Ubicuidad de la sucesión de Fibonacci

Francisco Balibrea Gallego

En mi paso por la escuela y el instituto, oí decir varias veces a mis maestros y profesores aquella frase de Galileo según la cual, las matemáticas son el lenguaje en el que está escrita la naturaleza. Nunca entendí muy bien lo que quería decir la maldita frase, tantas veces repetida y la verdad es que le hice poco caso; "cosa de profesores", me decía yo.

Sin embargo con el paso del tiempo, he tenido que reconsiderar mi posición. Una de las cosas que me han hecho cambiar ha sido el conocimiento y las propiedades mágicas de la *sucesión numérica de Fibonacci*. Se trata de la sucesión 1,1,2,3,5,8,13,21,34..., es decir, la sucesión cuyo primer término es $F_1 = 1$, su segundo $F_2 = 1$ y a partir de aquí es $F_{n+1} = F_n+F_{n-1}$ donde $n = 2,3,4...$ Los números que se van obteniendo se denominan los *números de Fibonacci*. Esta sucesión se obtiene en muchas situaciones, en particular cuando se resuelve un problema sencillo que fue propuesto por *Leonardo di Pisa*, alias Fibonacci, cuando en 1202 publicó un tratado de matemáticas llamado el *Liber Abaci* (el Libro de los Ábacos) que trataba fundamentalmente del manejo de los números. Además de las aportaciones matemáticas, introdujo una originalidad que ha llegado hasta nuestros días; proponía ejercicios y problemas para que los lectores se ejercitasen y pudiesen comprobar si de verdad entendían lo que allí se explicaba.

Uno de tales problemas que ha merecido conocimiento universal, es el siguiente: *un hombre coloca una pareja de conejos (macho y hembra) en una isla desierta. En cada estación, cada pareja de conejos adultos engendran una nueva pareja (macho y hembra). La gestación dura una estación y es necesario igualmente que discurra también una estación para que cada nueva pareja adquiera la madurez sexual y pueda engendrar. Por consiguiente, cada pareja engendra una nueva pareja por estación a partir de su segunda estación de existencia. Se supone que la isla está libre de depredadores y que tiene recursos suficientes para mantener a la población que se vaya producien-*

do. En consecuencia, los conejos que la habitan, no mueren y continúan procreando. ¿Cuál será el numero de conejos vivos en la isla al final de la estación n-ésima?

Es evidente que se trataba de un problema recreativo y no creo que Fibonacci estuviera interesado en la evolución de las poblaciones de conejos, ya que el problema tiene unas hipótesis demasiado ideales para acercarse a la realidad. La respuesta al mismo es la sucesión de números introducida anteriormente y que fue bautizada con el nombre de sucesión de Fibonacci en el siglo XIX por el matemático francés Edouard Lucas (1842-1891). Este matemático estaba interesado también en la teoría de los números y en los problemas recreativos de Matemáticas. Entre otras aportaciones, fue el introductor de un famoso juego de estrategia que se denomina la *torre de Hanoi* y de otra sucesión muy estudiada como la de Fibonacci que se conoce como la *sucesión de Lucas* y que viene dada por la ecuación en diferencias finitas $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$ donde $L_1 = 1$ y $L_2 = 3$, es decir, la sucesión 1,3,4,7,11,18,29... Hay que decir que existen relaciones entre ambas sucesiones y que gozan de ciertas propiedades comunes.

Es evidente que los números de Fibonacci son cada vez más grandes cuando *n* crece; sin embargo, esta sucesión tiene la interesante propiedad de que si calculamos el cociente

$$F_n/F_{n+1}$$

y el índice *n* crece, los cocientes que se obtienen se van aproximando cada vez más al número

$$\Phi = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1,618033...,$$

un número que aparece muchas veces en las Matemáticas y que se conoce como el *número de oro,* que se suele denotar por la letra griega *phi* en honor, según parece, al escultor griego *Fidias,* que lo usaba frecuentemente en las proporciones de sus esculturas para que resultaran especialmente agradables a la contemplación. Este número se encuentra igualmente en las proporciones de las pirámides egipcias, en las dimensiones del Partenón y en las proporciones de sus capiteles. Su influencia y uso en el mundo de obras pictóricas ha sido evidente, tanto en los maestros clásicos como Leonardo da Vinci, Poussin, Serusin, etc. como en pintores cubistas más recientes como Piet Mondrian y los hermanos Duchamp. A este respecto es interesante resaltar los resultados del estudio realizado por el psicólogo Fechner, en el sentido de que la mayor parte de los cuadros famosos introducen la relación de oro en los tamaños de las figuras de sus composiciones, pero también es verdad que algunos de los más apreciados no cumplen esta regla en absoluto.

