Investigaciones Europeas de Dirección y Economía de la Empresa
Vol. 3, Nº 3, 1997, pp. 73-92

ANÁLISIS MATEMÁTICO-FINANCIERO DE LAS CUENTAS REMUNERADAS POR TRAMOS: UNA PROPUESTA DE GENERALIZACIÓN DEL CONCEPTO DE LEY FINANCIERA

Cruz Rambaud, S.
Universidad de Almería

RESUMEN

En este artículo se describen las cuentas corrientes altamente remuneradas o supercuentas y se efectúa un análisis matemático-financiero de las mismas en orden a estudiar la homogeneidad, continuidad y derivabilidad de las distintas funciones parciales que surgen en esta operación financiera. De esta forma, se procede a la discusión de cada una de las situaciones que se presentan, estableciéndose su adecuación o no a las preferencias de un sujeto económico racional, para dar lugar, finalmente, a ciertas condiciones, generalizadas, del concepto de sistema financiero, en general, y de ley financiera, en particular.

PALABRAS CLAVE: Ley financiera. Sistema financiero. Cuenta corriente. Homogeneidad. Derivabilidad.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad, el concepto de ley financiera (Gil Peláez 1992, p. 39; Rodríguez 1984, p. 44) se basa en un conjunto de axiomas, uno de los cuales es la homogeneidad de grado uno con respecto a la cuantía. No obstante, la práctica financiera ha ido introduciendo operaciones, como las cuentas corrientes altamente remuneradas o "supercuentas", en las que se pone en duda tal homogeneidad (Ferruz y otros 1994, p. 16). En efecto, la proyección o sustituto, en un instante p, de una cuantía "suficientemente elevada" no coincide con el producto de dicha cuantía por la proyección de la unidad monetaria. Dicho ésto, podría pensarse que una "supercuenta" supone la aplicación de un conjunto de varias leyes financieras independientes, según sea la cuantía en cada caso. Sin embargo, esta interpretación supondría una ley financiera "restringida" a un intervalo o tramo de cuantías, lo que impediría la construcción de procesos financieros (Gil Peláez 1992, pp. 189-193) con base esa ley financiera, ya que, dependiendo de la cuantía inicial, dicho proceso podría incluir más o menos factores.

Por otra parte, en las operaciones financieras anteriormente descritas, existe, por lo general, un tramo sin remunerar o "franquicia", lo que abre la posibilidad de que las leyes financieras estén definidas, no en todo R, sino sobre un subconjunto propio del conjunto de los números reales positivos. Así, por ejemplo, *Argentaria* ofrecía una supercuenta, llamada *Cuenta 5º Aniversario*, que discriminaba los tipos de interés (anuales y nominales, pagaderos por meses) de acuerdo con los tramos de cuantías a los que se aplica, de la siguiente forma:

Tramos de cuantías	Tipos de interés
Hasta 1 millón	6'50%
De 1 a 3 millones	7'25%
Más de 3 millones	8'00%

El primero de los hechos descritos origina que no podamos hallar el equivalente de un capital financiero mediante sucesivas multiplicaciones de C por $F(1,t,p)$, sino que tengamos que componer sucesivamente C en $F(C,t,p)$.

Matemáticamente, este procedimiento presenta algunas dificultades, entre otras razones, por el hecho de que $F(C,t,p)$ es una función de R^3 en R y, para que pueda efectuarse la composición, es necesario que la imagen de la primera función esté contenida en el dominio de la segunda que se compone.

Sin embargo, esta dificultad ha sido solventada utilizando la Teoría Algebráica de Autómatas, ya que, mediante este instrumento, podemos separar cuantías por un lado y vencimientos por otro y hacer un estudio por separado del que, de manera natural, surgen las propiedades y caracterizaciones generalizadas de los sistemas simple y ampliamente sumativos y multiplicativos, además de los estacionarios (Cruz Rambaud 1995a, pp. 89-185).

No obstante, necesitamos restringir, en un principio, los vencimientos a un conjunto discreto, lo cual, por otra parte, no representa ninguna pérdida de generalidad ya que es la forma en que habitualmente se trabaja.

El segundo de los hechos descritos hace que tengamos que ampliar la definición de ley financiera y generalizarla al caso en que el conjunto de cuantías sea un subconjunto estricto de R.

La organización de este artículo quedaría, por tanto como sigue: En la Sección 2 se describen las cuentas corrientes como operaciones financieras concertadas con un proceso financiero en base a diferentes sistemas de capitalización simple, realizándose una profundización en la línea seguida por el Profesor Gil Peláez (1992, p. 506). La Sección 3 introduce las cuentas corrientes altamente remuneradas, haciéndose un estudio matemático-financiero de sus propiedades y de las diferentes funciones parciales que surgen. Por último, en la Sección 4 se da un concepto generalizado de ley financiera, teniendo en cuenta, para ello, el análisis realizado en los apartados precedentes.

CUENTAS CORRIENTES

Las *cuentas corrientes* son operaciones financieras *compuestas, de crédito recíproco*, en donde los capitales que la conforman no se conocen a priori ya que dependen de la evolución de la relación comercial a lo largo de cada período (De Pablo 1993, p. 517), es decir, son operaciones *posdeterminadas* (Gil Luezas y Gil Peláez 1987, p. 49).

Las cuentas corrientes son operaciones financieras valoradas en capitalización simple o, mejor dicho, mediante el proceso financiero generado por leyes financieras de capitalización simple $L(t,p) = 1+i.(p-t)$ con el mismo o con distinto parámetro i[1].

