EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. **14**, Núm. 3, 349 – 354 (1999)

m-Convexité dans le Corps $\mathbb{C}(X)$

R. Choukri

Département de Mathématiques. Ecole Normale Supérieure, Takaddoum. B.P. 5118. 10105 *Rabat, Maroc*

(Research paper presented by J. Galé)

AMS *Subject Class.* (1991): 46J30, 46H99 *Received September* 30, 1998

1. Introduction

Soit $\mathbb{C}(X)$ le corps des fractions de l'algèbre $\mathbb{C}[X]$ des polynômes à coefficients complexes. On sait que toute algèbre complexe, autre que $\mathbb{C}$, qui est un corps contient un sous-corps isomorphe à $\mathbb{C}(X)$. Dans cette note, nous nous intéressons aux sous-algèbres de ce dernier. Nous montrons que toute sous-algèbre de $\mathbb{C}(X)$, qui n'est pas un corps, peut être normée. Par ailleurs, aucune sous-algèbre de $\mathbb{C}(X)$, contenant $\mathbb{C}[X]$, ne peut être munie d'une topologie d'a. l. m. c. séquentiellement complète. Et par conséquent, le corps $\mathbb{C}(X)$ ne peut être limite inductive topologique d'a. l. m. c. séquentiellement complètes.

2. Préliminaires

Soit A une algèbre unitaire. Le spectre d'un élément x de A est $\mathrm{Sp}_A(x) = \{\lambda \in \mathbb{C}, : x - \lambda e \notin G(A)\}$, où e est l'unité de A et $G(A)$ le groupe de ses éléments inversibles. Le rayon spectrale de x est $\rho_A(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \mathrm{Sp}_A(x)\}$.

Soit τ une topologie d'algèbre sur A. On dit que (A, τ) est une $F-$algèbre si τ est metrisable et complète. Si de plus, τ est localement convexe, (A, τ) sera dite une B_0-algèbre. On dit que (A, τ) est une algèbre localement multiplicativement convexe (a. l. m. c.) si τ peut être définie par une famille de semi-normes $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ sous-multiplicatives, i.e.,

$$p_\lambda(xy) \le p_\lambda(x)p_\lambda(y),\ \forall x, y \in A,\ \forall \lambda \in \Lambda.$$

Une telle algèbre est aussi notée $(A, (p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$. Une a. l. m. c. qui est une $F-$algèbre est dite une a. l. m. c. de Fréchet. Un élément x d'une algèbre topologique metrisable A est dit un diviseur topologique de zéro (d. t. z.) s'il existe une suite $(x_n)_n$ de A, ne tendant pas vers 0 et tel que la suite $(xx_n)_n$ tend vers 0. Ce qui équivaut à dire que l'application f définie de A vers xA par $f(y) = xy$ n'est pas un homéomorphisme. Pour plus de détails sur ces notions topologiques, voir [7].

3. Normabilité des sous-algèbres de $\mathbb{C}(X)$

Par le théorème de Gelfand-Mazur, le corps $\mathbb{C}(X)$ ne peut être normé. Quant à ces sous-algèbres, la situation est différente comme le montre le théorème suivant

Théorème 3.1. *Toute sous-algèbre A de $\mathbb{C}(X)$, qui n'est pas un corps, peut être normée.*

Preuve. Examinons d'abord le cas où $A = \mathbb{C}[X]_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$, où $\mathbb{C}[X]_\lambda$ est la sous-algèbre de $\mathbb{C}(X)$ formée des x qui s'écrivent $x = P(X)/Q(X)$ avec $Q(\lambda)$ non nul. Soit B une algèbre de Banach unitaire intègre et non semi-simple (e.g. l'algèbre de convolution obtenue par adjonction d'une unité à $\mathrm{L}^1[0, 1]$). Soit $x \in \mathrm{Rad}\,(B)$, non nul. Alors il n'est pas algébrique. Car, sinon, il existe un polynôme $P(X)$, de terme constant non nul, et un entier naturel n tel que $x^n P(x) = 0$. Comme $x \in \mathrm{Rad}\,(B)$, $P(x)$ est inversible. Donc $x^n = 0$ et par suite $x = 0$, ce qui n'est pas le cas. Par ailleurs, $\mathrm{Sp}_B(x+\lambda e) = \{\lambda\}$. Donc, pour tout polynôme $P(X)$ vérifiant $P(\lambda) \neq 0$, $P(y)$ est inversible, où $y = x + \lambda e$. Considérons alors l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X]_\lambda & \xrightarrow{\varphi} & B \\ P(X)/Q(X) & \longrightarrow & P(y)Q(y)^{-1} \end{array}$$

