EXTRACTA MATHEMATICAE Vol. **14**, Núm. 3, 247 – 266 (1999)

Sur la Dualité de Poincaré *

Abdelaziz Kheldouni

Université Sidi Mohammed Benabdallah, Faculté des Sciences Dhar El Mehraz
Département de Mathématique et Informatique, B.P. 1796, *FES-Atlas, FES (MAROC)*
e-mail: kheldouni@rocketmail.com

(Survey paper presented by A.M. Cegarra)

AMS *Subject Class.* (1991): 55N22 *Received September* 30, 1998

Introduction

Si V est une variété de dimension n, compacte, orientable et sans bord, le théorème de dualité de Poincaré donne des isomorphismes en théorie ordinaire à coefficients entiers ([5], [6], ...) :

$$\varphi_k : H_k(V;Z) \longrightarrow H^{n-k}(V;Z) \tag{1}$$

pour tout entier $0 \leq k \leq n$. Ces isomorphismes s'expriment à partir du slant produit : il existe une classe $v^* \in H^n(V\times V, V\times V - \Delta V; Z)$ telle que $\varphi_k(\alpha) = \alpha/v^*$.

Lorsque V n'est pas supposée orientable, la classe v^* n'existe pas dans $H^n(V\times V, V\times V - \Delta V; Z)$. Il convient alors d'introduire le faisceau des orientations Ω^* de V, on montre alors que l'on a de façon naturelle un élément $V^* \in H^n(V\times V, V\times V - \Delta V; \Omega^*\widehat{\otimes}\underline{Z})$ tel que le slant produit

$$\begin{array}{ccc} H_*(V;\Omega^*\widehat{\otimes}\underline{Z}) & \longrightarrow & H^{n-*}(V;\underline{Z}) \\ \alpha & \mapsto & \alpha/V^* \end{array}$$

détermine des isomorphismes en chaque degré. Ceci fournit la dualité de Poincaré dans le cas compact sans bord, et redonne les isomorphismes (1) dans le cas orientable.

Comme l'a remarqué C.T.C Wall [8], il est possible d'exprimer la dualité en utilisant le revêtement universel $\tilde{V}$ de V et un cap-produit sur $\tilde{V}$; d'où

*Recherche menée dans le cadre du Programme d'Appui à la Recherche Scientifique (PARS) MI33.

l'idée de donner des formulations du slant et du cap-produit qui se traduisent bien en terme de l'homologie et de la cohomologie du revêtement universel de V, qui englobe tous les cas, et permet en particulier d'obtenir une "dualité de Poincaré" valable pour tout faisceau $\mathcal{B}$ localement trivial sur V :

$$C^*(V;\mathcal{B}) \longrightarrow C_{n-*}(V;\mathcal{B}\widehat{\otimes}\Omega^*).$$

Cet isomorphisme est obtenu comme cap-produit par la classe fondamentale $[V]$ de V. Par ailleurs, en supposant la variété V triangulée, nous explicitons une approximation cellulaire de la diagonale qui va nous permettre d'exhiber un cycle $((V))$ dans le complexe $C_n(\widehat{K}_1(V);\Omega^*)$ de la décomposition cellulaire duale de la première subdivision barycentrique de la triangulation de V . Cette représentation explicite permet alors de constater que l'équivalence :

$$\cap((V)) : C^*(K(V);\mathcal{A}) \longrightarrow C_{n-*}(\widehat{K}(V);\mathcal{A}\widehat{\otimes}\Omega^*)$$

est simple, où $\mathcal{A}$ est le faisceau fondamental de V construit comme une image directe, en un sens qui sera précisé, du faisceau trivial $\underline{Z}$ sur le revêtement universel $\tilde{V}$ de V.

1. Faisceaux localement triviaux

Soit (X, x_o) un espace topologique pointé, $\pi := \pi_1(X;x_o)$ son groupe fondamental, et $\tilde{X} \overset{\omega}{\to} X$ le revêtement universel de X. La fibration $\tilde{X} \to X$ est une fibration principale de groupe π.

Si $\mathcal{B}$ est un faisceau en groupes abeliens discrets, localement trivial sur X, et $\mathcal{B}_{x_0}$ sa fibre en x_0, alors pour tout lacet $l \in \Omega(X;x_o)$, l'image réciproque $l^*(\mathcal{B})$ du faisceau $\mathcal{B}$ est un faisceau trivial; il existe d'ailleurs une unique trivialisation de $l^*(\mathcal{B})$, celle ci fournit un isomorphisme :

$$l^*(\mathcal{B})_0(\simeq \mathcal{B}_{x_0}) \longrightarrow l^*(\mathcal{B})_1(\simeq \mathcal{B}_{x_0})$$

qui ne dépend que de la classe de l dans π. On obtient ainsi une action à droite de π sur $\mathcal{B}_{x_0}$, donc une structure de $Z[\pi]$-module à droite sur $\mathcal{B}_{x_0}$.