En efecto, si colocamos un capital (C,t) en una cuenta corriente, estará sometido a la acción de n leyes financieras de capitalización simple:

$$L_1(t,p_1) = 1+i_1.(p_1-t),\ L_2(t,p_2) = 1+i_2.(p_2-t),$$

$$,\ldots\ldots,\ L_n(t,p_n) = 1+i_n.(p_n-t),$$

vigentes en los intervalos o períodos de capitalización:

$$[p_0,p_1],\ [p_1,p_2],\ \ldots\ldots,\ [p_{n-1},p_n],\ \text{con } p_0 \leq t \leq p_1.$$

Esto ocurrirá cuando los tipos de interés sean variables; en caso de que éstos sean iguales, independientemente de los períodos de capitalización, entonces:

$$L_1(t,p_1) = 1+i.(p_1-t),\ L_2(t,p_2) = 1+i.(p_2-t),$$

$$,\ldots\ldots,\ L_n(t,p_n) = 1+i.(p_n-t).$$

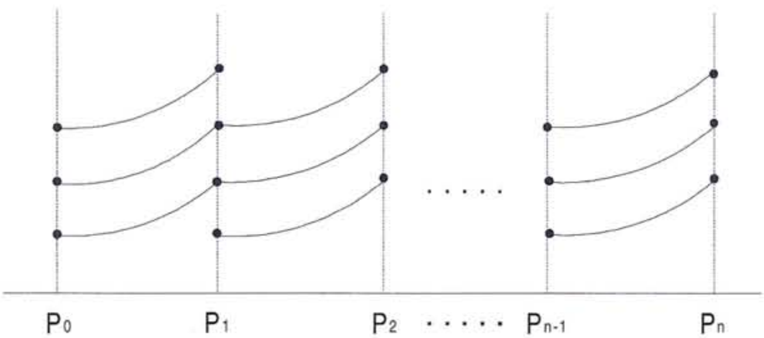
Así pues, la expresión del proceso financiero asociado a una operación financiera de cuenta corriente es (en el caso general de tantos de interés variables):

$$\mathrm{L}(t,p_n) = \begin{cases} [1+i_1.(p_1-t)].[1+i_2.(p_2-p_1)]\ldots\ldots[1+i_n.(p_n-p_{n-1})],\ p_0 \leq t \leq p_1, \\ [1+i_2.(p_2-t)]\ldots\ldots[1+i_n.(p_n-p_{n-1})],\ p_1 \leq t \leq p_2, \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ 1+i_n.(p_n-t),\ p_{n-1} \leq t \leq p_n, \end{cases}$$

o bien, más abreviadamente:

$$\mathrm{L}(t,p_n) = [1+i_r.(p_r-t)].\prod_{h=r+1}^{n}[1+i_h.(p_h-p_{h-1})],\ p_{r-1} \leq t \leq p_r.$$

FIGURA 1



Normalmente, y como puede observarse, el punto p de valoración de cada ley de capitalización simple $L(t,p) = 1+i.(p-t)$ coincide con el extremo superior p_k de cada período de capitalización $[p_{k-1},p_k]$, que se llama *fecha de liquidación de la cuenta corriente en el período* $[p_{k-1},p_k]$; $k = 1, 2, \ldots\ldots, n$.

En el caso de que todas las leyes de capitalización simple utilizadas pertenezcan al mismo sistema financiero de capitalización, hablaremos de *proceso estático* y, en el caso usual, de que los períodos de capitalización sean todos iguales (meses, trimestres, semestres, etc.), hablaremos de un *proceso uniforme*:

$$p_1 - p_0 = p_2 - p_1 = ... = p_n - p_{n-1} = z_0,$$

que, además, es *estacionario* (Gil Luezas y Gil Peláez 1987, pp. 218-225), ya que el sistema financiero de capitalización simple de parámetro i lo es:

$$L(t,p) = 1+i.(p-t) = 1+i.z = L(z),$$

por lo que:

$$\mathrm{L}(t,p_n) = \mathrm{L}(z) = (1+i.\theta.z_0).(1+i.z_0)^{n-r}, \text{ si } p_{r-1} < t \leq p_r.$$

La Figura 1 corresponde al mapa de indiferencia financiera que se establece tomando como bienes económicos la cuantía y el vencimiento de un capital financiero. Pues bien, de acuerdo con el *principio de subestimación de los capitales futuros* con respecto a los de igual cuantía, tenemos que el vencimiento es un bien económico negativo por lo que hablaremos de curvas de indiferencia crecientes en lugar de decrecientes, no como ocurre en la teoría general (Ahijado 1985, pp. 98-99).

Ahora bien, si intentamos deducir la expresión de las curvas de indiferencia en el caso de las leyes de capitalización simple, planteando:

$$C.[1+i.(t-p)] = C'.[1+i.(t'-p)] = K,$$

nos encontramos con que es imposible despejar C en función de t y K, únicamente. Este es el motivo por el que, en el concepto de ley financiera, se fija el valor de p y, además, el origen de la distinción entre sistemas financieros sumativos y multiplicativos. Por ello, en este punto, es oportuno detenernos con mayor detalle y comentar las distintas soluciones que se han dado a este problema (Cruz Rambaud 1995b, pp. 763-806):

1°) *Fijando C*: En este caso, se definiría la ley financiera de capitalización simple como aquella en que los intereses se van calculando siempre sobre la cuantía inicialmente impuesta y en la que, por consiguiente, los intereses generados no se acumulan a la cuantía inicial sino hasta el momento del vencimiento. Las curvas de indiferencia se obtendrían restando miembro a miembro las ecuaciones:

$$\begin{cases} C = C_0 + C_0.i.(t - t_0) \\ C' = C_0 + C_0.i.(p - t_0) \end{cases}$$