On montre facilement que φ est un morphisme d'algèbres. De plus, il est injectif puisque y n'est pas algébrique. Donc $\mathbb{C}[X]_\lambda$ est isomorphe (algébriquement) à une sous-algèbre de B. D'où l'existence d'une norme d'algèbre sur $\mathbb{C}[X]_\lambda$. Considérons ensuite le cas où $\mathbb{C}[X] \subset A$. Comme A n'est pas un corps, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $X - \lambda$ n'est pas inversible dans A. Il en résulte que A est contenue dans $\mathbb{C}[X]_\lambda$. Et on conclut par le premier cas. Passons maintenant au cas où A est une algèbre de valuation [2, Théorème 1 assertion c), p.85 et Définition 2, p.87]. Soit $\mathbb{K}$ le corps des fractions de A. D'après [6, Théorème I.8, p.185], il existe $x \in \mathbb{K}$ tel que $\mathbb{K} = \mathbb{C}(x)$. On peut supposer que $x \in A$, quitte à considérer, dans le cas contraire, l'élément x^{-1}. Ainsi on aura $\mathbb{C}[x] \subset A \subset \mathbb{C}(x)$.

Par ailleurs, il est facile de montrer que x n'est pas algébrique. D'où l'existence d'un isomorphisme d'algèbres ψ de $\mathbb{C}(x)$ sur $\mathbb{C}(X)$ tel que $\psi(x) = X$. Donc on a $\mathbb{C}[X] \subset \psi(A) \subset \mathbb{C}(X)$. Par le cas précédent, $\psi(A)$ est normée. D'où A est normée. Passons maintenant au cas général. On peut supposer que A est unitaire quitte à considérer $A+\mathbb{C}$. D'après [2, Théorème 3, p.88], il existe une algèbre de valuation, pour $\mathbb{K}$, la contenant. Et on conclut par ce qui précède. ∎

Remarque 3.2. On peut se demander si, étant donnée une sous-algèbre A qui n'est pas un corps de $\mathbb{C}(X)$, il existe une norme d'algèbre de Banach sur A. La réponse est négative. En effet, l'algèbre $\mathbb{C}[X]$, qui est de dimension dénombrable, ne peut être munie d'aucune norme complète.

4. Sous-algèbres de $\mathbb{C}(X)$ et $m-$convexité

Nous commençons par deux lemmes, d'intérêt général, dont on fera usage par la suite. Rappelons d'abord qu'une algèbre commutative unitaire intègre est dite principale si chacun de ses idéaux peut être engendré par un seul élément.

LEMME 4.1. *Soit A une F-algèbre principale. Alors :*

(1) *A n'admet pas de d. t. z non nuls.*
(2) *Le groupe des éléments inversibles de A est ouvert.*

Preuve. (1) Supposons que A admet un d. t. z. non nul. Considérons a un tel élément et dont le nombre de diviseurs premiers est minimal [1, VII, Théorème, p.3]. Soit p un diviseur premier de a. Il existe $b \in A$, non divisible par p, et un entier k tel que $a = p^k b$. Soit $(x_n)_n$ une suite de A, ne convergeant pas vers 0, telle que (ax_n) converge vers 0. Comme b n'est pas un d. t. z, la suite $(p^k x_n)$ tend vers 0. Soit

$$l = \min\{m \in \mathbb{N} : \lim_{n\to\infty} p^m x_n = 0\}.$$

Supposons que $l \neq 0$. Alors la suite $(p^{l-1}x_n)$ ne tend pas vers 0. Donc p est un d. t. z. Comme l'idéal pA est maximal, il est dense. Le théorème de Mittag-Leffler [3, Théorème 5.3, p.147], appliqué à la suite d'applications $(f_n)_n$ définie sur A par $f_n(x) = p^n x$, montre que l'idéal $\bigcap_{n\geq 0} p^n A$ est dense. Ce qui est impossible car $\bigcap_{n\geq 0} p^n A = \{0\}$. Ainsi $l = 0$ et $\lim_n x_n = 0$; ce qui n'est pas le cas.

