EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. **15**, Núm. 1, 87 – 95 (2000)

Théorèmes de Structure sur Certaines Algèbres m-Convexes Commutatives

Z. Abdelali et M. Chidami

Département de Mathématiques et Informatique, Faculté des Sciences, Université Mohammed V, B.P. 1014-*Rabat, Maroc, e-mail chidami@fsr.ac.ma*

(Research paper presented by A. Rodríguez Palacios)

AMS *Subject Class.* (1991): 46J *Received February* 23, 2000

1. Introduction

Nous donnons dans ce travail une caractérisation des algèbres (semi-simples) localement-convexes complètes faiblement topologisées au sens de S. Warner, ce qui clarifie, entre autres, plusieurs résultats données sur certaines classes d'algèbres à base étudiées par de nombreux auteurs ([2], [6], [7]) pour approcher le problème de E.A. Michael sur la continuité des caractères dans les algèbres de Fréchet [9, §12].

Dans le premier paragraphe, Proposition 1, nous montrons que les algèbres produit dénombrable de Q-algèbres de Fréchet unitaires sont les seules algèbres de Fréchet unitaires dont l'espace des caractères est réunion de sous-ensembles compact-ouverts (ces algèbres sont apparues dans [5, Lemme 2]).

Dans la Proposition 2, nous montrons que toute algèbre m-convexe unitaire complète dont il existe un sous-ensemble total $\mathbf{a}$ d'idempotents orthogonaux est isomorphe à $\mathbf{C}^{\mathbf{a}}$. Ceci, permet de déduire le Théorème 1.7 de [11] de H. Render qui affirme que dans le cas métrisable si $\mathbf{a}$ est dénombrable alors $\mathbf{a}$ est une base (ceci n'est pas vrai dans le cas non m-convexe). Ainsi, nous obtenons la Proposition 3.6 de [1] caractérisant certaines algèbres de Fréchet à base, et nous caractérisons ces algèbres dans le cas non nécessairement métrisable ce qui clarifie les résultats du [2, §3]. Notre résultat généralise aussi les Théorèmes 3.3 et 3.4 de [8] qui caractérisent les algèbres m-convexes unitaires complètes à base formée par des idempotents orthogonaux (ces algèbres sont introduite dans [6] et [7]).

Dans le deuxième paragraphe, nous montrons que si A est une algèbre topologique complète, faiblement topologisée au sens de S. Warner [14], alors l'algèbre quotient $A/\mathrm{Rad}(A)$ est isomorphe algébriquement et topologiquement à $\mathbf{C}^{M(A)}$. De plus, s'il existe un sous-ensemble $\mathbf{a}$ de A orthogonal, total et formé par des idempotents alors A est isomorphe algébriquement et topologiquement à $\mathbf{C}^{M(A)}$, et on a $\mathrm{card}(M(A)) \leq \mathrm{card}(\mathbf{a})$. Ceci permet d'établir, dans un cadre plus général, les résultats du premier paragraphe.

2. Sur les algèbres m-convexes à sous-ensemble orthogonal des idempotents

Toutes les algèbres considérées ici sont des algèbres commutatives sur le corps des nombres complexes $\mathbf{C}$, et $\mathbf{N}$ désignera l'ensemble des entiers non négatifs.

Une algèbre A est dite localement-convexe, si A est munie d'une famille filtrante croissante de semi-normes $(P_i)_{i\in I}$ d'espace vectoriel séparé et si l'application bilinéaire produit est continue (pour certain auteurs ces algèbres sont appelées algèbres localement-convexes à produit continu). On dira que A est complète si l'espace localement-convexe sous-jacent est complet. Si A est unitaire, l'unité de A sera noté e.