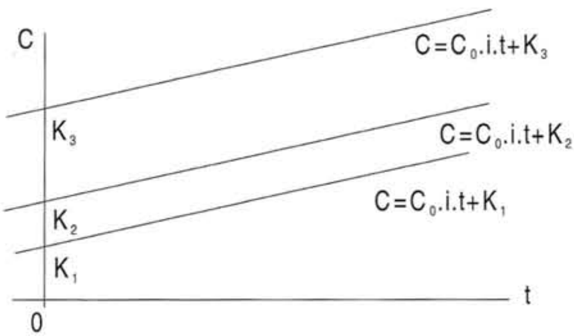
de donde:

$$C' - C_0.i.p = C - C_0.i.t.$$

Luego las curvas de indiferencia serían $C - C_0.i.t = K$, con $K > 0$ y el mapa de indiferencia estaría formado por el haz de rectas paralelas de pendiente $C_0.i$ y de ordenada en el origen variable K:

$$C = C_0.i.t + K.$$

FIGURA 2



2º) *Fijando el vencimiento inicial* (Maravall 1970, p. 156): En este caso, las curvas de indiferencia se obtendrían dividiendo miembro a miembro las ecuaciones:

$$\begin{cases} C = C_0 + C_0.i.(t - t_0) \\ C' = C_0 + C_0.i.(p - t_0) \end{cases}$$

de donde:

$$\frac{C}{1 + i.(t - t_0)} = \frac{C'}{1 + i.(p - t_0)}.$$

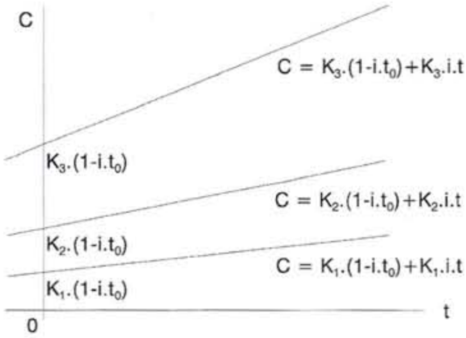
Luego las curvas de indiferencia serían:

$$\frac{C}{1 + i.(t - t_0)} = K, \text{con } K > 0$$

y el mapa de indiferencia estaría formado por el haz de rectas de pendiente variable $K.i$ y ordenada en el origen también variable $K.(1-i.t_0)$:

$$C = (K - K.i.t_0) + K.i.t.$$

FIGURA 3



3º) *Fijando el vencimiento final* (Gil Peláez 1992, p. 147): En este caso, las curvas de indiferencia se obtendrían dividiendo miembro a miembro las ecuaciones:

$$\begin{cases} C_0 = C + C.i.(t_0 - t) \\ C_0 = C' + C'.i.(t_0 - p) \end{cases}$$

de donde:

$$C.[1+i.(t_0-t)] = C'.[1+i.(t_0-p)].$$

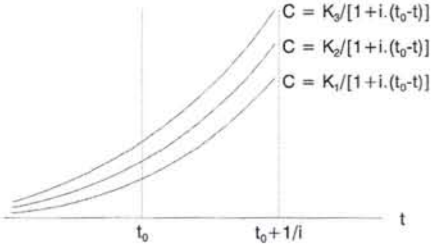
Luego las curvas de indiferencia serían $C.[1+i.(t_0-t)] = K$, con $K > 0$ y el mapa de indiferencia estaría formado por el haz de hipérbolas con asíntota vertical en:

$$t = t_0 + \frac{1}{i}$$

y asíntota horizontal en $C = 0$:

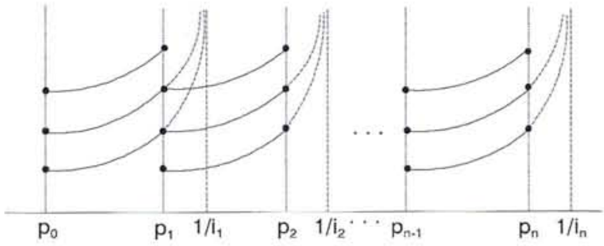
$$C = \frac{K}{1 + i.(t_0 - t)}.$$

FIGURA 4



Pues bien, en este trabajo vamos a suscribir la tercera solución de las propuestas anteriormente, con lo que el mapa de indiferencia financiera sería más precisamente:

FIGURA 5



CUENTAS CORRIENTES ALTAMENTE REMUNERADAS

Una vez que, en la Sección anterior, hemos estudiado las cuentas corrientes en general, vamos a referirnos ahora a una modalidad de cuentas corrientes que discrimina las cuantías impuestas en las mismas, de manera que, a cuantías situadas en tramos distintos, les hace corresponder una ley financiera de capitalización simple con diferente parámetro *i*, en relación directa con el tramo de cuantías.

Estas cuentas corrientes, que aparecieron en España a finales de 1989 o principios de 1990, fueron una respuesta de la banca española a la inminente implantación en nuestro país de la banca extranjera (Bonilla Musoles y otros 1990, pp. 85-109) y han recibido diferentes nombres:

- Cuentas corrientes altamente remuneradas.
- Cuentas de alta remuneración.
- Cuentas remuneradas por tramos.
- Supercuentas.
- Etc..

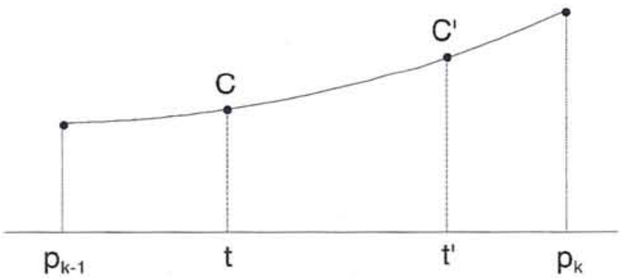
Como característica más destacada está el hecho de que, con estas cuentas, podían realizarse todo tipo de operaciones bancarias (activas, pasivas y de mediación o servicios).