Considérons le faisceau trivial sur $\tilde{X}$: $Z \times \tilde{X} \to \tilde{X}$. On définit le faisceau localement trivial $\mathcal{A}$ sur X appelé faisceau fondamental sur X, par le préfaisceau :

$$U \to \mathcal{A}_U := \oplus_i \Gamma(\tilde{U}_i;\underline{Z})$$

pour tout ouvert U de X, au dessus duquel le revêtement est trivial, où $\tilde{U}_i$ parcourt l'ensemble des ouverts de $\tilde{X}$ qui se projettent isomorphiquement sur U, et où $\Gamma(\tilde{U}_i;\underline{Z})$ désigne l'ensemble des sections au dessus de $\tilde{U}_i$.

Comme π opère à gauche sur $\tilde{X}$, il va opèrer à gauche sur $\mathcal{A}$; la fibre $\mathcal{A}_{x_0}$ de $\mathcal{A}$ au dessus de x_o apparait ainsi comme un $Z[\pi]$-module bilatère. Il est clair que $\mathcal{A}_{x_0}$ est la somme d'autant d'exemplaires de Z qu'il y a d'éléments dans $\pi = \omega^{-1}(x_o)$. Si l'on choisit un relèvement $\tilde{x}_o$ de x_o, $\mathcal{A}_{x_0}$ s'identifie à $Z[\pi]$.

2. Homologie et cohomologie

Pour tout entier p, nous noterons $S(p, X)$ l'ensemble des applications continues du p-simplexe standard Δ_p dans X. Si $\mathcal{B}$ est un faisceau localement trivial sur X, pour tout simplexe singulier σ dans $S(p, X)$, l'image réciproque $\sigma^*(\mathcal{B})$ est un faisceau trivial sur Δ_p. Nous noterons $\mathcal{B}_\sigma$ les sections de $\sigma^*(\mathcal{B})$ au dessus de Δ_p. Posons :

$$C_p(X; \mathcal{B}) = \bigoplus_{\sigma \in S(p,X)} \mathcal{B}_\sigma \qquad (\text{resp. } C^p(X; \mathcal{B}) = \prod_{\sigma \in S(p,X)} \mathcal{B}_\sigma).$$

Pour $f_i : \Delta_{p-1} \to \Delta_p$ (resp. $f^i : \Delta_p \to \Delta_{p+1}$) une application face, nous avons une application :

$$[f_i] : \mathcal{B}_\sigma \to \mathcal{B}_{f_i \circ \sigma} \qquad (\text{resp. } [f^i] : \mathcal{B}_{\sigma \circ f^i} \to \mathcal{B}_\sigma)$$

qui à une section de $\sigma^*(\mathcal{B})$ au dessus de Δ_p, fait correspondre sa restriction à $f_i(\Delta_{p-1})$ (resp. à $\alpha \in \mathcal{B}_{\sigma \circ f^i}$ associe son prolongement à tout le simplexe). Nous avons ainsi un opérateur bord et un opérateur cobord, pour tout $p \geq 0$:

$$\begin{array}{rccc} \partial : & C_p(X; \mathcal{B}) & \longrightarrow & C_{p-1}(X; \mathcal{B}) \\ & \alpha & \mapsto & \Sigma_i (-1)^i [f_i](\alpha) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rccc} \text{resp. } \delta : & C^p(X; \mathcal{B}) & \longrightarrow & C^{p+1}(X; \mathcal{B}) \\ & \alpha & \mapsto & \Sigma_i (-1)^i [f^i](\alpha) \end{array} \right)$$

L'homologie de ce complexe est l'homologie de X à coefficients dans $\mathcal{B}$, notée $H_*(X; \mathcal{B})$ (resp. la cohomologie de X à valeurs dans $\mathcal{B}$, notée $H^*(X; \mathcal{B})$).

Remarque 2.1. 1) $C_*(X; \mathcal{A})$ et $C^*(X; \mathcal{A})$ sont des $Z[\pi]$-modules à gauche. 2) Pour tout $\sigma \in S(p, X)$, $\mathcal{B}_\sigma$ s'identifie à $\mathcal{B}_{x_0} \underset{Z[\pi]}{\otimes} \mathcal{A}_\sigma$ d'où l'isomorphisme :

$$C_*(X; \mathcal{B}) \simeq \mathcal{B}_{x_0} \underset{Z[\pi]}{\otimes} C_*(X; \mathcal{A})$$

3) Pour tout $\mathcal{B}$, nous avons un homomorphisme injectif

$$\mathcal{B}_{x_0} \underset{Z[\pi]}{\otimes} C^*(X;\mathcal{A}) \longrightarrow C^*(X;\mathcal{B}).$$