L'algèbre localement-convexe A est dite m-convexe si la famille de semi-normes $(P_i)_{i\in I}$ verifie, en outre, $P_i(ab) \leq P_i(a)P_i(b)$ pour tout $(a,b,i) \in A^2 \times I$. L'ensemble I est muni de l'ordre filtrant croissant naturel : $i \leq j$ si $P_i \leq P_j$, dans ce cas on a :

$$A = \varprojlim (A_i, (\pi_i^j)_{j\geq i})_{i,j\in I},$$

où A_i est l'algèbre complétée de l'algèbre $(A/(P_i)^{-1}(\{0\})\ , \tilde{P}_i)$, $\tilde{P}_i$ est la semi-norme induite par P_i, $\pi_i : A \to A_i$ et $\pi_i^j : A_j \to A_i$ $(j \geq i)$ sont les homomorphismes canoniques.

Notons par $M(A)$ l'espace des formes linéaires continues multiplicatives (caractères) muni de la topologie induite par le dual faible de A (on garde la même définition dans le cas localement convexe). Pour tout $i \in I$, l'espace topologique $M(A_i)$ s'identifie au sous-espace $M_i = \{\phi \in M(A)/\ |\phi(a) \leq P_i(a),$ $(a \in A)\}$, et on a $\bigcup_{i\in I} M_i = M(A)$. Si A est unitaire, M_i sera un sous ensemble compact de $M(A)$. Pour plus de détail sur les algèbres m-convexes voir par exemple [9].

Pour tout $a \in A$, O_a désignera l'ensemble $\{\phi \in M(A)/\phi(a) \neq 0\}$ et id_A désignera l'ensemble des idempotents de A. Nous donnons d'abord certaines propriétés élémentaires sur les idempotents :

Remarques 1. Soit $(A, (P_i)_{i\in I})$ une algèbre m-convexe complète et soit $a \in$

id_A, on a :

1) $O_a = \emptyset$ si et seulement si $a = 0$ (si $O_a = \emptyset$, $a \in \mathrm{Rad}(A)$, donc pour tout $i \in I$, $\lim_{n\to\infty}(P_i(a^n))^{\frac{1}{n}} = 0$, donc $\lim_{n\to\infty}(P_i(a))^{\frac{1}{n}} = 0$ ainsi $P_i(a) = 0$ pour tout $i \in I$, d'où $a = 0$).

2) O_a est un sous-ensemble ouvert et fermé de $M(A)$.

3) $A.a$ est unitaire d'unité a.

4) Pour tout idéal N on a $N \cap A.a = N.a$.

5) Si $b \in id_A$ alors $a.b = 0$ si et seulement si $O_a \cap O_b = \emptyset$.

6) Si $\mathbf{a} \subseteq id_A$ est orthogonal tel que $\bigcup_{a\in\mathbf{a}} O_a = M(A)$, alors pour tout compact $K \subseteq M(A)$, l'ensemble $\{a \in \mathbf{a}/O_a \cap K \neq \emptyset\}$ est fini, et on a $\mathrm{card}(\mathbf{a}) \leq \mathrm{card}(M(A))$.

Le lemme suivant présente une version du théorème de G. Shilov sur les idempotents qui sera utile pour la suite.

Lemme 1. *Soit A une algèbre m-convexe unitaire complète ; pour tout $O \subseteq M(A)$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) *O est ouvert et fermé dans $M(A)$.*

ii) *Pour tout $i \in I$, $O \cap M_i$ est ouvert et fermé dans M_i.*

iii) *Il existe $a \in id_A$ tel que $O_a = O$.*

Preuve. iii) $\Rightarrow$ i) et i) $\Rightarrow$ ii) sont évidentes.

ii) $\Rightarrow$ iii) Pour tout $i \in I$, il existe, d'après le théorème de Shilov ([12] ou [3, Théorème 5.21]), un unique idempotent $a_i \in A_i$ tel que $O_{a_i} = O \cap M_i$, l'unicité de a_i assure que si $i \leq j$, $\pi_i^j(a_j) = a_i$, donc il existe $a \in id_A$ tel que $\pi_i(a) = a_i$ pour tout $i \in I$, ainsi

$$O_a = \bigcup_{i\in I}(O_a \cap M_i) = \bigcup_{i\in I}(O_{a_i} \cap M_i) = \bigcup_{i\in I}(O \cap M_i) = O.$$