Ahora bien, si pretendemos hacer con las supercuentas lo mismo que con las cuentas corrientes, nos encontramos con que aquí se ha perdido la homogeneidad de grado uno con respecto a las cuantías que es uno de los axiomas que constituyen la definición de ley financiera. No obstante, este inconveniente es resuelto por la literatura especializada, argumentando que se trata de una característica comercial y que lo que se hace en esta operación financiera es utilizar una ley financiera distinta para cada tramo de cuantías. Con ello, estaríamos salvando el inconveniente comentado de la ausencia de homogeneidad, pero nos encontraríamos con el problema analítico de ofrecer una expresión que recogiera el sustituto o equivalente de un capital financiero a lo largo de k períodos de capitalización, ya que, dependiendo de cual fuese la cuantía final en cada período, así utilizaríamos una ley u otra.

En este contexto, creemos que es preferible ampliar el concepto de ley financiera, prescindiendo de la condición de homogeneidad y utilizar, por tanto, una ley para cada tramo temporal. Lógicamente, nuestra generalización derivaría en un modelo que contemplase, como caso particular, las leyes financieras usualmente utilizadas y derivadas de las teorías existentes.

Teniendo en cuenta que, en estas cuentas corrientes, a cada capital se le hace corresponder, en concepto de interés, lo que al saldo medio del período en el momento inicial, plantearíamos, para el k-ésimo período:

FIGURA 6



$$(C,t) \sim_{p_k} \left(C + \frac{C.(p_k - t)}{p_k - p_{k-1}} . i_k , p_k \right) \sim_{p_k} \left(C' + \frac{C'.(p_k - t')}{p_k - p_{k-1}} . i_k , p_k \right) \sim_{p_k} (C',t'),$$

quedándonos:

$$C + \frac{C.(p_k - t)}{p_k - p_{k-1}} . i_k = C' + \frac{C'.(p_k - t')}{p_k - p_{k-1}} . i_k ,$$

por lo que las curvas de indiferencia serán:

$$C.\left(1+\frac{p_k - t}{p_k - p_{k-1}}.i_k\right)=K \Rightarrow C=\frac{K}{1+\dfrac{p_k - t}{p_k - p_{k-1}}.i_k}.$$

En algunas supercuentas, es usual la existencia de una *franquicia* en el sentido de que los intereses se calculan sobre el saldo medio menos la franquicia. En este caso:

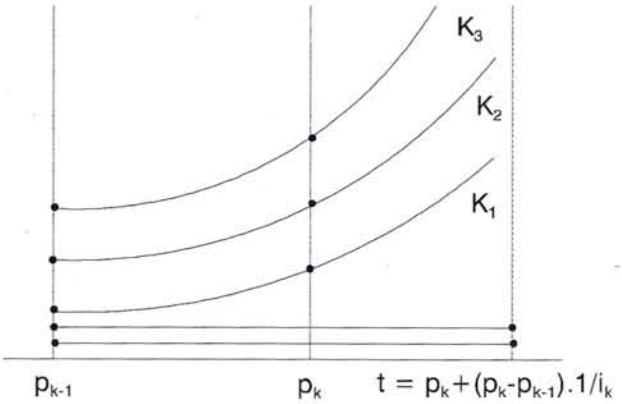
$$C.\left(1+\frac{p_k - t}{p_k - p_{k-1}}.i_k\right)-F.i_k=K \Rightarrow C=\frac{K+F.i_k}{1+\dfrac{p_k - t}{p_k - p_{k-1}}.i_k}.$$

También es usual la existencia de un *saldo mínimo* o cuantía mínima a partir de la cual se generan intereses, siempre que:

$$C.\frac{p_k - t}{p_k - p_{k-1}} \geq S_{mín}.$$

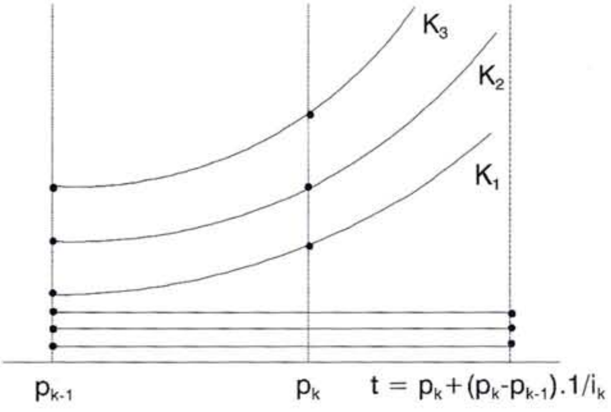
En caso contrario, el capital se transforma en otro de idéntica cuantía. Por ejemplo, *Banesto* ofrecía una supercuenta con un saldo mínimo de 500.000 ptas. y una franquicia de 250.000 ptas.. En los dos casos anteriores, la representación gráfica sería una hipérbola con asíntota vertical en la recta $t = p_k + (p_k - p_{k-1}).1/i_k$:

FIGURA 7



o bien (la segunda con mayor pendiente y ordenada en el origen):

FIGURA 8

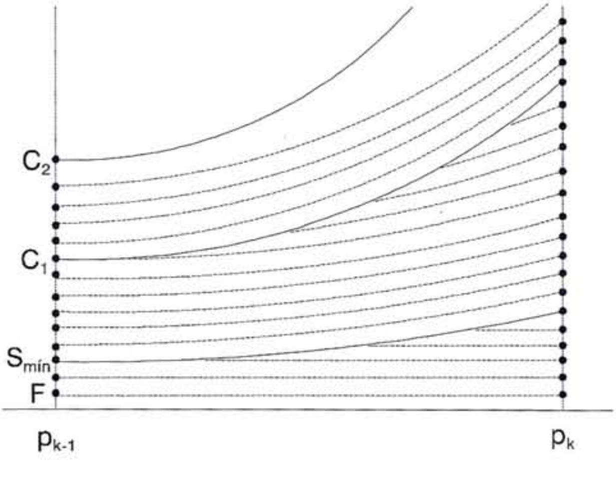


Obsérvese que, para los mismos índices de utilidad, las curvas son ahora más elevadas con lo que la utilidad se mantendrá para cuantías superiores.