(2) Supposons que le groupe des éléments inversibles de A n'est pas ouvert. Alors il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments non inversibles de A tel que $\lim_n x_n = e$, où e est l'unité de A. Considérons une distance d définissant la topologie de A et pour laquelle A est complète. En procédant de la même façon que dans [5, Proposition 2.1, p.188], on extrait une suite $(x_{n_k})_k$ de la suite $(x_n)_n$ vérifiant :

i) $d(e, x_{n_k}) \leq 2^{-k}, \quad (k \geq 1)$.
ii) $d(x_{n_k}...x_{n_{p-1}}, x_{n_k}...x_{n_p}) \leq 2^{-p}, \quad (p \geq 2, 1 \leq k \leq p-1)$.

En effet, l'existence de x_{n_1} découle du fait que $(x_n)_n$ converge vers e. Supposons que $x_{n_1}, ..., x_{n_{p-1}}$ construits. Alors l'existence de x_{n_p} provient de la continuité en e de l'application f définie de A vers A^{p-1} par $f(y) = (x_{n_1}...x_{n_{p-1}}y, x_{n_2}...x_{n_{p-1}}y, ..., x_{n_{p-1}}y)$. La condition ii) entraîne que, pour tout $k \geq 1$, la suite $(x_{n_k}...x_{n_p})_{p \geq k}$ converge vers un élément $e_k \in A$. D'autre part, pour $k \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} d(e_k, e) &\leq d(e, x_{n_k}) + \sum_{p \geq k} d(x_{n_k}...x_{n_p}, x_{n_k}...x_{n_{p+1}}) \\ &\leq 2^{-k} + \sum_{p \geq k} 2^{-p-1} \leq 2^{-k+1}. \end{aligned}$$

Ainsi $(e_n)_n$ converge vers e. Comme $e_k = x_{n_k} e_{k+1}$, la suite d'idéaux $(Ae_k)_k$ est croissante. Il existe alors k_0 tel que $Ae_k = Ae_{k_0}$ pour tout $k \geq k_0$, vu que A est principale. Il en résulte que l'idéal Ae_{k_0} est dense dans A. Par ailleurs, par 1), e_{k_0} n'est pas un d. t. z. Donc Ae_{k_0} est homéomorphe à A. Il s'en suit que Ae_{k_0} est fermé. D'où $Ae_{k_0} = A$. Donc e_{k_0} est inversible dans A. Ce qui est absurde car $x_{n_{k_0}}$ n'est pas inversible dans A. ∎

Lemme 4.2. *Soit $(A, (p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ une a. l. m. c. commutative. Alors pour tout $x \in A$ vérifiant $\rho_A(x) < \infty$, il existe une famille de semi-normes $(q_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, sous-multiplicatives, définissant la topologie de A et vérifiant de plus, $\sup_{\lambda \in \Lambda} q_\lambda(x) < \infty$.*

Preuve. Soit $\alpha > 0$ tel que $\rho_A(x) < \alpha$. Pour $\lambda \in \Lambda$, soit $(\tilde{A}_\lambda, \tilde{p}_\lambda)$ l'algèbre de Banach complétée de l'algèbre normée $(A/N_\lambda, p_\lambda)$ où $N_\lambda = \{x \in A \colon p_\lambda(x) = 0\}$. Soit Π_λ l'injection canonique de A dans $\tilde{A}_\lambda$. On a $\mathrm{Sp}_{\tilde{A}_\lambda}(\Pi_\lambda(x)) \subset \mathrm{Sp}_A(x)$. Donc $\rho_{\tilde{A}_\lambda}(\Pi_\lambda(x)) \leq \rho_A(x) < \alpha$. D'après [9, Théorème 12.7, p.53], il existe une norme d'algèbre $\tilde{q}_\lambda$ sur A_λ équivalente à $\tilde{p}_\lambda$ tel que $\tilde{q}_\lambda(\Pi_\lambda(x)) \leq \alpha$. Pour tout $y \in A$, posons $q_\lambda(y) = \tilde{q}_\lambda(\Pi_\lambda(y))$. Alors $(q_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est la famille cherchée. ∎

Voici maintenant le résultat principal de ce paragraphe.