∎

Notre construction est basée essentiellement sur le lemme suivant :

Lemme 2. *Soit A une algèbre m-convexe unitaire complète, s'il existe $\mathbf{a} \subseteq id_A$ orthogonal tel que $M(A) = \bigcup_{a\in\mathbf{a}} O_a$, l'homomorphisme*

$$\Phi : A \longrightarrow \prod_{a\in\mathbf{a}} A.a;\ x \to (x.a)_{a\in\mathbf{a}}$$

est un isomorphisme de A sur l'algèbre topologique produit $\prod_{a\in\mathbf{a}} A.a$.

Preuve. Soit $(A_i, (\pi_i^j)_{j\geq i})_{i,j\in I}$ le système projectif de $(A, (P_i)_{i\in I})$, M_i (qui s'identifie à $M(A_i)$) est un sous-ensemble compact de $M(A)$, donc l'ensemble $\mathbf{a}_i = \{a \in \mathbf{a}/O_a \cap M_i \neq \emptyset\}$ est fini, ainsi pour tout élément a de $\mathbf{a}\setminus\mathbf{a}_i$, $O_{\pi_i(a)} = \emptyset$, donc $\pi_i(a) = 0$ d'où $P_i(a) = 0$ (car, $ker(\pi_i) = (P_i)^{-1}(\{0\})$) donc pour tout $a \in \mathbf{a} \setminus \mathbf{a}_i$, $P_i(a) = 0$, ainsi pour toute famille $(y_a)_{a\in\mathbf{a}}$ d'éléments de A, $\sum_{a\in\mathbf{a}} y_a.a$ est sommable, et $O_{\sum_{a\in\mathbf{a}} a} = M(A)$, d'où $\sum_{a\in\mathbf{a}} a = e$, donc pour tout

$$(y_a.a)_{a\in\mathbf{a}} \in \prod_{a\in\mathbf{a}} A.a \text{ , l'élément } y = \sum_{a\in\mathbf{a}} y_a.a$$

est l'unique élément de A vérifiant $\Phi(y) = (y_a.a)_{a\in\mathbf{a}}$.

La continuité de Φ est assurée par la continuité des applications :

$$A \longrightarrow A.a;\ x \to x.a \quad (a \in A),$$

la continuité de Φ^{-1} résulte du fait que pour tout $x \in A$ et tout $i \in I$,

$$P_i(x) = P_i(x.\sum_{a\in\mathbf{a}} a) = P_i(x.\sum_{a\in\mathbf{a}_i} a) \leq \sum_{a\in\mathbf{a}_i} P_i(x.a).$$ ∎

Suivant E.A. Michael [9], on dira qu'une algèbre m-convexe A est de Fréchet si elle est métrisable et complète. Si de plus A est unitaire et le sous-ensemble des éléments inversibles est ouvert on dira que A est une Q-algèbre de Fréchet, ceci est équivalent au fait que $M(A)$ est compact ([9, Th. 13.6]). Il est claire que l'espace de caractères d'un produit dénombrable d'algèbres de Fréchet unitaires est réunion de sous-ensembles compact-ouverts, le résultat suivant montre que la réciproque est vraie (ceci caractérise la classe d'algèbres donnée dans [5, Lemme 2]).

