COMENTARIOS

CIENCIA Y FILOSOFIA CONSTRUCTIVAS

Notas sobre la obra de Paul Lorenzen y O. Schwemmer:
Konstruktive Logik, Ethik und Wissenschaftstheorie. *

José Sanmartín Esplugues
y
Esteban Requena
Universidad de Valencia

No es Paul Lorenzen el autor de un *sistema* al modo que nos tiene acostumbrados la tradición filosófica alemana. Más bien es un genial revolucionario de las concepciones sustentadas clásicamente en la lógica y la investigación de fundamentos, que ha sabido rodearse de un pujante equipo de jóvenes investigadores (Kuno Lorenz, Christian Thiel, P. Janich, J. Mittelstrass, ...) al que ha correspondido la tarea de desarrollar en distintas áreas (la lógica, la sociología, la protofísica, ...) las ideas originales del maestro. El conjunto integrado por todos ellos –y en cuya génesis intervino decisivamente también W. Kamlah– constituye lo que se ha dado en llamar "Escuela de Erlangen", caracterizada por sus planteamientos *constructivistas.*

El programa del constructivismo puede resumirse así: *Desarrollo de una doctrina de los materiales y de las reglas de cada discurso racional.*

Los materiales son los medios lingüísticos de cada discurso racional. Esos materiales ni deben ser tomados de las ciencias fácticamente existentes, ni deben fijarse tomando como apoyo el lenguaje natural con su inteligibilidad general. Esos materiales deben ser resultado de procesos de construcción según *reglas o normas justificadas*. Según esto, el constructivismo queda enfrentado a to-

* Mannheim: Bibliographisches Institut, 1975.[2]

da posición axiomaticista que siente, sin *fundamentación*, los primeros medios lingüísticos y metódicos. La justificación de reglas, aquí preconizada, es de tipo pragmático. El problema de la justificación queda así, por lo demás, incluido expresamente en la discusión científica.

Podemos resumir nuevamente ahora, según todo lo dicho, el constructivismo como una "teoría general de la construcción de los medios lingüísticos de un discurso racional según reglas pragmáticamente justificadas".

Son exigencias generales metodológicas de ese proceder constructivo el ir paso a paso, el no dejar ninguna laguna en el discurso y, finalmente, la no circularidad.

Un conocimiento más exacto del método constructivo puede obtenerse vía ejemplos mediante la consideración de su aplicación a algunas ciencias:

1. LOGICA CONSTRUCTIVA

La lógica clásica vale en su totalidad sólo para dominios de enunciados definidos en referencia a la verdad. Pero es evidente que no todos los enunciados del lenguaje natural pueden ser definidos de esta manera. Baste considerar un ejemplo como el de "Hay números impares que son perfectos" (entendiendo por "perfecto" aquel número igual a la suma de sus divisores propios). Hasta ahora no se conoce un número tal, ni se ve a qué procedimiento general podría apelarse para decidir la verdad de ese enunciado. Sin embargo es trivial cómo se podría *probar* este enunciado. Bastaría encontrar un número impar tal que la suma de sus divisores propios fuera él mismo. Se tiene así un procedimiento que permite la decisión, no de la 'verdad' de un enunciado, sino del 'estatus' de prueba de un cierto procedimiento. Todo enunciado, acompañado de un proceso de decisión tal, se denominará "definido en referencia a una prueba" (abreviado en lo sucesivo por p-definido).

En la Lógica Constructiva la "verdad" de los enunciados moleculares se definirá bajo la hipótesis de que se construyen a partir de enunciados p-definidos. Pero no todos los enunciados compuestos de enunciados p-definidos son de nuevo enunciados p-definidos. Así, si $\bigwedge x\ A(x)$ fuese un enunciado p-definido, siendo el universo de discurso de x infinito, ello significaría dar una prueba de $A(n)$ para todo n de dicho universo de discurso. Constructivamente se dice, sin embargo, que quien afirma $\bigwedge x\ A(x)$ no se está obligando con ello más que a suministrar una prueba de $A(n)$ para cualquier n que se le proponga. En virtud de ello, enunciados como el que consideramos se definen en un sentido más amplio que la p-definición, a saber *en referencia a un diálogo*:

> Imaginemos dos personas, de las cuales una afirma $\bigwedge x\, A(x)$. La otra puede escoger libremente un individuo del universo de discurso de x, digamos n. Si la primera puede suministrar una prueba de $A(n)$, ha ganado; si no, ha perdido.