PROPOSITION 2.2. *$C^*(X;\mathcal{B}) \simeq Hom_{Z[\pi]}[C_*(X;\mathcal{A});\mathcal{B}_{x_0}^{(g)}]$. Ici $\mathcal{B}_{x_0}^{(g)}$ est le $Z[\pi]$-module $\mathcal{B}_{x_0}$ muni de la structure à gauche $g.b = b.g^{-1}$ pour $(b,g) \in \mathcal{B}\times\pi$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que pour tout $\sigma \in S(*;X)$, nous avons les isomorphismes

$$Hom_{Z[\pi]}(\mathcal{A}_\sigma;\, \mathcal{B}_{x_0}^{(g)}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{B}_{x_0} \underset{Z[\pi]}{\otimes} \mathcal{A}_\sigma = \mathcal{B}_\sigma$$

$$Hom_{Z[\pi]}[C_*(X;\mathcal{A});\, \mathcal{B}_{x_0}^{(g)}] \simeq \prod_{\sigma\in S(*,X)} Hom_{Z[\pi]}(\mathcal{A}_\sigma;\, \mathcal{B}_{x_0}^{(g)}).$$ ∎

Pour le cas relatif on posera pour toute paire topologique (X,Y),

$$C_*(X,Y;\mathcal{B}) := C_*(X;\mathcal{B})/C_*(Y;\mathcal{B}|_Y)$$

et

$$C^*(X,R;\mathcal{B}) = C^*(X;\mathcal{B})/C^*(R;\mathcal{B}|_R).$$

3. Le cap et le slant produit

3.1. LE SLANT-PRODUIT. Soient X et X' deux espaces topologiques, $\pi = \pi_1(X,x_o)$, $\pi' = \pi_1(X',x_o')$ et $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{C}$) un faisceau localement trivial sur X (resp. X'). Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ les faisceaux fondamentaux sur X et X' respectivement. En appliquant le foncteur

$$\bullet \longrightarrow Hom_{Z[\pi]\times Z[\pi']}[\bullet; Hom_Z(\mathcal{B}_{x_0};\, \mathcal{C}_{x_0}^{(g)})]$$

à l'équivalence d'Eilenberg-Zilbert

$$EZ : C_*(X;\mathcal{A}) \underset{Z}{\otimes} C_*(X';\mathcal{A}') \longrightarrow C_*(X\times X';\mathcal{A} \underset{Z}{\otimes} \mathcal{A}')$$

et en utilisant les identifications suivantes :

$$Hom_{Z[\pi]\times Z[\pi']}[C_*(X\times X';\, \mathcal{A} \underset{Z}{\otimes} \mathcal{A}'); Hom_Z(\mathcal{B}_{x_0};\, \mathcal{C}_{x_0}^{(g)})]$$
$$\equiv C^*(X\times X'; Hom(\mathcal{B}\otimes \underline{Z};\, \underline{Z}\otimes\mathcal{C}),$$

$$\begin{aligned} &Hom_{Z[\pi]\times Z[\pi']}[C_*(X;\,\mathcal{A}) \underset{Z}{\otimes} C_*(X';\,\mathcal{A}');\, Hom_Z(\mathcal{B}_{x_0};\,\mathcal{C}^{(g)}_{x_0})] \\ &\qquad \equiv Hom_Z[\mathcal{B}_{x_0} \underset{Z[\pi]}{\otimes} C_*(X;\,\mathcal{A});\, Hom_{Z[\pi']}(C_*(X';\,\mathcal{A}');\,\mathcal{C}^{(g)}_{x_0})] \\ &\qquad\qquad\qquad \equiv Hom_Z(C_*(X;\,\mathcal{B});\, C^*(X';\,\mathcal{C})), \end{aligned}$$

nous obtenons une flèche appelée slant-produit :

$$C^*(X\times X';\, Hom(\mathcal{B}\otimes \underline{Z};\, \underline{Z}\otimes\mathcal{C})) \xrightarrow{S} Hom_Z(C_*(X;\,\mathcal{B});\, C^*(X';\,\mathcal{C})).$$

Considérons maintenant la projection $p : X\times X \to \Delta X$ qui à (x,y) associe (x,x), et $I=[0,1]\subset R$ où $\Delta X = \{(x,x) : x\in X\}$.

Nous dirons qu'un espace topologique X possède la propriété (L.C) s'il existe un voisinage θ de X dans $X\times X$ tel que $p_{|\theta}$ soit homotope à l'identité, parmi les applications de θ dans $X\times X$ qui sont l'identité sur ΔX et commutent à p. On peut alors montrer (voir [3]) que :

Pour qu'un espace paracompact, localement compact X possède la propriété (L.C), *il suffit que tout point de X ait un voisinage vérifiant* (L.C). *En particulier, les variétés topologiques paracompactes, et plus généralement les espaces paracompacts localement isomorphes à un polyèdre, possèdent la propriété* (L.C).