PROPOSITION 1. *Soit A une algèbre de Fréchet unitaire telle que $M(A) = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} L_n$, où L_n $(n \in \mathbf{N})$ est un sous-ensemble compact et ouvert dans $M(A)$; alors A est un produit dénombrable des Q-algèbres de Fréchet unitaires.*

Preuve. On peut supposer que pour $n \neq m$, $L_n \cap L_m = \emptyset$. Il existe d'après le Lemme 1, une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans A telle que $O_{a_n} = L_n$, et le Lemme 2, montre que A est isomorphe à $\prod_{n\in\mathbf{N}} A.a_n$, et $M(A.a_n) = L_n$ (qui est compact), ainsi $A.a_n$ est une Q-algèbre de Fréchet unitaire. ∎

Rappelons d'abord qu'un sous-ensemble $\mathbf{a}$ de A est dit total si le sous-espace vectoriel engendré par $\mathbf{a}$ (span($\mathbf{a}$)) est dense dans A. Et on dira qu'une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est une base de A si pour tout $a \in A$ il existe une suite unique de scalaires $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ telle que $a = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n$. Suivant [8] on dira que la base $(a_n)_{n\geq 1}$ est orthogonale si $(a_n)_{n\geq 1} \subseteq id_A$ et si $a_n a_m = 0$ pour $m \neq n$.

PROPOSITION 2. *Soit* $(A, (P_i)_{i\in I})$ *une algèbre m-convexe, unitaire complète, s'il existe* $\mathbf{a} \subseteq id_A$ *orthogonal et total, alors* A *est isomorphe canoniquement à* $\mathbf{C}^{\mathbf{a}}$ *et on a* $\mathrm{card}(\mathbf{a}) = \mathrm{card}(M(A))$.

Preuve. Si $a \in \mathbf{a}$, $\mathrm{card}(O_a) = 1$; donc la correspondance :

$$\mathbf{a} \longrightarrow M(A);\ a \to \phi_a \text{ telle que } \phi_a \in O_a$$

est une application bijective, ainsi $\mathrm{card}(\mathbf{a}) = \mathrm{card}(M(A))$.

D'autre part, l'homomorphisme : $A.a \longrightarrow \mathbf{C};\ x.a \to \phi_a(x)$, est un isomorphisme ; donc $\prod_{a\in\mathbf{a}} \mathbf{C}$ est isomorphe à $\prod_{a\in\mathbf{a}} A.a$ qui est isomorphe à A (Lemme 2). ∎

Remarques 2. 1) Dans les conditions de la deuxième Proposition, l'application $\Phi : \mathbf{C}^{\mathbf{a}} \longrightarrow A;\ (\lambda_a)_{a\in\mathbf{a}} \to \sum_{a\in\mathbf{a}} \lambda_a a$ est un isomorphisme de l'algèbre topologique produit $\mathbf{C}^{\mathbf{a}}$ sur A.

2) Nous déduisons directement de la Proposition 2, que $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ est la seule algèbre m-convexe unitaire complète dont il existe une suite d'éléments de id_A orthogonale totale ; ainsi la Proposition 2, généralise, d'une part, le Théorème 1.7 de [11] de H. Render (donné dans le cas métrisable), les Théorèmes 3.3, et 3.4 de [8]), et la Proposition 3.6 de [1] qui caractérisent la classe d'algèbres de Fréchet à base $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant la condition (P) : $a_{n+1} = a_n.a_{n+1}$ et $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (en remarquant que le sous-ensemble $\{a_{n+1} - a_n /\ n \geq 1\}$ est orthogonal, total et formé par des idempotents). Notre résultat caractérise aussi les algèbres à base vérifiant (P) dans le cas non métrisable, ce qui clarifie les résultats du [2, §1].

3. ALGÈBRES FAIBLEMENT TOPOLOGISÉES

Parmi les hypothèses essentielles qu'on rencontre, implicitement ou explicitement, dans les résultats précédants (Lemme 2, Proposition 2, [1], [2], [6], [7], [8]) le fait d'avoir un sous-ensemble (total) $\mathbf{a}$ tel que pour tout $i \in I, \{a \in \mathbf{a}/\ P_i(a) \neq 0\}$ est fini. Nous donnons, dans ce paragrahe (Lemme 3), des conditions équivalentes à cette hypothèse et nous caractérisons dans le Théorème 1, les algèbres (semi-simples) satisfaisant ces conditions.