Obsérvese, además, en la Figura 9, cómo en la región comprendida entre la recta $C = 0$ y la curva de indiferencia correspondiente a $S_{mín}$, las líneas de indiferencia son horizontales, o sea, $L(t,p) = 1$, con lo que, simultáneamente, también generalizaríamos la condición de que $L(t,p) > 1$ en una ley financiera de capitalización, postulando que:

$$L(t,p) \geq 1.$$

FIGURA 9



Como alternativa a este planteamiento, podría utilizarse el de la Figura 5 que solamente sería válido si utilizáramos como vencimientos las fronteras de los períodos de capitalización. Aquí tenemos que hacer un nuevo inciso para comentar que estaríamos en presencia del concepto de ley financiera en tiempo discreto en contraposición a dicha definición en tiempo continuo y que aparece desarrollada en Cruz Rambaud (1995a, pp. 89-91).

Una vez que hemos analizado la problemática de las curvas de indiferencia asociadas a una supercuenta, vamos a realizar el análisis de las diferentes funciones parciales que pueden estudiarse en este caso:

L(C,t,p) como función de *C*

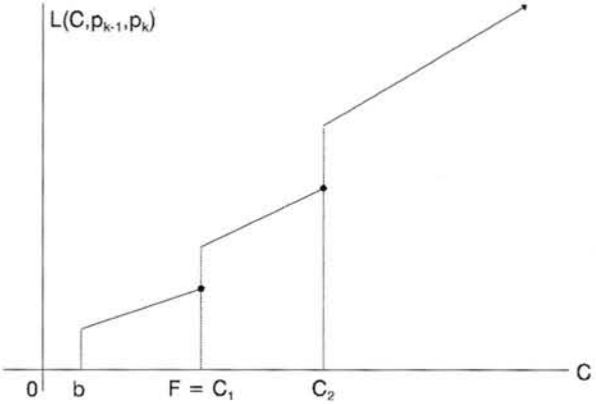
Como sabemos, las cuentas corrientes altamente remuneradas son operaciones financieras en las que se trata de primar la imposición, en una cuenta corriente, de cuantías relativamente elevadas. Para ello, se ofrece un tipo de interés nominal distinto por tramos, incluído el caso de que se fije una cantidad inicial que no se retribuye o que se retribuye mínimamente (franquicia).

En una cuenta corriente altamente remunerada, se emplean las siguientes leyes financieras (donde vamos a suponer, para simplificar, que las imposiciones se realizan al principio de los períodos de capitalización) (Cruz Rambaud 1995c):

$$\mathrm{L}(\mathrm{C}, \mathrm{P}_{k-1}, \mathrm{P}_k) = \left\{ \begin{array}{l} C.(1+i_k^{(1)}), \text{si } \mathrm{b} < \mathrm{C} \leq \mathrm{S}_{\text{mín}}, \\ (C-F).(1+i_k^{(2)}) + F.(1+i_k^{(1)}), \text{si } \mathrm{S}_{\text{mín}} = \mathrm{C}_1 < \mathrm{C} \leq \mathrm{C}_2, \\ (C-F).(1+i_k^{(3)}) + F.(1+i_k^{(1)}), \text{si } \mathrm{C}_2 < \mathrm{C} \leq \mathrm{C}_3, \\ \ldots\ldots \\ (C-F).(1+i_k^{(n)}) + F.(1+i_k^{(1)}), \text{si } \mathrm{C}_{n-1} < \mathrm{C}, \end{array} \right\}$$

donde $i_k^{(1)}$, $i_k^{(2)}$, ..., $i_k^{(n)}$ son los tantos efectivos por *k*-ésimo de año (eventualmente, $i_k^{(1)}$ puede ser igual a cero), *F* la franquicia, $S_{mín}$ el saldo mínimo y $C_1 = S_{mín}$, C_2, C_3, ..., C_{n-1} las cuantías que delimitan los tramos. La representación gráfica de $L(C,p_{k-1},p_k)$ es:

FIGURA 10



Antes de representar $L(C,p_{k-1},p_{k+1})$, hagamos la siguiente consideración: Sea f una función real de variable real estrictamente creciente, con dominio $D(f) = [a,+\infty[$ y que presenta n discontinuidades de segunda especie con salto finito en $a_1 = a$, a_2, ..., a_n; es decir:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), si\ a = a_1 < x \leq a_2, \\ f_2(x), si\ a_2 < x \leq a_3, \\ ...... \\ f_n(x), si\ a_n < x, \end{cases}$$

siendo f_i contínua en $]a_i,a_{i+1}]$, $i = 1, 2, ..., n$ y tal que

$$\forall x \in\ ]a_i,a_{i+1}], f^{m)}(x) \in\ ]a_i,a_{i+2}], i = 1, 2, ..., n-1,$$

con $a_{n+1} = +\infty$ y $f^{m)} = f\,_o f\,_o \overset{m\ veces}{\ldots\ldots}\,_o f$. En estas condiciones, se verifica que:

Lema. $f^{m)}$ presenta $m.(n-1) + 1$ discontinuidades de segunda especie con salto finito.

