EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. **14**, Núm. 3, 329 – 332 (1999)

Théorie Spectrale Locale Appliquée aux Opérateurs Shifts

M. Houimdi et H. Zguitti

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences Semlalia,
BP S15, *Marrakech* 40000, *Maroc*

(Research paper presented by M. González)

AMS *Subject Class.* (1991): 47A10, 47B37 *Received November* 23, 1998

1. Introduction

Soient H un espace de Hilbert séparable complexe de dimension infinie et $\mathcal{L}(H)$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur H. On désigne par $H^{(\infty)}$ la somme directe hilbertienne d'une infinité dénombrable de copies de H. Rappelons que $H^{(\infty)} = \{(x_n)_{n\geq 0} \,:\, \forall n \geq 0, x_n \in H \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty}\|x_n\|^2 < \infty\}$ et qu'à tout opérateur linéaire borné $T : H^{(\infty)} \longrightarrow H^{(\infty)}$ est associé une matrice $(T_{n,m})_{n,m\geq 0}$ à coéfficient dans $\mathcal{L}(H)$.

Un opérateur $T : H^{(\infty)} \longrightarrow H^{(\infty)}$ est dit un *shift à poids opérateurs* de poids $(T_n)_{n\geq 0}$, si:

(i) $\sup\limits_{n\geq 0}\|T_n\| < \infty$, et

(ii) Pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0}$ de $H^{(\infty)}$, $Tx = (0,T_0x_0,T_1x_1,\ldots,T_nx_n,\ldots)$.

Donc la matrice d'un tel opérateur s'écrit sous la forme

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ T_0 & 0 & & & \\ 0 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & 0 & T_n & 0 & \cdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Dans [2] et dans le cas où les poids sont tous inversibles, l'auteur a montré que le spectre est égal au disque de centre 0 et de rayon $r(T)$. Récemment, dans [3], une description du spectre a été faite dans le cas où les poids sont limites d'opérateurs inversibles et les auteurs ont conjecturé que le spectre est toujours un disque centré à l'origine. Dans cet article, en utilisant les techniques de la théorie spectrale locale, on va donner une réponse affirmative à cette conjecture.

2. Quelques rappels sur la théorie spectrale locale

Soient T un opérateur linéaire borné sur un Banach X. $\sigma(T)$ et $r(T)$ désignent respectivement le spectre et le rayon spectral de T. Soit $x \in X$, on note par $\rho_T(x)$ l'*ensemble résolvant local* de T en x défini comme réunion de tous les ouverts de $\mathbb{C}$ sur lesquels $(T-\mu)f(\mu) = x$ admet une solution analytique. Le *spectre local* de T en x est $\sigma_T(x) = \mathbb{C} \setminus \rho_T(x)$, [6]. Donc $\lambda \notin \sigma_T(x)$ s'il existe un voisinage ouvert V de λ et $f : V \longrightarrow X$ analytique tels que $(T-\mu)f(\mu) = x, \forall \mu \in V$. Nous signalons que $\sigma_T(x)$ est fermé contenu dans $\sigma(T)$. Si f est la fonction nulle sur $\mathbb{C}$, alors $(T-\mu)f(\mu) = 0, \forall \mu \in \mathbb{C}$ et donc $\sigma_T(0) = \emptyset$.

A l'aide du théorème de l'application ouverte, [4] a montré que $\sigma_s(T) = \bigcup_{x\in X} \sigma_T(x)$, où $\sigma_s(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T-\lambda)(X) \neq X\}$ le *spectre de surjectivité* de T. Puisque $\sigma_T(0) = \emptyset$, la réunion sera portée sur les x non nuls.

On dit que T satisfait la *propriété de l'extension unique* (notée briévement SVEP) s'il n'existe pas d'ouvert de $\mathbb{C}$ sur lequel l'équation $(T-\mu)f(\mu) = 0$ admet une solution analytique non nulle [1]. D'après [4], si T satisfait la SVEP on aura $\sigma(T) = \sigma_s(T)$.

3. Le résultat principal

Théorème 3.1. *Soit T un shift à poids opérateurs quelconques, alors*

$$\sigma(T) = \{\lambda : |\lambda| \leq r(T)\}.$$

Pour la preuve de ce théorème, on aura besoin des lemmes suivants.

Lemme 3.1. *Soit T un shift à poids opérateurs de poids $(T_n)_{n\geq 0}$ quelconques. Alors $0 \in \sigma_T(x)$ pour tout $x \in H^{(\infty)}$ non nul.*

Démonstration. Soit $x = (x_n)_{n\geq 0} \in H^{(\infty)}$ non nul tel que $0 \notin \sigma_T(x)$. Il existe donc $f : V \longrightarrow H^{(\infty)}$ analytique sur V, un voisinage ouvert connexe de 0, telle que $(T-\mu)f(\mu) = x, \forall \mu \in V$. Si $f(\mu) = (f_n(\mu))_{n\geq 0}$, on aura

$$\begin{cases} -\mu f_0(\mu) = x_0 & \forall \mu \in V \\ T_{n-1}f_{n-1}(\mu) - \mu f_n(\mu) = x_n & \forall \mu \in V, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Pour $\mu = 0$, on a donc $x_0 = 0$ et donc $\mu f_0(\mu) = 0$ sur V. Par suite, $f_0(\mu) \equiv 0$, alors $-\mu f_1(\mu) = x_1, \forall \mu \in V$ ce qui entraîne aussi $x_1 = 0$ et $f_1(\mu) \equiv 0$. Par récurrence, on montre donc que $x_n = 0, \forall n \geq 0$. D'où la contradiction. ∎