Un enunciado que *se gana* o *se pierde* en un diálogo se dice que es un "enunciado definido *en referencia a un diálogo* (abreviado en lo sucesivo por d-definido). De manera general, un enunciado será d-definido si, para sostenerlo en un diálogo, las reglas de los dos interlocutores (el proponente, P; el oponente, O) están determinadas de tal manera que se puede decidir en cada instante:

1) si el diálogo ha terminado; y
2) quién ha ganado.

Una propuesta para esas reglas, que denominaremos "reglas generales de diálogo", es la que sigue, llamando "argumento" a cada aserción de P o de O:

1. Los diálogos acerca de enunciados se componen de argumentos que presentan alternativamente P y O.
2. Todo argumento, a excepción del inicial –propuesto por P–, ataca un argumento anterior del adversario o defiende un argumento anterior propio frente a un ataque del adversario.
3. Los ataques son derechos que pueden ejercerse en todo instante del diálogo.
4. Las defensas son deberes que hay que hacer, aunque no necesariamente enseguida, ante un ataque.
5. Quien en el transcurso del diálogo no pueda presentar ningún otro argumento o renuncie a argumentar, ha perdido el diálogo y el adversario lo ha ganado.

Como propuesta que es, la efectuada para reglas generales de diálogo no conlleva ninguna imposición. Su aceptación sólo se recomienda en base a la utilidad que presentan esas reglas para investigar la nueva área de saber formal que nos ocupa.

A través de las reglas generales de diálogo podemos reconstruir, primeramente, el sentido de los conectores y cuantores de la lógica clásica:

Negación

"no A"
"$\neg A$"

$$\begin{array}{r|l} & \neg A \\ ?, A & - \end{array} \qquad \text{(I)}$$

A la propuesta inicial, $\neg A$, el adversario opone ?, lo que significa que *duda* el enunciado $\neg A$, oponiéndole A. La raya – indica, o bien que no hay defensa prevista de $\neg A$ frente al ataque, o bien que se pospone esa defensa atacando a su vez la aserción de A por el adversario.

Conjunción

"A y B"
"$A \wedge B$"

$$\begin{array}{r|l} & A \wedge B \\ \mathrm{I}? & A \\ \mathrm{D}? & B \end{array} \qquad \text{(II)}$$

Un ataque a una conjunción, $A \wedge B$, se realiza en dos fases: dudando su componente izquierdo (abreviado: I?) y dudando su componente derecho (abreviado: D?), o a la inversa. No defender uno u otro componente de la conjunción conlleva la pérdida del diálogo.

Adjunción

"A o B"
"$A \vee B$"

$$\begin{array}{r|l} & A \vee B \\ ? & A \mid B \end{array} \qquad \text{(III)}$$

Ante un ataque a una adjunción, $A \vee B$, se ha de defender A o B, uno u otro componente de la adjunción a elección de quien sostenga $A \vee B$ en el diálogo.

Subjunción

"Si A, entonces B"
"$A \rightarrow B$"

$$\begin{array}{r|l} & A \rightarrow B \\ ?, A & B \end{array} \qquad (\mathrm{IV}_1)$$

El ataque a $A \rightarrow B$ procede de la misma manera que el ataque a $\neg A$: se duda $A \rightarrow B$, aseverando A. Frente a este ataque quien defienda $A \rightarrow B$ puede aceptar A, sin exigir su "fundamentación", esto es, sin exigir que el adversario indique un procedimiento de prueba para A; aceptado A, entonces asevera B. Pero al defensor de $A \rightarrow B$ le cabe otro modo de proceder que se recoge en el cuadro siguiente:

$$\begin{array}{r|l} & A \rightarrow B \\ ?,\, A & ? \\ [A] & B \end{array} \qquad (\mathrm{IV}_2)$$

esto es, el defensor de $A \rightarrow B$ podrá tomar de la fundamentación de A que haga su adversario (con $[A]$ en el cuadro, significamos que A ha sido fundamentado) los pasos de fundamentación que él precise para B.