Corollaire 3.1. *Si X possède la propriété* (L.C), *il existe un voisinage $\mathcal{O}$ de ΔX dans $X\times X$ tel que pour tout faisceau $\mathcal{F}$ localement trivial sur $X\times X$, $\mathcal{F}_{|\mathcal{O}}$ et $p^*(\Delta^*(\mathcal{F}))_{|\mathcal{O}}$ soient isomorphes.*

Démonstration. Nous avons une homotopie h entre $p_{|\mathcal{O}} : \mathcal{O}\to X\times X$ et $id_{\mathcal{O}} : \mathcal{O}\to\mathcal{O}\subset X\times X$. Cette homotopie permet de construire un isomorphisme h^* entre $\mathcal{F}_{|\mathcal{O}}$ et $p^*(\Delta^*(\mathcal{F}))_{|\mathcal{O}}$. Le faisceau peut-être considéré comme un fibré de base $X\times X$, de fibre discrète ; il en résulte que h^* est définie de façon unique par h. De plus, deux telles homotopies h_1 et h_2 sont homotopes entre elles ; d'où , en utilisant encore une fois le fait que la fibre est discrète, $h_1^* = h_2^*$. ∎

Il existe en fait un seul isomorphisme entre les faisceaux $\mathcal{F}_{|\mathcal{O}}$ et $p^*(\Delta^*(\mathcal{F}))_{|\mathcal{O}}$ qui prolonge l'identification naturelle de $\mathcal{F}_{|\Delta X} = \Delta^*(\mathcal{F})$ à $p^*(\Delta^*(\mathcal{F}))_{|\Delta X} = \Delta^*\circ p^*\circ\Delta^*(\mathcal{F}) = \Delta^*(\mathcal{F})$. Il en résulte un isomorphisme naturel :

$$C^*(X\times X, X\times X - \Delta X;\, \mathcal{F}) \longrightarrow C^*(X\times X, X\times X-\Delta X;\, p^*(\Delta^*(\mathcal{F}))).$$

Si maintenant $Z \subset Y \subset X$ et $Z' \subset Y' \subset X$ tel que $Y \cap Z' = Y' \cap Z = \phi$, alors $Y \times Z' \cup Y' \times Z \subset X \times X - \Delta X$, d'où la suite d'homomorphismes :

$$\begin{aligned} &C^*(X \times X, X \times X - \Delta X;\, p^*(Hom(\mathcal{B};\, \mathcal{C}))) \\ &\qquad \xrightarrow{\simeq} C^*(X \times X, X \times X - \Delta X;\, Hom(\mathcal{B} \otimes \underline{Z};\, \underline{Z} \otimes \mathcal{C})) \\ &\qquad\qquad \longrightarrow C^*(X \times X, Y \times Z' \cup Y' \times Z;\, Hom(\mathcal{B} \otimes \underline{Z};\, \underline{Z} \otimes \mathcal{C}) \\ &\qquad\qquad\qquad \xrightarrow{S} Hom(C_*(Y, Z; \mathcal{B});\, C^*(Y', Z';\, \mathcal{C})), \end{aligned}$$

dont le composé :

$$\begin{aligned} &C^*(X \times X, X \times X - \Delta X;\, p^*(Hom(\mathcal{B};\, \mathcal{C}))) \\ &\qquad \longrightarrow Hom(C_*(Y, Z;\, \mathcal{B});\, C^*(Y', Z';\, \mathcal{C})) \end{aligned} \tag{2}$$

sera encore appelé slant-produit.

D'autre part, pour $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux faisceaux localement constants sur X, on a un homomorphisme naturel :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \longrightarrow & Hom(\mathcal{B};\, \mathcal{B}\widehat{\otimes}\mathcal{C}) \\ c & \longmapsto & (b \mapsto b \otimes c) \end{array} \tag{3}$$

Pour tout $c \in C^*(X \times X, X \times X - \Delta X;\, \mathcal{C})$, nous noterons $c_{\mathcal{B}}$ son image dans $C^*(X \times X, X \times X - \Delta X;\, Hom(\mathcal{B};\, \mathcal{B}\widehat{\otimes}\mathcal{C}))$ par l'homomorphisme induit par (3). En reportant ceci dans (2), nous obtenons :

$$\begin{array}{ccc} C^*(X \times X, X \times X - \Delta X;\, \mathcal{C}) & \xrightarrow{S_{\mathcal{B}}} & Hom_Z(C_*(X; \mathcal{B});\, C^*(X;\, \mathcal{B}\widehat{\otimes}\mathcal{C})) \\ c & \longmapsto & (x \mapsto c_{\mathcal{B}}/x) \end{array}$$

appelé aussi slant-produit. En particulier si $\mathcal{B}$ est le faisceau fondamental $\mathcal{A}$, nous avons :

$$C^*(X \times X, X \times X - \Delta X;\, \mathcal{C}) \xrightarrow{S_{\mathcal{A}}} Hom_Z(C_*(X;\, \mathcal{A});\, C^*(X;\, \mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{C})).$$

Notons qu'à partir de l'action de π sur $\mathcal{A}$, nous avons deux actions de π sur $Hom(\mathcal{A};\, \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{C})$: pour $u : \mathcal{A} \to \mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{C}$ on définit $g.u.h : \mathcal{A} \to \mathcal{A}\otimes\mathcal{C}$ par $g.u.h(\alpha) = g.u(h.\alpha) \quad \forall g, h \in \pi$. D'où une action de π sur $C^*(X \times X, X \times X - \Delta X;\, Hom(\mathcal{A};\, \mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{C}))$. De plus la chaine $c_{\mathcal{A}}$ commute avec ces actions (i.e $g.c_{\mathcal{A}} = c_{\mathcal{A}}.g \quad \forall g \in \pi$). Il en résulte que le slant-produit par $c_{\mathcal{A}}$ est $Z[\pi]$-linéaire de $C_*(X;\, \mathcal{A})$ dans $C^*(X;\, \mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{C})$, d'où l'homomorphisme :

$$\begin{array}{ccc} C^*(X\times X, X\times X - \Delta X;\, \mathcal{C}) & \xrightarrow{S_{\mathcal{A}}} & Hom_{Z[\pi]}(C_*(X;\, \mathcal{A});\, C^*(X; \mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{C})) \\ c & \longmapsto & (x \mapsto c_{\mathcal{A}}/x) \end{array} \qquad (4)$$