Demostración.- Denotemos por d_j el número de discontinuidades de $f^{j)} = f\,_o f\,_o \overset{j\ veces}{\ldots\ldots}\,_o f$, $j = 1, 2, ..., m$:

CUADRO 1

<table>
<tr><td rowspan="3">f_1</td><td rowspan="2">$f_1 \circ f_1$</td><td>$f_1 \circ f_1 \circ f_1$</td></tr>
<tr><td>$f_2 \circ f_1 \circ f_1$</td></tr>
<tr><td>$f_2 \circ f_1$</td><td>$f_2 \circ f_2 \circ f_1$</td></tr>
</table>

f_2	$f_2 \circ f_2$	$f_2 \circ f_2 \circ f_2$
		$f_3 \circ f_2 \circ f_2$
	$f_3 \circ f_2$	$f_3 \circ f_3 \circ f_2$
......	.....	.....
f_{n-1}	$f_{n-1} \circ f_{n-1}$	$f_{n-1} \circ f_{n-1} \circ f_{n-1}$
		$f_n \circ f_{n-1} \circ f_{n-1}$
	$f_n \circ f_{n-1}$	$f_n \circ f_n \circ f_{n-1}$
f_n	$f_n \circ f_n$	$f_n \circ f_n \circ f_n$
$d_1 = n$	$d_2 = 2.n - 1$	$d_3 = 3.n - 2$

Demostremos, por inducción sobre m, que $d_m = m.(n-1)+1$. En efecto:

1. Para $m = 1 \Rightarrow d_1 = 1.(n-1)+1 = n$. Luego se cumple para $m=1$.
2. Supongamos que la hipótesis de inducción es cierta para $m-1$, es decir, que $d_{m-1} = (m-1).(n-1)+1$.
3. Demostremos la fórmula para m. Si tomamos una función parcial cualquiera de las que componen $f^{(m-1)}$, puede ser de cualquiera de estas formas:

   a) $f_k \circ f_k \circ \overset{m-1}{\cdots\cdots} \circ f_k$, o
   b) $f_k \circ \overset{r}{\cdots\cdots} \circ f_k \circ f_{k-1} \circ \overset{s}{\cdots\cdots} \circ f_{k-1}$, con $r+s = m-1$.

La primera puede dar lugar, a su vez, a $f_k \circ f_k \circ \overset{m}{\cdots\cdots} \circ f_k$ o a $f_{k+1} \circ f_k \circ \overset{m-1}{\cdots\cdots} \circ f_k$. Mientras que la segunda sólo puede dar lugar a $f_k \circ \overset{r+1}{\cdots\cdots} \circ f_k \circ f_{k-1} \circ \overset{s}{\cdots\cdots} \circ f_{k-1}$, con $(r+1)+s = (r+s)+1 = (m-1)+1 = m$.

Por tanto, las funciones del primer tipo dan lugar a dos, si $k = 1, 2, ..., n-1$ y a una, si $k=n$. Además, las funciones del segundo tipo dan lugar a una. Luego hay una aportación de $n-1$ funciones:

$$d_m = d_{m-1} + (n-1) = (m-1).(n-1) + 1 + (n-1) = m.(n-1) + 1.$$

Por tanto:

$$d_m = m.(n-1) + 1.$$

Aplicando esta fórmula, el número de discontinuidades de $L(C,p_{k-1},p_{k+1})$ es $2.(n-1) + 1$, el de $L(C,p_{k-1},p_{k+2})$, $3.(n-1) + 1$, y así sucesivamente. Así pues, las representaciones gráficas de estas dos funciones serían:

FIGURA 11

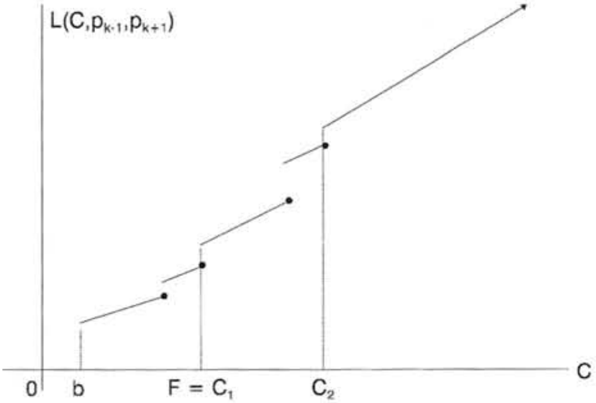
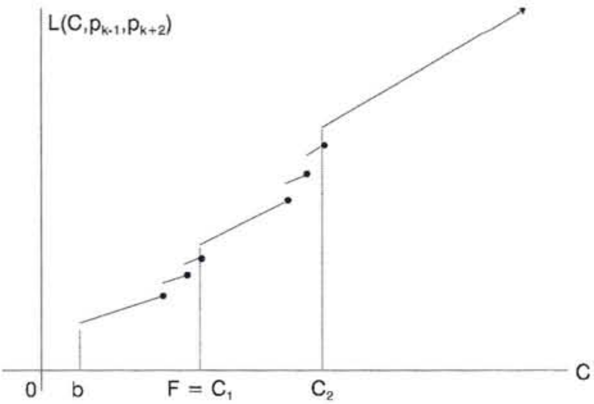


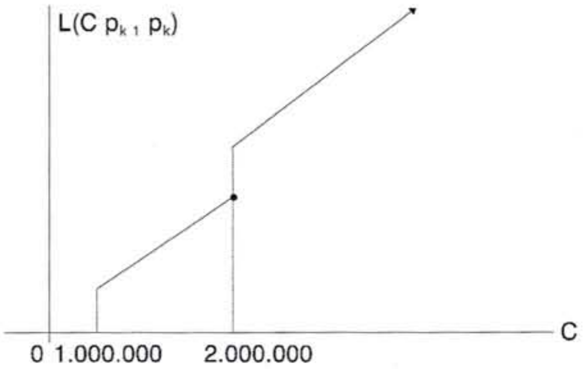
FIGURA 12



Ejemplo. El *Deutsche Bank* ofrecía la *Cuenta Personal* que retribuía las imposiciones entre 1 y 2 millones al 4% nominal anual pagadero por meses y al 6% para los saldos superiores a 2 millones, con una franquicia de 250.000 ptas.. En este caso:

$$L(C, p_{k-1}, p_k) = \begin{cases} 1'00333.(C - 250.000) + 250.000, si\ 1.000.000 < C \leq 2.000.000, \\ 1'005.(C - 250.000) + 250.000, si\ 2.000.000 < C, \end{cases}$$