Generalización

"Para todo x, x cumple A"
"$\bigwedge x\, A(x)$"

$$\begin{array}{r|l} & \bigwedge x\, A(x) \\ ? & A(n) \end{array} \qquad (\mathrm{V})$$

Para cualquier individuo n del universo de discurso de x que se oponga, el defensor de $\bigwedge x\, A(x)$ ha de defender $A(n)$.

Particularización

"Hay un x tal que x cumple A"
"$\bigvee x\, A(x)$"

$$\begin{array}{r|l} & \bigvee x\, A(x) \\ ? & A(n) \end{array} \qquad (\mathrm{VI})$$

Ante el ataque del adversario, el proponente de $\bigvee x\, A(x)$ puede elegir un individuo n del universo de discurso de x para probar $A(n)$.

Consideremos algunos ejemplos de diálogos. Representaremos el diálogo mediante una tabla dividida en dos partes por el trazo $\|$. La parte izquierda de la tabla se reserva para los argumentos de O y la derecha para los de P. Cada argumento ocupará una línea numerada por un entero entre paréntesis. Tras cada ataque

$?$ o $?,\, \gamma$

donde γ es una aserción con la que se ataca un argumento anterior del adversario, o tras I? o O?, se escribirá el número de la línea en que el adversario asevera el argumento atacado, a menos que ese argumento sea inmediatamente anterior. En este segundo caso, si el argumento con que se ataca ya ha sido introducido por el adversario en el transcurso del diálogo, se escribirá tras él el número de la línea en que el adversario hizo esa introducción.

Ejemplo 1

	O	P
(1)		$a \vee \neg a$
(2)	?	a
(3)	?	

Ante el ataque ? de O en (2), P puede elegir entre defender a o defender $\neg a$. Elige a. Entonces O ataca a en (3) con ? Si P no puede defender a habrá perdido el diálogo. La defensa de a por P no será otra cosa que su fundamentación, esto es, la indicación de un proceso de prueba para a.

Ejemplo 2

	O	P
(1)		$a \vee \neg a$
(2)	?	$\neg a$
(3)	?, a	?

Ahora O opone a en (3) a $\neg a$ de P. P ataca a en (3). Si O no puede defender a, fundamentándolo, P ha ganado; si O puede defender a, P ha perdido el diálogo.

El enunciado $a \vee \neg a$ es lógicamente verdadero en la lógica clásica –se trata del principio de tercio excluso, que preside la construcción misma de esa lógica (todo enunciado es verdadero o falso). En la lógica constructiva, $a \vee \neg a$ es un enunciado que sólo puede ser ganado por su defensor P si éste puede defender a u O no puede defender a. En su defensa se ha de recurrir, pues, a la indicación de un proceso de prueba para a. O lo que es lo mismo, $a \vee \neg a$ no es un enunciado que pueda ser *ganado sólo por su forma.*

Frente al anterior, en el diálogo que sigue P ganará repitiendo simplemente la aserción de a de O en (2). P no necesita, pues, recurrir a indicar un proceso de prueba para a. En todo caso, esta fundamentación correspondería a O, no teniendo que hacer otra cosa P que repetir siempre a:

Ejemplo 3

	O	P
(1)		$a \rightarrow \neg \neg a$
(2)	?, a	$\neg \neg a$
(3)	?, $\neg a$	?, a (2)

Ejemplo 4

	O	P
(1)		$\neg\neg a \to a$
(2)	$?, \neg\neg a$	a
(3)	$?$	

En este caso, P sólo ganará el diálogo si puede fundamentar a ante el ataque de O en (3).

Por los ejemplos anteriores se ve que hay diálogos en los que P u O se encuentran obligados a fundamentar enunciados atómicos, mientras que hay otros que pueden ganarse recurriendo simplemente a argumentos ya introducidos previamente en el curso de los mismos, o sea, basándose en la pura forma de los enunciados.

DE LOS ENUNCIADOS QUE SE PUEDEN GANAR EN BASE A SU SOLA FORMA SE OCUPA LA LOGICA.

Denominemos a esos enunciados "enunciados lógicos". Según ello, $a \vee \neg a$ o $\neg\neg a \to a$ no son enunciados lógicos, mientras que $a \to \neg\neg a$ sí es un enunciado lógico.