Pero donde es sorprendente la aparición de los números de la sucesión de Fibonacci y del número de oro, es en el modo de inserción de las hojas en el tallo de los vegetales superiores, cuando este tallo es helicoidal. De este asunto trata la parte de la Botánica que se llama *Filotaxia,* en concreto la que se dedica a estudiar los patrones de organización de las plantas. La ley que siguen la inserción de las hojas fue descrita por

Leonardo da Vinci en su *Trattato della Pittura,* publicada en París mucho después de su muerte (1651). Esta ley se puede expresar por medio de cocientes de la forma a/b donde a y b son números enteros positivos con $b > a$. En la helicoide generatriz del tallo que pasa por todos los puntos de intersección de las hojas, a representa el número de vueltas de espira necesario para que dos pecíolos se hallen exactamente situados uno debajo del otro (se dice que están en el mismo *ortóstico*) y b, el número de hojas que se hallan insertas en este recorrido. La serie de cocientes descrito por el propio Leonardo, se conoce como la serie de *Schimper-Braun* y es *1/2, 1/3, 2/5, 3/8, 5/13, 8/21....,* es decir, tanto los numeradores como los denominadores son los números de la sucesión de Fibonacci pero desfasados entre sí en dos términos. Los primeros términos de esta sucesión suelen encontrarse en tallos con hojas sin modificar y los términos mayores en tallos con hojas modificadas y entrenudos acortados como las escamas de los estróbilos de las gimnospermas o las flores en el girasol. Esta serie es la más generalizada en la naturaleza y es de tipo creciente cuando n es par y decreciente cuando n es impar. Cuando n es muy grande, la sucesión tiende al número

$$(3-\sqrt{5})/2 \approx 0{,}38196...,$$

que resulta ser precisamente el número 2- Φ. Como las hojas tienden a disponerse en los tallos siguiendo los términos de esta sucesión y como su valor límite es un número irracional, la tendencia evolutiva de la naturaleza es que ninguna hoja se coloque exactamente debajo de otra, la forma teóricamente más eficaz para aprovechar la luz en la fotosíntesis y evitar la sombrea del follaje. Este efecto lo consiguen los vegetales mediante sustancias reguladoras del crecimiento que son generalmente de tipo inhibidor y que se forman en los *primordios foliares* (zonas reducidas donde crecen las hojas) inhibiendo el desarrollo de otros más jóvenes, hasta una determinada distancia. Por ejemplo, el roble, manzano, ciruelo y cerezo siguen el patrón marcado por el término *3/5,* el peral el *3/8* y el almendro el *5/13*. Se puede decir que estos patrones están en los genes de las plantas y estos a su vez dependen de la armonía numérica de los términos de la sucesión de Fibonacci.

La forma de muchos seres vivos vista a través de su geometría, hace aparecer la sucesión de Fibonacci. Este es el caso de las conchas que tienen algunas caracolas marinas. Su forma es la de una *espiral de Fibonacci* que puede construirse del siguiente modo. Dibujamos dos cuadrados de lado unidad pegados por uno de sus lados formando un rectángulo de lados 2 y 1 unidad. Después pegamos un cuadrado de lado 2 al rectángulo anterior obteniéndose un rectángulo de lados 2 y 3 unidades; luego pegamos un cuadrado de lado 3 al lado mayor del rectángulo y así sucesivamente. Haciendo centro en el punto central del lado del primer rectángulo de lado 2, trazamos una semicircunferencia, a la que pegamos un cuarto de circunferencia con centro en uno de los vértices del cuadrado de lado 2, luego hacemos lo mismo con el cuadrado de lado 3 y así sucesivamente, obteniéndose finalmente la espiral. Esta figura tiene la propiedad de que en cada cuarto de circunferencia trazado, la longitud se incrementa en la proporción Φ. Esta proporción de crecimiento, parece ser la más adecuada y armoniosa para el crecimiento del animal que habita dentro de la concha. Sin embargo hay otras posibilidades, por ejemplo es conocido que la concha del *nautilus* (molusco que vive en el Océano Índico) sigue una espiral cuyo radio aumenta en una proporción Φ cada vuelta de completa. Formas completas tienen los cuernos de algunos cérvidos, las telas de algunas arañas y también los remolinos que forma el agua cuando está sometida a un régimen turbulento.