Soit $(E, (P_i)_{i\in I})$ un espace vectoriel localement-convexe complet, E' son dual topologique et E_i est le complété de $E/(P_i)^{-1}(\{0\})$, on a :

$$E = \varprojlim (E_i, (\pi_i^j)_{i\leq j})_{i,j\in I}$$

Lemme 3. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) *Pour tout $i \in I$, E_i est de dimension finie.*

b) *Il existe un sous-ensemble $\mathbf{a}$ de E total tel que pour tout $i \in I$, l'ensemble $\{a \in \mathbf{a} / P_i(a) \neq 0\}$ est fini.*

c) *E est muni de la topologie faible.*

d) *E est isomorphe à $\mathbf{C}^X$, où X est une base, au sens algébrique, de l'espace vectoriel E'.*

Preuve. a) $\Rightarrow$ c) Si E_i est de dimension fini, la topologie de E_i est la topologie faible définie par le dual $(E_i)'$ de E_i, donc le sous-ensemble $\{fo\pi_i \ / f \in (E_i)', i \in I\}$ de E' définit la topologie de E.

b) $\Rightarrow$ a) $\overline{\mathrm{span}(\mathbf{a})} = E$ donc $\overline{\mathrm{span}(\pi_i(\mathbf{a}))} = E_i$, et $\pi_i(\mathbf{a})$ est fini, par suite $\mathrm{span}(\pi_i(\mathbf{a}))$ est de dimension finie, ainsi $\mathrm{span}(\pi_i(\mathbf{a})) = E_i$ et E_i est de dimension finie.

c) $\Leftrightarrow$ d) Conséquence de [4, §6, (n°6, Corollaire 2) et (n°7, Proposition 9)].

d) $\Rightarrow$ b) Est évidente. ∎

Le résultat suivant caractérise les algèbres localement convexes faiblement topologisée.

Théorème 1. *Soit $(A, (P_i)_{i\in I})$ une algèbre localement-convexe complète vérifiant les conditions du Lemme 3 ; alors on a :*

i) *$A/\mathrm{Rad}(A)$ est isomorphe à $\mathbf{C}^{M(A)}$, et $\mathrm{card}(M(A)) \leq \mathrm{card}(\mathbf{N})\mathrm{card}(I)$.*

ii) *S'il existe $\mathbf{a} \subseteq id_A$ total, A est isomorphe à $\mathbf{C}^{M(A)}$ et on a :*

$$\mathrm{card}(M(A)) \leq \min\{\mathrm{card}(\mathbf{N})\mathrm{card}(I), \mathrm{card}(\mathbf{a})\}.$$

Preuve. i) A est munie de la topologie faible (Lemme 3, c)), le Théorème 1 de [13], montre que A est m-convexe et le Lemme 3, nous permet de supposer que $(A, (P_i)_{i\in I})$ est m-convexe complète telle que pour tout $i \in I$, A_i est de dimension finie. Le Lemme 1, montre que $M(A)$ est muni de la topologie discrète, donc l'ensemble défini par $\mathbf{a} = \{a \in id_A / \mathrm{card}(O_a) = 1\}$ vérifie les conditions du Lemme 2, ainsi A est isomorphe à $\prod_{a\in\mathbf{a}} A.a$, $\mathrm{Rad}(A) = \prod_{a\in\mathbf{a}} \mathrm{Rad}(A.a)$, et on a les isomorphismes suivants :

$$A/\mathrm{Rad}(A) \cong \prod_{a\in\mathbf{a}} A.a / \prod_{a\in\mathbf{a}} \mathrm{Rad}(A.a) \cong \prod_{a\in\mathbf{a}} (A.a/\mathrm{Rad}(A.a))$$

et $A.a/\mathrm{Rad}(A.a) \cong \mathbf{C}$, d'où $A/\mathrm{Rad}(A)$ est isomorphe à $\mathbf{C}^{M(A)}$. D'autre part, $\mathrm{card}(M(A)) \leq \sum_{i\in I} \mathrm{card}(M_i) \leq \mathrm{card}(\mathbf{N})\mathrm{card}(I)$.