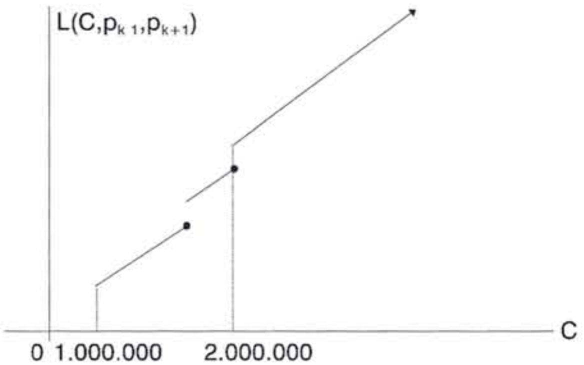
FIGURA 13



$$1'00333.(C - 250.000) + 250.000 = 2.000.000 \Rightarrow C = 1.994.186.$$

$$L(C, p_{k-1}, p_{k+1}) = \begin{cases} 1'00333^2.(C - 250.000) + 250.000, si\ 1M. < C \leq 1.994.186, \\ 1'00333.1'005.(C - 250.000) + 250.000, si\ 1.994.186 < C \leq 2M., \\ 1'005^2.(C - 250.000) + 250.000, si\ 2.000.000 < C. \end{cases}$$

FIGURA 14



Por último, vamos a deducir la expresión de $L(C,p_{k-r},p_{k+r})$, en el supuesto de que las sucesivas imágenes de *C* no "se salgan" del *s*-ésimo intervalo. En efecto,

$$L(C,p_{k-1},p_k) = (C-F).(1+i_k^{(s)}) + F.(1+i_k^{(l)}).$$

$$L(C,p_{k-1},p_{k+1}) = [(C-F).(1+i_k^{(s)}) + F.(1+i_k^{(l)}) - F].(1+i_k^{(s)}) +$$

$$F.(1+i_k^{(l)}) = (C-F).(1+i_k^{(s)})^2 + F.i_k^{(l)}.(1+i_k^{(s)}) + F.i_k^{(l)} + F =$$

$$= (C - F).(1 + i_k^{(s)})^2 + F.i_k^{(1)}.S_{2}\rceil_{i_k^{(s)}} + F =$$

$$= (C - F).(1 + i_k^{(s)})^2 + F.[i_k^{(1)}.S_{2}\rceil_{i_k^{(s)}} + 1].$$

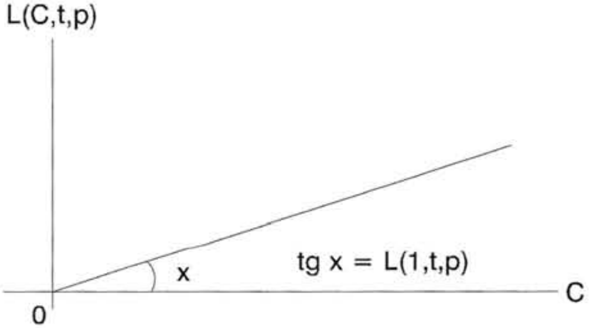
Análogamente, por inducción, se demuestra que:

$$L(C, p_{k-1}, p_{k+r-1}) = (C - F).(1 + i_k^{(s)})^r + F.[i_k^{(1)}.S_{r}\rceil_{i_k^{(s)}} + 1].$$

En el caso de que alguna imagen de C "se saliera" del s-ésimo intervalo, habría que aplicar la fórmula anterior sucesivamente.

Obsérvese que, en el caso de una ley homogénea, la gráfica sería:

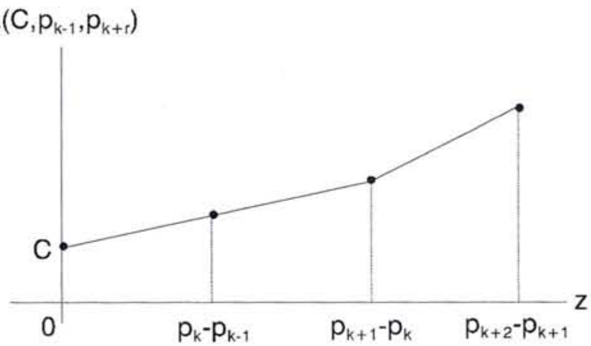
FIGURA 15



L(C,t,p)* como función del tiempo interno *z

Si $z = p_{k+r} - p_{k-1}$, $r = -1, 0, \ldots.., n$, la representación gráfica de $L(C,p_{k-1},p_{k+r})$ sería, por ejemplo:

FIGURA 16



Rentabilidad

A continuación, vamos a estudiar cómo evoluciona la rentabilidad dentro de cada tramo de cuantías, teniendo en cuenta que hablaremos de "rédito de rentabilidad", es decir, sin tener en cuenta el tiempo. Así, en el k-ésimo intervalo temporal y s-ésimo tramo de cuantías, utilizando la expresión que, en una supercuenta, relaciona las cuantías dentro de un período de capitalización:

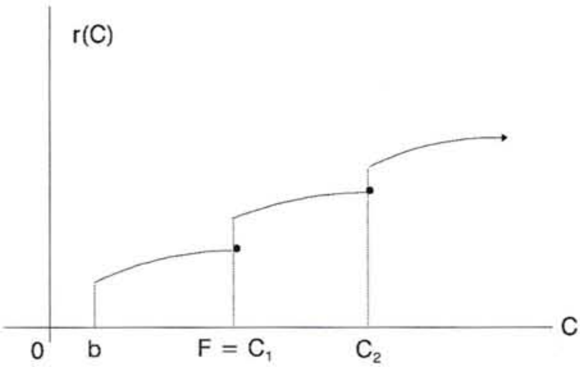
$$r(C)=\frac{L(C,p_{k-1},p_k)}{C}=\frac{(C-F).(1+i_k^{(s)})+F.(1+i_k^{(1)})}{C}.$$

Como estamos interesados en estudiar la función $r(C)$ dentro de un tramo de cuantías, podemos derivar con respecto a C ya que, en dicho intervalo, la función es derivable:

$$r'(C)=\frac{F.(i_k^{(s)}-i_k^{(1)})}{C^2}>0.$$

Como, además, $r''(C)<0$, podemos concluir que la rentabilidad evoluciona en sentido creciente dentro de cada tramo, presentando, además, concavidad hacia abajo. Así, la representación gráfica de $r(C)$ es:

FIGURA 17



Obsérvese que estos tramos de rentabilidad pueden ser horizontales en el caso de que $F=0$. Este es el caso de la supercuenta ofrecida por el *BBK* y muchas otras.