THÉORÈME 4.3. *Aucune sous-algèbre A de $\mathbb{C}(X)$, contenant $\mathbb{C}[X]$, ne peut être munie d'une topologie d' a. l. m. c. de Fréchet.*

Preuve. Supposons qu'il existe une topologie d'a. l. m. c. de Fréchet sur A. Soit $(p_n)_n$ une famille de semi-normes sous-multiplicatives la définissant. Par (2) du lemme 4.1, le groupe des éléments inversibles de A est ouvert. Donc $\rho_A(X) < \infty$. Ensuite, d'après le lemme 4.2, il existe une famille de semi-normes $(q_n)_n$, sous-multiplicatives, définissant la topologie de A et vérifiant $\sup_n q_n(X) < \infty$. Considérons maintenant $E = \{x \in A\colon q(x) = \sup_n q_n(x) < \infty\}$. Alors (E, q) est une algèbre de Banach telle que $\mathbb{C}[X] \subset E \subset \mathbb{C}(X)$. Par ailleurs, il n'est pas difficile de montrer que toute sous-algèbre de $\mathbb{C}(X)$, contenant $\mathbf{C}[X]$, est principale. Donc, par le lemme 4.1, E n'admet pas de d. t. z non nuls. D'après [9, Théorème 14.4, p.58], E est isomorphe à $\mathbb{C}$. Ce qui n'est pas le cas. ∎

Comme conséquence, nous obtenons le :

COROLLAIRE 4.4. *Aucune sous-algèbre A de $\mathbb{C}(X)$, contenant $\mathbb{C}[X]$, ne peut être munie d'une topologie de B_0-algèbre.*

Preuve. Supposons qu'une telle topologie existe. Par le lemme 4.1, le groupe des éléments inversibles de A est ouvert. De plus, l'inverse est continu. Donc, d'après [8, Théorème, p.1686], A est une a. l. m. c. Et on conclut par le théorème 4.3. ∎

En s'inspirant d'une idée de P. G. Dixon et D. H. Fremlin [4], nous obtenons également le :

COROLLAIRE 4.5. *Aucune sous-algèbre A de $\mathbb{C}(X)$, contenant $\mathbb{C}[X]$, ne peut être munie d'une topologie d'a. l. m. c. séquentiellement complète.*

Preuve. Supposons qu'une telle topologie existe et soit $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de semi-normes sous-multiplicatives la définissant. Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in A$, on pose $\Lambda_n = \{\lambda \in \Lambda\colon p_\lambda(X) \leq n\}$ et $q_n(x) = \sup_{\lambda\in\Lambda_n} p_\lambda(x)$. Considérons $E = \{x \in A\colon q_n(x) < \infty\ \forall n\}$. Alors $(E, (q_n)_n)$ est une a. l. m. c. de Fréchet contenant $\mathbb{C}[X]$ et contenue dans $\mathbb{C}(X)$. Ce qui contredit le théorème 4.3. ∎

Comme conséquence, nous obtenons le :

Corollaire 4.6. *Le corps $\mathbb{C}(X)$ ne peut être une limite inductive topologique d'a. l. m. c. unitaires séquentiellement complètes.*

Remerciements

L'auteur remercie vivement les professeurs M. Oudadess et A. El kinani pour les discussions fructueuses lors de la préparation de ce travail.

Références

[1] Bourbaki, N., "Algèbre", Chapitres 4 à 7 , Masson, Paris, 1981.

[2] Bourbaki, N., "Algèbre Commutative", Chapitres 5 à 7 , Masson, Paris, 1985.

[3] Dales, H.G., Automatic continuity, *Bull. London Math. Soc.,* **10** (1978), 129 – 183.

[4] P. G. Dixon, P.G., Fremlin, D.H., A remark concerning multiplicative functionals on l. m. c. algebras, *J. London. Math. Soc. (2),* **5** (1972), 231 – 232.

[5] Esterle, J., Idéaux maximaux denses dans les algèbres de Fréchet, *Bull. Sci. Math.,* **119** (1995), 187 – 194.

[6] Lafon, J.P., "Algèbre Commutative". (Langages Géométrique et Algébrique), Hermann, Paris, 1977.

[7] Michael, E.A., "Locally Multiplicatively-convex Topological Algebras", Mem. Amer. Math. Soc. 11, 1952.

[8] Turpin, P., Une remarque sur les algèbres à inverse continu, *C.R. Acad. Sc. Paris,* **270** Série A (1970), 1686 – 1689.

[9] Zelazko, W., "Banach Algebras", PWN-Polish Scientific Publishers X, Warszawa, 1973.