Remarque 3.2. 1) Le slant-produit par $c_{\mathcal{B}}$ peut-être obtenu à partir du slant-produit par $c_{\mathcal{A}}$, en tensorisant par $\mathcal{B}_{x_0}$.
2) Soit X un espace localement compact de type dénombrable. Posons $X = \cup_n X_n$, où les X_n sont des compacts de X tels que : $X_n \subset Int(X_{n+1})$ pour tout n. Soit A un fermé de X et B un fermé dans A ; considérons $N \subset M \subset X$ tels que $N \cap A = M \cap B = \phi$ et posons $M_n = M \cap X_n$, et $N_n = N \cap X_n$, nous avons

$$S(u) : C_*(M_n, N_n;\, \mathcal{B}) \longrightarrow C^*(A, B \cup (A - A_n);\, \mathcal{C}),$$
$$\forall u \in C^*(X\times X, X\times X - \Delta X;\, Hom(\mathcal{B} \otimes \underline{Z};\, \underline{Z} \otimes \mathcal{C}))$$

et le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} C_*(M_n, N_n;\, \mathcal{B}) & \longrightarrow & C^*(A, B \cup (A - A_n);\, \mathcal{C}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_*(M_{n+1}, N_{n+1};\, \mathcal{B}) & \longrightarrow & C^*(A, B \cup (A - A_{n+1});\, \mathcal{C}) \end{array}$$

d'où en prenant la limite inductive :

$$S(u) : C_*(M, N;\, \mathcal{B}) \longrightarrow C_c^*(A, B;\, \mathcal{C})$$

où $C_c^*(\cdot, \mathcal{F})$ est le complexe de cochaines à support compact (voir [2]). On obtient alors le slant produit dans le cas à support compact :

$$S : C^*(X\times X, X\times X - \Delta X;\, Hom(\mathcal{B} \otimes \underline{Z};\, \underline{Z} \otimes \mathcal{C}))$$
$$\longrightarrow Hom_Z(C_*(M, N;\, \mathcal{B});\, C_c^*(A, B;\, \mathcal{C})$$

Notons que si X possède la propriété (L.C), on a le slant produit :

$$S_{\mathcal{A}} : C^*(X\times X, X\times X - \Delta X;\, \mathcal{C}) \longrightarrow Hom_{Z[\pi]}(C_*(M, N;\, \mathcal{A});\, C_c^*(A, B;\, \mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{C})$$

3.2. Le cap-produit. Etant donné deux faisceaux $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ localement triviaux sur X. Considérons la suite d'homomorphismes :

$$\begin{array}{c}
C_*(X; Hom(\mathcal{B}; \mathcal{C})) \\
\downarrow \Delta_* \\
C_*(X\times X;\ Hom(\mathcal{B}\otimes \underline{Z};\ \underline{Z}\otimes \mathcal{C})) \\
\downarrow \\
Hom_Z(\mathcal{B}_{x_0};\ \mathcal{C}_{x_0}) \underset{Z[\pi]\times Z[\pi]}{\otimes} C_*(X\times X;\ \mathcal{A} \underset{Z}{\otimes} \mathcal{A}) \\
\downarrow {\scriptstyle id\otimes EZ} \\
Hom_Z(\mathcal{B}_{x_0};\ \mathcal{C}_{x_0}) \underset{Z[\pi]\times Z[\pi]}{\otimes} C_*(X;\ \mathcal{A}) \underset{Z}{\otimes} C_*(X;\ \mathcal{A}) \\
\downarrow \theta \\
Hom_Z[Hom_{Z[\pi]}(C_*(X;\mathcal{A});\ \mathcal{B}^{(g)}_{x_0});\ \mathcal{C}_{x_0} \underset{Z[\pi]}{\otimes} C_*(X;\ \mathcal{A})] \\
\downarrow \simeq \\
Hom_Z(C^*(X;\ \mathcal{B}); C_*(X;\ \mathcal{C}))
\end{array}$$

où la deuxième flèche est donnée par l'identification de la remarque 2.1, et où θ est l'application qui à $u\otimes x\otimes y$ associe l'homomorphisme $\alpha \mapsto u(\alpha(x))\otimes y$.