ii) D'après i) $A/\mathrm{Rad}(A)$ est isomorphe à $\mathbf{C}^{M(A)}$; donc il suffit de montrer que A est semi-simple. Pour tout $i \in I,\ A_i$ est une algèbre de dimension finie dont $\pi_i(\mathbf{a})$ est total, donc A_i est semi-simple, ainsi d'après la Proposition 7.3 de [9], A est semi-simple.

Soit $\mathbf{b} \subseteq \mathbf{a}$ une base de span($\mathbf{a}$), $\mathbf{C}^{(\mathbf{b})}$ est un dual topologique de span($\mathbf{b}$), ainsi $\mathbf{C}^{(\mathbf{b})}$ est un dual topologique de A et d'après le Lemme 3, l'espace localement-convexe sous-jacent de A est isomorphe à l'espace localement-convexe $\mathbf{C}^{\mathbf{b}}$, ainsi il existe un sous-ensemble J de I cofinal à I tel que $\mathrm{card}(J) = \mathrm{card}(\mathbf{b})$, et d'après i) :

$$\mathrm{card}(M(A)) \leq \mathrm{card}(\mathbf{N})\mathrm{card}(J) \leq \mathrm{card}(\mathbf{N})\mathrm{card}(\mathbf{a})$$

si A est de dimension finie alors $\mathrm{card}(M(A)) = dim(A) \leq \mathrm{card}(\mathbf{a})$, sinon $\mathbf{a}$ sera infini donc $\mathrm{card}(\mathbf{a}) = \mathrm{card}(\mathbf{N})\mathrm{card}(\mathbf{a})$. Ainsi dans tous les cas on a $\mathrm{card}(M(A)) \leq \mathrm{card}(\mathbf{a})$. ∎

Corollaire 1. *Soit $(A, (P_i)_{i\in I})$ une algèbre localement-convexe complète ; s'il existe un sous-ensemble $\mathbf{a}$ de id_A total tel que pour tout $i \in I$, l'ensemble $\{a \in \mathbf{a}/P_i(a) \neq 0\}$ est fini. alors A est isomorphe à $\mathbf{C}^{M(A)}$ et on a $\mathrm{card}(M(A)) \leq \min\{\mathrm{card}(\mathbf{N})\mathrm{card}(I), \mathrm{card}(\mathbf{a})\}$.*

Remarques 3. 1) Le corollaire 1, est équivalent à ii) du Théorème 1, ainsi il existe $\mathbf{a} \subseteq id_A$ orthogonal total et si A est de dimension infinie on a :

$$\mathrm{card}(M(A)) = \inf\{\mathrm{card}(J)/\ (P_i)_{i\in J} \text{ définit la toplogie de } A\}$$
$$= \inf\{\mathrm{card}(\mathbf{b})/\ \mathbf{b} \subseteq id_A \text{ total}\} = \mathrm{card}(\mathbf{a})$$

2) Dans le cas m-convexe les conditions du corollaire 1, et de la Proposition 2, sont équivalantes, ceci n'est vrai que dans le cas m-convexe, même si l'algèbre est métrisable (exemple 3).

Exemple 1. Soit $B = \mathbf{C}[[Z]]$ l'algèbre des séries formelles munie de la topologie faible, soit $A = B^{\mathbf{N}}$ munie de la topologie faible.