De la observación de tablas dialógicas para enunciados que resultan ser lógicos cabe obtener reglas de diálogo que recojan las *constancias* aparecidas en aquéllas y que permitan abreviar el proceso normal de defensa hasta ahora descrito.

Ejemplo 5

	O	P
(1)		$(a \to \neg b) \to (b \to \neg a)$
(2)	$?, a \to \neg b$	$b \to \neg a$
(3)	$?, b$	$\neg a$
(4)	$?, a$	$?, a\,(2)$
(5)	$\neg b$	$?, b\,(3)$

En este ejemplo, como en el Ejemplo 3, P gana el diálogo valiéndose de los argumentos previamente introducidos por O. Y así debe ocurrir siempre que se trate de enunciados lógicos, ya que en caso contrario sería preciso fundamentar algún enunciado atómico aseverado por P, yendo más allá, pues, de la pura forma. De acuerdo con estas observaciones, podemos justificar la regla que sigue para enunciados lógicos dialógicamente defendibles;

(R.1.L) EL PROPONENTE, EN UN ATAQUE O DEFENSA PERMITIDOS, SOLO AFIRMARA UN ENUNCIADO ATOMICO CUANDO ESTE HAYA SIDO ASEVERADO POR EL OPONENTE.

En cada regla de diálogo para un enunciado compuesto por un juntor, la argumentación en torno a este enunciado se retrotrae a argumentaciones en torno a los enunciados componentes. En el caso de la negación, adjunción o subjunción un nuevo ataque del oponente al enunciado compuesto no obliga al proponente a dar una respuesta distinta. En el caso de la negación, el contraataque del proponente será elegido por él de entre los posibles contraataques. En el caso de la adjunción, el proponente se defiende ante el ataque del oponente con el argumento que él mismo elija. En el caso de la subjunción, ante el ataque del oponente, el proponente puede defenderse o contraatacar, pero en cualquiera de estas decisiones el oponente no tiene ninguna influencia.

El caso de la conjunción presenta algunos rasgos que interesa estudiar. Consideremos a continuación algunos ejemplos a este respecto. Adelantamos ya que, de la consideración de estos ejemplos, se seguirá que si la conjunción en cuestión es un enunciado lógico, entonces ganar uno solo de los extremos es suficiente para ganar todo el diálogo, pues, en efecto, si el enunciado es lógico, P deberá conocer una estrategia para ganar cada componente del enunciado compuesto y, por lo tanto, podrá ganar éste frente a cualquier ataque de O.

Ejemplo 6

	O	P
(1)		$a \rightarrow a \wedge (a \vee b)$
(2)	?, a	$a \wedge (a \vee b)$
(3)	I?	$a\,(2)$
(4)	D?	$a \vee b$
(5)	?	$a\,(2)$

Ejemplo 7

	O	P
(1)		$\neg(a \wedge \neg b) \rightarrow (a \rightarrow b)$
(2)	$?, \neg(a \wedge \neg b)$	$a \rightarrow b$
(3)	$?, a$	$?, a \wedge \neg b$ (2)
(4)	I?	a (3)
(5)	D?	$\neg b$
(6)	$?, b$	b

Cabría así sentar una regla de diálogo para enunciados lógicos en que se recogiera la constancia observada:

(R.2.L) UN ENUNCIADO COMPUESTO CON EL JUNTOR $\wedge$ SE GANA SI SE GANA UNO DE SUS EXTREMOS.

A partir de aquí, y teniendo en cuenta lo arriba dicho sobre los casos de la negación, adjunción y subjunción en cuanto a no obligar con un nuevo contraataque del oponente a que el proponente dé una respuesta diferente a la ya dada por él al primer ataque, estamos autorizados a decir que, en todos esos casos y en el de la conjunción, el oponente atacará el enunciado compuesto propuesto por P sólo una vez. Estas consideraciones justifican la regla que sigue:

(R.3.L.) EL OPONENTE SOLO PUEDE ATACAR EL ULTIMO ARGUMENTO DEL PROPONENTE, O SI ESTE ES UN ATAQUE, DEFENDERSE DE EL.