PROPUESTA DE UN NUEVO CONCEPTO DE LEY FINANCIERA

Un *sistema financiero* es una función:

$$F: R^3 \to R$$

tal que

$$(C,t,p) \rightarrow F(C,t,p)$$

que cumple las siguientes condiciones, para todo C, t y $p \in R$:

1ª) $C.F(C,t,p) > 0$, es decir, que C y $F(C,t,p)$ tienen el mismo signo.
2ª) $F(0,t,p) = 0$ y $F(C,t,t) = C$.
3ª) $F(C,t,p)$ es estrictamente creciente con respecto a C, monótona decreciente con respecto a t y monótona creciente con respecto a p, es decir:

$$\frac{\Delta F(C,t,p)}{\Delta C} > 0, \frac{\Delta F(C,t,p)}{\Delta t} \leq 0 \text{ y } \frac{\Delta F(C,t,p)}{\Delta p} \geq 0.$$

Como consecuencia de esta definición, podemos citar:

$$F(C,t,p) \geq C, \text{ si } t \leq p \text{ y}$$

$$F(C,t,p) \leq C, \text{ si } t \geq p.$$

Usualmente, nos situaremos en el caso de una función derivable salvo a lo sumo en un conjunto numerable de puntos, por lo que la 3ª condición quedaría como sigue:

$$\frac{\partial F(C,t,p)}{\partial C} > 0, \frac{\partial F(C,t,p)}{\partial t} \leq 0, \frac{\partial F(C,t,p)}{\partial p} \geq 0.$$

Si, en la definición de sistema financiero, fijamos el punto p, la función:

$$F_p: R^2 \rightarrow R \,/\, (C,t) \rightarrow F_p(C,t) = F(C,t,p)$$

será llamada *ley financiera en p*:

1º) *De capitalización*, si $t \leq p$.
2º) *De descuento*, si $t \geq p$.

CONCLUSIONES

No cabe duda de que el modelo matemático en el que actualmente se basa el concepto de ley financiera es lo suficientemente amplio como para dar cabida a la mayoría de las operaciones financieras que se llevan a cabo en las diferentes actividades económicas en las que son precisos determinados cálculos financieros.

Sin embargo, la imaginación financiera hace que surjan nuevos productos que nos hacen recapacitar sobre la amplitud de la axiomática sobre la que se asienta la Matemática de las Operaciones Financieras, para lo cual planteamos soluciones que requieren una generalización del concepto de ley financiera de acuerdo con las directrices marcadas por E. Levi (1973, pp. 57-70) o D. Maravall (1970, pp. 155-160).

Básicamente, el sentido de la generalización ha sido el levantamiento de algunas condiciones de la axiomática del concepto de ley financiera y su sustitución por otras condiciones menos restrictivas que también tienen sentido financiero desde el punto de vista de un sujeto económico racional, como son:

1. La no consideración de la homogeneidad de grado uno con respecto a la cuantía.
2. La no consideración de la continuidad.
3. La no consideración del crecimiento o decrecimiento estrictos.

NOTAS

(1) Más concretamente, *i* es el tanto acumulado o el tanto instantáneo acumulado (De Pablo 1993, p. 174).

BIBLIOGRAFÍA

AHIJADO QUINTILLÁN, M. (1985): *Lecciones de microeconomía.* U.N.E.D., Madrid.
BONILLA MUSOLES, M. Y OTROS (1990): "Las supercuentas: un análisis matemático-financiero". Revista *Esic-Market,* Octubre-Diciembre.
CRUZ RAMBAUD, S. (1995a): *Nuevo enfoque de las leyes financieras a través de la Teoría Algebráica de Autómatas.* U.N.E.D., Madrid.
CRUZ RAMBAUD, S. (1995b): "Curvas de indiferencia y leyes financieras". Revista *Actualidad Financiera,* Núm. 22, Mayo-Junio.
CRUZ RAMBAUD, S. (1995c): "Análisis matemático-financiero de las cuentas de interés diario". Revista *Análisis Financiero,* Noviembre.
DE PABLO LÓPEZ, A. (1993): *Matemática de las Operaciones Financieras.* U.N.E.D., Madrid.
FERRUZ AGUDO, L. (1994): *Operaciones Financieras.* Ariel Economía, Barcelona.
GIL LUEZAS, M.A. Y GIL PELÁEZ, L. (1987): *Matemática de las Operaciones Financieras.* U.N.E.D., Madrid.
GIL PELÁEZ, L. (1992): *Matemática de las Operaciones Financieras.* Editorial AC, Madrid.
GONZÁLEZ CATALÁ, V. (1992): *Análisis de las Operaciones Financieras, Bancarias y Bursátiles.* Editorial Ciencias Sociales, Madrid.
LEVI, E. (1973): *Curso de Matemática Financiera y Actuarial.* Editorial Bosch, Barcelona.
MARAVALL CASESNOVES, D. (1970): *Matemática Financiera.* Editorial Dossat, Barcelona.
MENEU FERRER, V. Y OTROS (1994): *Operaciones Financieras en el Mercado Español.* Ariel Economía, Barcelona.
RODRÍGUEZ RODRÍGUEZ, A. (1984): *Matemática de la Financiación.* Editorial Romargraf, Barcelona.