Notons que la classe dans $\mathcal{C}_{x_0}\otimes_{Z[\pi]} C_*(X;\ \mathcal{A})$ de $\theta(\alpha)$ ne dépend que de la classe de $u\otimes x\otimes y$ dans

$$Hom_Z(\mathcal{B}_{x_0};\ \mathcal{C}_{x_0}) \underset{Z[\pi]\times Z[\pi]}{\otimes} C_*(X;\ \mathcal{A}) \underset{Z}{\otimes} C_*(X;\ \mathcal{A}).$$

Le composé de cette suite d'homomorphismes est appelé le cap-produit :

$$P:\ C_*(X;\ Hom(\mathcal{B};\ \mathcal{C})) \longrightarrow Hom_Z(C^*(X;\ \mathcal{B});\ C_*(X;\ \mathcal{C}))$$

en utilisant (3), nous obtenons l'homomorphisme :

$$C_*(X;\ \mathcal{C}) \longrightarrow C_*(X;\ Hom_Z(\mathcal{B};\ \mathcal{B}\widehat{\otimes}\mathcal{C})).$$

Soit $c_{\mathcal{B}}$ l'image de $c\in C_*(X;\ \mathcal{C})$ par cet homomorphisme. En composant avec P, nous obtenons :

$$\begin{array}{rccc}
P_{\mathcal{B}}: & C_*(X;\ \mathcal{C}) & \longrightarrow & Hom_Z(C^*(X;\ \mathcal{B});\ C_*(X;\ \mathcal{B}\widehat{\otimes}\mathcal{C})) \\
& c & \longmapsto & \{P_{\mathcal{B}}(c):\ x\mapsto x\cap c_{\mathcal{B}}\}
\end{array} \tag{5}$$

Là aussi, on remarquera que les homomorphismes $(\cap c_{\mathcal{B}}\ :\ C^*(X;\ \mathcal{B}) \to C_*(X;\ \mathcal{B}\widehat{\otimes}\mathcal{C}))$ s'obtiennent à partir de $(\cap c_{\mathcal{A}})$ en tensorisant par $\mathcal{B}_{x_0}$.

Pour le cas relatif, si A_1, A_2 sont deux sous espaces de X, l'application

$$D : (X, A_1 \cup A_2) \longrightarrow (X \times X, X \times A_2 \cup A_1 \times X)$$

induit :

$$D_* : C_*(X, A_1 \cup A_2;\, \mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{A}) \longrightarrow C_*(X \times X, X \times A_2 \cup A_1 \times X;\, \mathcal{A}\otimes\mathcal{A})$$

d'où un cap-produit relatif :

$$P_{\mathcal{B}} :\ C_*(X, A_1 \cup A_2;\, \mathcal{C}) \longrightarrow Hom_Z(C^*(X, A_1;\, \mathcal{B});\, C_*(X, A_2;\, \mathcal{B}\widehat{\otimes}\mathcal{C})).$$

Si X est un espace localement compact de type dénombrable et (X_n) une famille de compacts emboités dans X. Pour tout n, nous avons :

$$P_{\mathcal{B}} :\ C_*(X, X - X_n;\, \mathcal{C}) \longrightarrow Hom_Z(C^*(X, X - X_n;\, \mathcal{B});\, C_*(X;\, \mathcal{B}\widehat{\otimes}\mathcal{C}))$$

en appliquant le foncteur $\bullet \to \lim_{\overleftarrow{n}}(\bullet)$ on obtient :

$$\begin{aligned} C_*^{l.f}(X;\, \mathcal{C}) &\longrightarrow \lim_{\overleftarrow{n}} Hom_Z(C^*(X, X - X_n;\, \mathcal{B});\, C_*(X;\, \mathcal{B}\widehat{\otimes}\mathcal{C})) \\ &\simeq Hom_Z(\lim_{\overleftarrow{n}} C^*(X, X - X_n;\, \mathcal{B});\, C_*(X;\, \mathcal{B}\widehat{\otimes}\mathcal{C})) \end{aligned}$$

où $C_*^{l.f}(X;\, \mathcal{F})$ est le complexe de chaines localement finies de X à coefficients dans le faisceau $\mathcal{F}$, défini comme étant la limite projective du système projectif

$$\{C_*(X, X - X_n;\, \mathcal{F}) \xrightarrow{p_n} C_*(X, X - X_{n+1};\, \mathcal{F})\}$$

les homomorphismes p_n étant les surjections correspondantes au passage au quotient par $C_*(X - X_{n-1}, X - X_n;\, \mathcal{F})$. Nous obtenons ainsi une variante du cap-produit :

$$P_{\mathcal{B}} :\ C_*^{l.f}(X;\, \mathcal{C}) \longrightarrow Hom_Z(C_c^*(X;\, \mathcal{B});\, C_*(X;\, \mathcal{B}\widehat{\otimes}\mathcal{C}))$$

4. Définition du faisceau $\Omega^*(\mathcal{B})$

Les variétés considérées seront supposées paracompactes, et localement compactes. Considérons une variété topologique V, et $\mathcal{B}$ un faisceau localement trivial sur V. Pour un ouvert U de V, on notera ΔU l'ensemble des $(x, x) \in U \times U$. Soit $H^{\mathcal{B}}$ le préfaisceau sur V défini par :

$$U \longrightarrow H^n(U \times V, U \times V - \Delta U;\, \mathcal{B} \otimes \underline{Z})$$

avec les applications de restriction naturelles. On notera $\Omega^*(\mathcal{B})$ le faisceau associé à $H^{\mathcal{B}}$.