Esta regla general se cumple, por lo arriba dicho, también en el caso de una conjunción que sea un enunciado lógico, ya que basta con un ataque (I? o D?) al enunciado compuesto (si se tuviera que hacer ambos ataque, siempre uno de ellos no se haría contra el último argumento, sino contra el penúltimo). De cualquier manera y para reflejar la defensa de P ante cualquier posible ataque de O al enunciado compuesto con $\wedge$, partiremos la tabla general en tantas subtablas como ataques (y consiguientes defensas haya); así.

Ejemplo 8

	O		P	
(1)			$a \rightarrow a \wedge (a \vee b)$	
(2)	$?, a$		$a \wedge (a \vee b)$	
(3)	I?	D?	a (2)	$a \vee b$
(4)		?		a (2)

Finalmente, y por cuanto que el proponente sólo puede afirmar, al defenderse o contraatacar, enunciados atómicos previamente aseverados por O, se justifica el derecho que se le adjudica en la regla siguiente para diálogos para enunciados lógicos:

(R.4.L.) EL PROPONENTE PUEDE ATACAR EN TODO INSTANTE UN ARGUMENTO PREVIO DEL OPONENTE,

a través de ese ataque intentará obtener los enunciados atómicos que precise para su defensa.

2. SABER MATEMATICO

Si las ciencias materiales son aquellas de las que nos podemos servir a la hora de decidir sobre fines admisibles o cuando debemos elegir medios adecuados para alcanzar un fin determinado, entonces es claro que la aritmética no puede considerarse como una ciencia material. Efectivamente, en la aritmética no aparecen qué fines están permitidos o prohibidos, ni qué efectos pueden producirse con determinadas acciones porque el saber matemático no puede considerarse como un saber causal. No obstante, tampoco puede considerarse el saber aritmético como algo puramente formal, en el sentido en que son formales los diálogos de la lógica. Es decir, los diálogos aritméticos no pueden tratarse, en principio, como un simple juego con símbolos puesto que están dotados con un contenido pragmáticamente justificado. Por tanto, dado que no es un saber material, ni un saber puramente formal, denominaremos a este campo de actividad racional "saber matemático", puesto que matemática es el nombre que reciben conjuntamente la aritmética y la aritmética superior (el análisis).

La introducción de la aritmética se ha hecho, en ocasiones, al buscar una rigorización metódica, siguiendo un procedimiento axiomático. Se fijaban unos conceptos primitivos y a renglón seguido se introducían los axiomas como proposiciones sobre los conceptos primitivos, verdaderos sin necesidad de fundamentación. La pregunta ¿por qué son verdaderos los axiomas? no está permitida, aunque en ocasiones se recurra vagamente a ciertas verificaciones o ratificaciones empíricas.

La introducción metódica que busca el constructivismo es radicalmente distinta. En lugar de suponer la existencia de clases o predicadores, se proponen reglas de construcción para obtener estas clases, y para la utilización de los predicadores. Partiremos del hecho de la distinción, en situaciones concretas, entre unidades y pluralidades, distinción paralela, en una situación lingüística, a la existente entre el singular y el plural. Si dibujamos, por ejemplo, cruces,"+", en unas ocasiones dibujaremos "+", en otras "++++". Es fácil aprender la distinción entre "+ cruz" y "++ cruces" ("una cruz" y "muchas cruces", respectivamente). Ahora bien, no es esta distinción la única que podríamos aprender. Podríamos también aprender a distinguir entre diversas pluralidades, aplicando distintos signos a pluralidades diversas. Por ejemplo, los signos "||", "|||", ... Llamaremos al signo "++" signo de pluralidad, y a los diversos "||", "|||", ... cifras. Ambos serán considerados predicadores de las multiplicidades que tratamos. La construcción de las diversas cifras la podemos regular de la siguiente manera:

(1) $\Rightarrow |$
(2) $n \Rightarrow n|$

que en palabras respondería a

(1) Constrúyase |
(2) Construido *n*, constrúyase *n* |

Asignar distintas cifras a pluralidades diversas (contar) no es un simple juego, sino una actividad que sirve para comparar diversas pluralidades. Efectivamente, en lugar de recurrir a una comparación directa de pluralidades, las contamos y comparamos las cifras respectivas. Para llevar a efecto una comparación adecuada necesitamos tener un criterio para cifras. Es claro que podemos fijar, para pares concretos de cifras cuál de las dos es mayor: por ejemplo, eliminando alternativamente un "|" de cada una de las cifras. Pero preferimos fijar reglas para cualesquiera pares *m, n* de cifras; estas reglas podrían ser:

(1) $\Rightarrow |, n|$
(2) $m, n \Rightarrow m|, n|$

Si un par es constructible según las citadas reglas, entonces diremos que $m < n$. Es decir, podríamos introducir definicionalmente (utilizando $\vdash_<$ como "es constructible según las reglas para $<$")

$$m < n \leftrightharpoons \vdash_< m, n.$$

Responder ahora a la verdad (falsedad) de algún enunciado del tipo $m < n$ significa recurrir a la constructibilidad (no constructibilidad) del par en cuestión según las reglas introducidas. Si a continuación nos preguntamos por las reglas, no podemos preguntarnos si una regla es verdadera o no; sólo podremos cuestionar por qué aceptamos o no un sistema de reglas. A esta pregunta sólo cabe darle una justificación: y justificamos la introducción de las reglas porque son útiles como instrumentos para manipular un campo simbólico útil a su vez para el desarrollo de la vida ordinaria.

Frente al proceder axiomaticista no tenemos, pues, ninguna proposición sin fundamentar. Toda proposición admisible en el seno de la teoría habrá de serlo en base a su constructibilidad (y, a fortiori, de su defendibilidad) tomando como base unas reglas. Y como podrá comprobarse, todos los axiomas de Peano, por ejemplo, serán defendibles como tesis en un diálogo. Por ejemplo, el axioma

$$m\,| < n\,| \rightarrow m < n$$

tendría como estrategia de defensa el hecho de que el oponente, al afirmar $m\,| < n\,|$ según la estrategia de la implicación ha de defender esta afirmación, para lo que ha de construir previamente $m < n$. Por otra parte, defender el axioma de inducción formulado como

$$A(|) \wedge \bigwedge m.A(m) \rightarrow A(m\,|): \rightarrow : \bigwedge n.A(n)$$

es decir, en lenguaje de primer orden, sería defendible en todo caso, puesto que, al asumir el antecedente O, y al afirmar posteriormente P $\bigwedge n.A(n)$ sólo se compromete este último a la defensa de A para cualquier n que se le oponga; y el desarrollo dialógico podría ser el siguiente

O	P
(1)	$A(\mid) \wedge \bigwedge m.A(m) \to A(m\mid) :\to: \bigwedge n.A(n)$
(2) $A(\mid) \wedge \bigwedge m.A(m) \to A(m\mid)$	$\bigwedge n.A(n)$
(3) $?, t\mid$	$?, \mathrm{I}$ (2)
(4) $A(\mid)$	$?, \mathrm{D}$ (2)
(5) $\bigwedge m.\ A(m) \to A(m\mid)$	$?, \mid$
(6) $A(\mid) \to A(\mid\mid)$	$?, A(\mid)$
(7) $A(\mid\mid)$	$?, \mid\mid$ (5)
(8) .	.
.	.
(k) $A(t) \to A(t\mid)$	$?, A(t)$
(k + 1) $A(t\mid)$	$A(t\mid)$ (3)

Es decir, siempre tendrá en su mano P la defensa de A para cualquier t, dado que podrá hacer aseverar a O $A(t)$ debido a que tiene que asumir el antecedente de la implicación.

Igualmente podríamos establecer reglas para $=$. Estas reglas podrían ser

$$(1) \quad \Rightarrow \mid = \mid$$
$$(2) \quad m = n \Rightarrow m\mid = n\mid$$

reglas con las que pueden fundamentarse los axiomas de Peano para la igualdad, de forma que todos los axiomas de Peano para la aritmética resultan ser proposiciones defendibles y, por lo mismo, verdaderas. Queda así contestada, desde el constructivismo, la cuestión sobre la verdad de los axiomas (en este caso, de la aritmética).