LEMME 3.2. *Soit T un shift à poids opérateurs de poids $(T_n)_{n\geq 0}$ quelconques, alors T satisfait la SVEP.*

Démonstration. Soit $f : U \longrightarrow H^{(\infty)}$ une fonction analytique sur U, un ouvert de $\mathbb{C}$, telle que $(T-\mu)f(\mu) = 0, \forall \mu \in U$. Donc pour $f(\mu) = (f_n(\mu))_{n\geq 0}$, on a $-\mu f_0(\mu) = 0, \forall \mu \in U$ et $T_n f_n(\mu) - \mu f_{n+1}(\mu) = 0, \forall \mu \in U, \forall n \geq 0$. Par suite $f_n(\mu) = 0, \forall n \geq 0, \forall \mu \in U$. Ce qui achève la preuve. ∎

LEMME 3.3. *Soit T un shift à poids opérateurs de poids $(T_n)_{n\geq 0}$ quelconques. Alors $\sigma_T(x)$ est connexe pour tout $x \in H^{(\infty)}$ non nul.*

Avant de passer à la preuve de ce lemme, on va donner tout d'abord la définition suivante.

DÉFINITION 3.1. ([4]) Soit $T \in \mathcal{L}(X)$, où X est un espace de Banach. Pour une partie F fermé de $\mathbb{C}$, soit $X_T(F)$ le *sous-espace spectral analytique local* de T (relativement à F), défini par $X_T(F) = \{x \in X : \sigma_T(x) \subseteq F\}$.

Dans [5], M. Radjabalipour a montré que si T satisfait la SVEP, alors pour tous deux fermés non vides disjoints F_1 et F_2 de $\mathbb{C}$, $X_T(F_1 \cup F_2) = X_T(F_1) + X_T(F_2)$.

Démonstration du lemme 3.3. Soit $x \in H^{(\infty)}$ non nul tel que $\sigma_T(x)$ soit non connexe. Il existe donc deux fermés non vides disjoints F_1 et F_2 tels que $\sigma_T(x) = F_1 \cup F_2$. On a $x \in X_T(F_1 \cup F_2)$ (ici $X = H^{(\infty)}$). Or $X_T(F_1 \cup F_2) = X_T(F_1) + X_T(F_2)$, d'après [5, théorème 2.3]. Donc d'après les conditions sur F_1 et F_2, $x = x_1 + x_2$ avec $x_i \in X_T(F_i)$ non nul, pour $i = 1{,}2$. Le lemme 3.1 prouve que $0 \in \sigma_T(x_1) \cap \sigma_T(x_2) \subseteq F_1 \cap F_2$. Ce qui contredit $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. ∎

LEMME 3.4. *Soit T un shift à poids opérateurs de poids quelconques, alors $\sigma(T)$ est stable par symétrie circulaire.*

Démonstration. Pour tout $\lambda, |\lambda| = 1$, T est unitairement équivalent à λT. Donc $\forall \lambda, |\lambda| = 1$, $\sigma(T) = \lambda\sigma(T)$. ∎

Démonstration du théorème 3.1. Pour tout $x \neq 0$, $\sigma_T(x)$ est connexe et $\bigcap_{x\neq 0}\sigma_T(x) \neq \emptyset$. Donc $\sigma_s(T) = \bigcup_{x\neq 0}\sigma_T(x)$ est connexe. Or $\sigma(T) = \sigma_s(T)$ car T satisfait la SVEP, donc $\sigma(T)$ est aussi connexe. $\sigma(T)$ est connexe, admet une symétrie circulaire et $0 \in \sigma(T)$, donc

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r(T)\}.$$

∎

Références

[1] Dunford, N., Schwartz, J.T., "Linear Operators, Part III", Wiley, New York, 1971.

[2] Houimdi, M., "Propriétés Spectrales des Opérateurs Shifts, Modèles de Similitudes et Phénomènes d'Explosion du Spectre", thèse de 3ème cycle, Université de Bordeaux I, 1984.

[3] Houimdi, M., Ouali, M., Sur le spectre d'un shift à poids opérateurs, *Extracta Math.* **13** (3) (1998), 327 – 333.

[4] Laursen, K.B., Vrbová, P., Some remarks on the surjectivity spectrum of linear operators, *Czech. Math. J.,* **39** (114) (1989), 730 – 739.

[5] Radjabalipour, M., Decomposable operator, *Bull. Iranian Math. Soc.,* **9** (1978), 1 – 49.

[6] Vasilescu, F.-H., "Analytic Functional Calculus and Spectral Decompositions", Editura academiei and D. Reidel Publ. Co., Bucharest and Dordrecht, 1982.