Soit U un ouvert contenu dans une carte (ω, φ) de V. Pour tout entier k, nous avons les isomorphismes :

$$\begin{tikzcd}
H^k(U\times V, U\times V - \Delta U; \mathcal{B}\otimes \underline{Z}) \arrow[d, "\simeq"] \arrow[dddddd, bend right=60, "\simeq"'] \\
H^k(U\times\omega, U\times\omega - \Delta U;\ \mathcal{B}\otimes \underline{Z}) \arrow[d, "\simeq"] \\
H^k(\varphi(U)\times\varphi(\omega), \varphi(U)\times\varphi(\omega) - \Delta\varphi(U);\ \varphi_*(\mathcal{B})\otimes \underline{Z}) \arrow[d, "\simeq"] \\
H^k(\varphi(U)\times R^n, \varphi(U)\times R^n - \Delta\varphi(U);\ \varphi_*(\mathcal{B})\otimes \underline{Z}) \arrow[d, "j^*"] \\
H^k(\varphi(U)\times R^n, \varphi(U)\times R^n_*;\ \varphi_*(\mathcal{B})\otimes \underline{Z}) \arrow[d, "\simeq"] \\
H^{n-k}(\varphi(U);\ \varphi_*(\mathcal{B}))\otimes H^k(R^n, R^n_*;\ Z) \arrow[d, "\simeq"] \\
H^{n-k}(U;\ \mathcal{B}))\otimes H^k(R^n, R^n_*;\ Z)
\end{tikzcd}$$

où $\varphi_*(\mathcal{B})$ est l'image directe du faisceau $\mathcal{B}$ par φ, et j^* l'isomorphisme induit par l'application $j\ :\ (x,y)\mapsto(x, y-x)$. En particulier pour $k=n$, nous obtenons l'isomorphisme :

$$\alpha_U^{\varphi}\ :\ H^n(U\times V, U\times V - \Delta U;\ \mathcal{B}\otimes\underline{Z}) \xrightarrow{\simeq} H^0(U;\ \mathcal{B})\otimes H^n(R^n, R^n_*;\ \underline{Z}).$$

Remarquons que si $U'\subset U$, le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
H^n(U\times V, U\times V - \Delta U;\ \mathcal{B}\otimes\underline{Z}) \arrow[r, "\alpha_U^{\varphi}(\mathcal{B})"] \arrow[d] & H^0(U;\ \mathcal{B})\otimes H^n(R^n, R^n_*;\ \underline{Z}) \arrow[d] \\
H^n(U'\times V, U'\times V - \Delta U';\ \mathcal{B}\otimes\underline{Z}) \arrow[r, "\alpha_U^{\varphi}(\mathcal{B})"] & H^0(U';\ \mathcal{B})\otimes H^n(R^n, R^n_*;\ \underline{Z})
\end{tikzcd}$$

est commutatif, où les flèches verticales sont les restrictions.

En identifiant $H^n(R^n, R^n_*;\ Z)$ à Z, $\alpha_U^{\varphi}(\mathcal{B})$ définit un isomorphisme du préfaisceau $H^{\mathcal{B}}_{|U}$ sur le faisceau $\mathcal{B}_{|U}$, pour tout ouvert U tel que $\overline{U}$ soit contenu dans une carte de V. Ce qui prouve que $H^{\mathcal{B}}{}_{|U}$ est un faisceau et que

$$H^{\mathcal{B}}{}_{|U} \equiv \Omega^*(\mathcal{B})_{|U}$$

$$\Omega^*(\mathcal{B})_{|U} \simeq \mathcal{B}_{|U}$$

$\Omega^*(\mathcal{B})$ est donc un faisceau localement trivial. De plus, en désignant par $\beta_U^\varphi(\mathcal{B})$ l'homomorphisme composé :

$$\begin{aligned} H^n(U\times V, U\times V-\Delta U;\, \mathcal{B}\otimes \underline{Z}) &\xrightarrow{\alpha_U^\varphi(\mathcal{B})} H^0(U;\, \mathcal{B})\otimes H^n(R^n, R^n_*; Z) \\ &\longrightarrow H^0(U;\, \mathcal{B})\otimes H^0(U;\underline{Z})\otimes H^n(R^n, R^n_*;\, Z) \\ &\quad\longrightarrow H^0(U;\, \mathcal{B})\otimes H^n(U\times V, U\times V-\Delta U;\, \underline{Z}\otimes\underline{Z}) \end{aligned}$$

où les deux dérnières flèches sont respectivement $(x\otimes y\mapsto x\otimes 1\otimes y)$ et $[1\otimes\alpha_U^\varphi(\underline{Z})]^{-1}$, nous obtenons par passage aux faisceaux, un homomorphisme :

$$\overline{\beta}_U^\varphi(\mathcal{B}) :\, \Omega_U^*(\mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{B}_U\otimes\Omega_U^*(\underline{Z})$$

pour tout ouvert U dont la fermeture est contenue dans une carte de V. Cet homomorphisme est en fait un isomorphisme, car $\beta_U^\varphi(\mathcal{B})$ est un isomorphisme si U est homéomorphe à une boule.