La forma como se empaquetan las semillas de algunas plantas, sigue también los patrones impuestos por los distintos tipos de espirales comentados. En efecto, en muchos vegetales, a partir de la zona central de una flor, las semillas que produce el vegetal se almacenan o colocan siguiendo los puntos de intersección de dos espirales que giran en sentidos contrarios. Cuando contamos el número de espirales de ambos sentidos, nos encontramos con números consecutivos de Fibonacci, como casos más frecuentes los pares *(5 , 8)* y *(8 , 13)* en la mayor parte de las piñas, o como los pares *(55 , 89)* o *(144 , 233)* en el caso de los girasoles.

La explicación de porqué las semillas se distribuyen siguiendo los patrones anteriores está en ciertos principios extremales a los que parece que se ajusta la naturaleza. La planta produce sucesivas generaciones de semillas que aparecen desplazadas $1/\ \Phi$ de vuelta respecto de las anteriores. De esta forma, en cada paso, el ángulo de apertura de las semillas aumenta exactamente en la proporción de oro. La distribución así formada constituye una forma óptima de empaquetar semillas de tamaño semejante, obteniéndose una distribución uniforme con independencia de la extensión del cáliz. Una semilla determinada, al cabo de varias generaciones seguirá formando el ángulo original, aunque su distancia al centro habrá aumentado al crecer la planta.

La distribución de las espinas en muchos tipos de cactus se ajusta igualmente a estos patrones y resulta relativamente sencillo observar las espirales que giran en ambos sentidos.

Aunque no existe evidencia empírica de porqué las cosas son así, los números de Fibonacci vuelven a aparecer en el número de pétalos de las flores. La mayor parte de los geranios, violetas, heliotropos, azaleas y orquídeas tienen *cinco* pétalos. El *delphinium 8* y las margaritas suelen tener *21, 34* o *55*.

Ni que decir tiene que la sucesión de Fibonacci está presente en muchas cuestiones relacionadas con las Matemáticas. Cuando tengo ocasión de dar charlas a estudiantes de instituto para tratar de convencerlos de que las Matemáticas además de ser útiles también son bellas, me resulta de gran utilidad plantearles el siguiente juego. Cada uno debe anotar un número de tres cifras donde la de las centenas sea mayor que la de las unidades, después se invierte el número y se restan los dos números obtenidos. Tal resultado se invierte de nuevo y se suman estos dos últimos números. Finalmente se pregunta al auditorio los resultados que han obtenido después de realizar estas sencillas operaciones con los números que anotaron. La sorpresa es que todo el que no se equivoca en las operaciones, obtiene el mismo resultado, el número *1089*. La justificación de este hecho es fácil de hacer. Pero ahora complicamos un poco las cosas planteando si obtendremos el mismo resultado usando números de cuatro cifras y siguiendo el mismo procedimiento; probamos y observamos que obtenemos uno de los tres números siguientes: *9999, 10890* o *10989*. Podemos continuar y entonces las cosas se complican aun más, ¿existe alguna forma de saber para cualquier número compuesto de *n-cifras,* cuántos resultados distintos podemos tener? . La respuesta ahora no es nada fácil y nos plantea un arduo problema combinatorio. Sin embargo podemos dar respuesta a tal problema, el número de resultados distintos que podemos tener es el número de Fibonacci, $F_{2[n/2]}$, donde con *[a]* representamos el número entero más próximo al número a y menor que él. Es decir, si proponemos números de once cifras, entonces obtendremos resultados distintos dados por el número de Fibonacci $F_{10} = 55$.

Después de todo esto, creo que en aquellos años debí tomar más en serio la opinión de Galileo y la de mis maestros.