}$-algèbre p-normée unitaire de division linéaire alors:*

1) *Si D est de Jordan, D est isomorphe à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*
2) *Si D est alternative, D est isomorphe à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$.*

Références

[1] Bonsall, F.F., Duncan, J., "Complete Normed Algebras", Springer-Verlag, 1973.

[2] Cuenca Mira, J.A., On one-sided division infinite-dimensional normed real algebras, *Publications matemátiques,* **36** (1992), 485 – 488.

[3] Devados Rao, S., Rema, P.S., Gleason-Kahane-Zelazko theorem for Banach Jordan algebras and triple systems, *Math. Japonica,* **34** (1979), 297 – 306.

[4] Ebbinghaus, H.D., Hermes, H., Hirzebruch, F., Koecher, M., Mainzer, K., Neukirch, J., Prestel, A., Remmert, R., "Numbers", Springer-Verlag. New York. Inc., 1991.

[5] El Yacoubi, N., Kemmoun, H., J-Diviseurs topologiques de zéro dans les algèbres de Jordan p-normées unitaires, *Periodica Mathematica Hungarica,* **35** (3) (1997), 159 – 167.

[6] El Yacoubi, N., Spectral Study of some topological Jordan algebras, in "Proceedings of the 3rd Int. Conference on non Associative Algebras", Kluwer Academic Publishers, 1993 122 – 127.

[7] El Yacoubi, N., Théorèmes de Structure d'Algèbres de Jordan Topologiques ou Bornologiques, *Algebras, Groups and Geometries,* **16** (2) (1999), 245 – 267.

[8] Jacobson, N., "Structure and Representation of Jordan Algebras", Amer. Math. Soc., Providence, 1968.

[9] Jarchow, H., "Locally Convex Spaces", B.G. Teubner, Stuttgart, 1981.

[10] Kaïdi, E.A., "Bases para una Teoría de las Álgebras no Asociativas", Tesis doctoral, Univ. de Granada, Granada (Spain), 1977.

[11] Kaïdi, E.A., Structure des algèbres de Jordan-Banach non commutatives réelles de division, *Ann. Sci. Univ. "Blaise Pascal" Clermont II. Ser. Math.,* **27** (1991), 119 – 124.

[12] Kaplansky, I., Normed algebras, *Duke Math. J.,* (1949), 399 – 418.

[13] Kaïdi, E.A., Ramírez, M.I., Rodríguez-Palacios, A., Absolute-valued algebraic algebras are finite-dimensional, *Journal of Algebra,* **195** (1997), 295 – 307.

[14] Kaïdi, E.A., Sánchez, A., J-diviseurs topologiques de zéro dans une algèbre de Jordan n.c. normée, in "Non-Associative Algebra and Its Applications" (S. González, ed.), Kluver Academic Publishers, 1994, 193 – 197.

[15] Kurosh, A.G., "General Algebra", Chelsea Publishing Company, 1963.

[16] Martínez Moreno, J., "Sobre Álgebras de Jordan Normadas Completas", Tesis Doctorales de la Universidad de Granada, n. 149, Granada (Spain), 1977.

[17] Martínez Moreno, J., Holomorphic Functional Calculus in Jordan-Banach Algebras, *Ann. Sci. Univ. "Blaise Pascal" Clermont II,* Sér. Math. Fasc. **27** (1991), 125 – 134.

[18] McCrimmon, K., Non commutative Jordan rings, *Tran. Amer. Math. Soc.* (1), **158** (1) (1971), 1 – 33.

[19] Ocaña Ocaña, F.G., "El Axioma de Sakai en JV-algebras", Tesis Doctorales de la Universidad de Granada, n. 244, Granada (Spain), 1979.

[20] Osborn, J.M., Quadratic division algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.,* **105** (1962), 202 – 221.

[21] Petersson, H.P., On lineair and quadratic jordan division algebras, *Math. Z.,* **177** (1981), 541 – 548.

[22] Rolewicz, S., "Metric Linear Spaces", D. Reidel Publishing Company, 1985.

[23] Rodríguez Palacios, A., One sided-division absolute valued algebras, *Publications Mathemàtiques,* **36** (1992), 925 – 954.

[24] Viola Devapakkiam, C., Jordan algebras with continuous inverse, *Math. Japon,* **16** (1971), 115 – 125.

[25] Wright, F.B., Absolute valued algebras, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA,* **39** (1953), 330 – 332.

[26] Zelazko, W., "Selected Topics in Topological Algebras", Lecture Notes. Serie 31, Mathematisk institut, Aarhus Universitet, Aarhus, 1971.

[27] Zelazko, W., "Metric Generalizations of Banach Algebras", Rozprawy Mat. 47, 1965.