Para introducir las distintas operaciones utilizaremos reglas de construcción de triplos. Para la adición, por ejemplo, podríamos proponer:

$$\Rightarrow \quad m, \mid, m\mid$$
$$m, n, p \Rightarrow \quad m, n\mid, p\mid$$

y dada la unicidad del tercer elemento del triplo podemos escribir

$$m + n = p \leftrightharpoons \vdash_{+} m, n, p$$

y de modo similar podríamos hacer con el resto de las operaciones, en algún caso, con restricciones si el dominio son únicamente las cifras.

De la naturaleza de las reglas se desprende que, dado un enunciado atómico es suficiente y necesario para su defensa el presentar una construcción de tal enunciado. Este carácter de "construcción" justifica nuestra aserción de que la aritmética es "sintética". Y siguiendo con la terminología kantiana, puesto que no es necesario recurrir a criterios empíricos para su fundamentación, la consideramos a priori. Y para poder considerarla como formal bástenos considerar que una vez que hemos dado justificaciones pragmáticas de las reglas introducidas, podemos dar de lado dichas justificaciones, considerando todo el desarrollo de la aritmética como un juego formal que ha de comenzar con proposiciones constructibles. Diremos, pues, que el saber matemático es una ciencia formal sintética a priori.

Para la introducción de la aritmética superior (el análisis) no son suficientes los procesos anteriormente descritos. Necesitamos disponer de funciones y conjuntos. A estos nuevos objetos los llamaremos abstractos porque llegamos a ellos por un doble proceso de construcción y de abstracción. El proceso de abstracción discurre por los siguientes términos: (a) Sea I un dominio de objetos. Definamos una relación de equivalencia sobre los objetos de I. (b) Sea T un enunciado tal que para cualesquiera elementos m, n de I que sean equivalentes, $T(m) \leftrightarrow T(n)$. Denominaremos a T y a todos los enunciados que cumplan esta propiedad "enunciados invariantes" respecto a la relación de equivalencia dada. La abstracción consiste en limitarnos a enunciados invariantes a la hora de hablar sobre el dominio I. La abstracción nos permitirá hablar de nuevos objetos (los abstractos) cuando en realidad sólo manipulamos los antiguos objetos concretos: sólo cambiamos el "modo de hablar" sobre ellos.

Por lo que afecta a los conjuntos, encontramos en el constructivismo, por el momento, sólo las bases para un posible desarrollo, desarrollo que intentan llevar a efecto los autores de este comentario. Las bases son, y no es poco, el concepto de conjunto, de la relación de pertenencia y de diversas operaciones.

El conjunto será un objeto abstracto obtenido a partir de formas enunciativas. Sean $A(x)$ y $B(x)$ fórmulas con una variable. Entonces el objeto abstracto que surge al limitarnos a metaenunciados invariantes respecto a la relación de equivalencia

$$\bigwedge x.\ A(x) \leftrightarrow B(x)$$

será denominado conjunto. Escribiremos $\hat{x}.\ A(x)$ cuando nos limitemos a metaenunciados invariantes sobre $A(x)$, es decir, cuando consideremos a $A(x)$ como conjunto. Y el metaenunciado $A(z)$ "La sustitución de x por z en $A(x)$ es un enunciado verdadero" definirá la relación de equivalencia. En lugar de $A(z)$ escribiremos $z \in \hat{x}.\ A(x)$.

A su vez, las funciones se obtienen, no a partir de enunciados, sino a partir de términos, igualmente por un proceso de abstracción, aunque también puedan obtenerse, como clásicamente, a partir de conjuntos especiales.

Esperamos ofrecer en breve un desarrollo más detallado de estos dos últimos extremos.

Además de a las parcelas teórico-científicas arriba estudiadas, el programa constructivista es extendido, en la obra que comentamos, al saber técnico, histórico y práctico. Las exigencias metodológicas, al principio reseñadas (el proceder paso a paso, el no dejar ninguna laguna en el discurso y la no circularidad), se ponen también a la base, por lo tanto, de cuestiones prácticas y, en particular, de cuestiones políticas y éticas (analizadas en este caso por el co-autor Schwemmer). Para la ética, ocupada con la respuesta a la cuestión sobre qué tipo de enunciados se reconocen como fundamentos para el establecimiento de fines y las acciones, tales exigencias se amplían con las referentes al mantenimiento de un principio de intersubjetividad, que elimine la inserción de cualquier interés subjetivo, y de un principio de crítica de las normas culturales –génesis normativa.