L'algèbre A n'est pas semi-simple, et on a,

$$\mathrm{Rad}(A) = (Z.B)^{\mathbf{N}} \text{ et } A/\mathrm{Rad}(A) = (B/ZB)^{\mathbf{N}} = \mathbf{C}^{\mathbf{N}}.$$

Exemple 2. Soit $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{\mathrm{n}}/n \in \mathbf{N}^*\}$ muni de la topologie induite par celle de $\mathbf{R}$, $A = C(X)$ l'algèbre des applications complexes continues sur X nulles en zéro et $\mathbf{a}$ le sous-ensemble de A défini par :

$$\mathbf{a} = \left\{e_n/\ e_n :\ X \longrightarrow \mathbf{C},\ e_n\left(\frac{1}{\mathrm{m}}\right) = 0 \text{ si } m \neq n,\ \text{ et } e_n\left(\frac{1}{\mathrm{n}}\right) = 1\right\}.$$

On a $(A, \| \|_\infty)$ est une algèbre de Banach, $M(A) = X$, $\mathbf{a} \subseteq id_A$ orthogonal et total, mais A n'est pas isomorphe à $\mathbf{C}^X$, ainsi la Proposition 2, n'est pas vraie sur les algèbres non unitaires.

Exemple 3. (Voir [10] où [11]) Soit $\mathbf{C}\_ = \mathbf{C} \setminus [\mathbf{1}, \infty[$ et $A = \mathbf{H}(\mathbf{C}\_)$ l'espace des fonction holomorphes sur $\mathbf{C}\_$ muni de la toplogie de la convergence uniforme sur les compacts ; soit $*$ le produit d'Hadamard sur A (le produit $*$ est défini localement sur un disque de centre zéro par $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n) * (\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$) ; alors A est une algèbre unitaire localement-convexe métrisable complète à suite orthogonale totale $(z^n)_{n \in \mathbf{N}^*} \subseteq id_A$, mais A n'est pas isomorphe à $\mathbf{C}^{M(A)}$. Ainsi la Proposition 2, n'est pas vraie dans le cas non m-convexe.

Références

[1] Akkar, M., Elazhari, M., Oudadess, M., Théorèmes de structure sur certaines algèbres de Fréchet, *Ann. Sc. Math. Québec,* **11** (2) (1987), 245 – 252.

[2] Akkar, M., Elazhari, M., Oudadess, M., Continuité des caractères dans les algèbres de Fréchet à bases, *Canad. Math. Bull.,* **31** (2) (1988), 168 – 174.

[3] Bonsall, F.F., Duncan, J., "Complete Normed Algebras", Springer-Verlag, 1973.

[4] Bourbaki, N., "Espace vectoriels topologiques", Chap. I et II, Fascicule XV, 1999.

[5] Goldmann, H., A remark on functional continuity of certain Fréchet algebras, *Studia Mathematica,* **XCIII** (1989), 249 – 257.

[6] Husain, T., Liang, J., Multiplicative functionals on Fréchet algebras with bases, *Canadian. Math. J.,* **2** (1977), 270 – 276.

[7] Husain, T., Liang, J., Continuity of multiplicative linear functionals on Fréchet algebras with bases, *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège,* **46** (1977), 8 – 11.

[8] Husain, T., Watson, S., Topological algebras with orthogonal bases, *Pacific J. Math.,* **91** (1980), 339 – 347.

[9] Michael, E.A., "Locally Multiplicatively Convex Topological Algebras", Mem. Amer. Math. Soc., 11, 1952.

[10] Render, H., Sauer, A., Algebras of holomorphic functions with Hadamard multiplication, *Studia Math.,* **118** (1996), 77 – 100.

[11] Render, H., Topological algebras with orthogonal total sequence, *Colloq. Math.,* **72** (2) (1997), 215 – 221.

[12] Shilov, G., On decomposition of a commutative normed ring in direct sum of ideals, *Math. Sb.,* **32** (1959), 353 – 364.

[13] WARNER, S., Weakly topologized algebras, *Proc. of the A.M.S,* **8** (1957), 314 – 316.