LEMME 4.1. *L'isomorphisme $\overline{\beta}_U^\varphi(\mathcal{B})$ ne dépend pas de la carte (ω,φ) qui a servi à le construire.*

Démonstration. Il suffit de montrer que, $\forall x\in\omega$, l'homomorphisme

$$\beta_x^\varphi(\mathcal{B}) :\, \Omega_x^*(\mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{B}_x\otimes\Omega_x^*(\underline{Z})$$

ne dépend pas de (ω,φ). Pour cela, on regarde $\alpha_x^\varphi(\mathcal{B}) : \Omega_x^*(\mathcal{B}) \to \mathcal{B}_x\otimes H^n(R^n, R^n_*;\, \underline{Z})$; cette application ne dépend que de l'orientation de φ au signe prés. Et puisque $\beta_x^\varphi(\mathcal{B})$ a été construit en composant $\alpha_x^\varphi(\mathcal{B})$ et $\alpha_x^\varphi(\underline{Z})$, il ne dépend pas du tout de φ. ∎

Nous avons donc,

PROPOSITION 4.2. *Pour tout faisceau $\mathcal{B}$ localement trivial sur V, les morphismes β_U^φ se recollent en un isomorphisme*

$$\overline{\beta}(\mathcal{B}) :\, \Omega^*(\mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{B}\widehat{\otimes}\Omega^*(\underline{Z}).$$

Le faisceau $\Omega^*(\underline{Z})$ sera noté Ω^*, on l'appelle le faisceau des orientations de V.

Remarque 4.3. 1) Pour $\mathcal{B}=\Omega^*$, nous avons, $\Omega^*(\Omega^*)\simeq\Omega^*\widehat{\otimes}\Omega^*\equiv\underline{Z}$,
2) Si $U'\subset U$ sont deux ouverts de V, on a, $\Omega^*_{U|U'}\simeq\Omega^*_{|U'}$.

LEMME 4.4. *Soit V une variété topologique de dimension n, pour tout ouvert U de V, on a un homomorphisme naturel :*

$$H^n(U\times V, U\times V - \Delta U;\, \mathcal{B}\otimes \underline{Z}) \longrightarrow \Gamma(U;\, \Omega^*(\mathcal{B})|_U)$$

qui envoie les sections du préfaisceau $H^{\mathcal{B}}$ dans les sections du faisceau associé $\Omega^*(\mathcal{B})$. De plus cet homomorphisme est un isomorphisme.

Le faisceau $\Omega^*(\Omega^*)$ est naturellement isomorphe à $\Omega^*\widehat{\otimes}\Omega^*$ qui est lui même isomorphe à $\underline{Z}$. Donc $\Gamma(V;\, \Omega^*(\Omega^*))$ est muni d'un élément privilègié $\mathcal{K}$ qui correspond à la section 1 du faisceau $\underline{Z}$ par les identifications de la remarque 4.3.

DÉFINITION 4.5. Soit V une n-variété topologique sans bord, la classe correspondant à l'élément $\mathcal{K}$ par l'isomorphisme :

$$H^n(V\times V, V\times V - \Delta V;\, \Omega^*\otimes \underline{Z}) \xrightarrow{\simeq} \Gamma(V;\, \Omega^*(\Omega^*))$$

est appelée classe d'orientation de V, notée V^*.

Remarquons que V^* est définie de façon naturelle; et que si U est un ouvert de V, on a une application naturelle

$$H^n(V\times V, V\times V - \Delta V;\, \Omega^*\otimes \underline{Z}) \longrightarrow H^n(U\times U, U\times U - \Delta U;\, \Omega^*\otimes \underline{Z}_{|U})$$

qui envoie V^* sur U^*.

5. DUALITÉ DES VARIÉTÉS TOPOLOGIQUES

Soit $\mathcal{B}$ un faisceau localement trivial sur un espace topologique X, et (A,B) une paire de X. Le complexe d'Alexandre–Spanier des chaines singulières de (A,B) à valeurs dans $\mathcal{B}$ est donné par (cf [2], [6], [7], ...) :

$$\widehat{C}^*(A,B;\, \mathcal{B}) := \lim_{\substack{\rightarrow \\ (A,B)\subset(L,M)}} C^*(L,M;\, \mathcal{B})$$

la limite inductive étant prise sur le filtre des paires (L,M) où L est un voisinage de A et M un voisinage de B. L'homologie de ce complexe est la cvohomologie d'Alexander–Spanier de (A,B) que nous noterons $\widehat{H}^*(A,B;\, \mathcal{B})$.

La cohomologie à support compact est donnée par le complexe de chaines

$$\widehat{C}^*_c(Y;\, \mathcal{B}) := \lim_{\substack{\rightarrow \\ n}} \widehat{C}^*(Y, Y - Y_n;\, \mathcal{B})$$

$Y_n = Y \cap X_n$ où X_n est une suite croissante de compacts de X telle que $\cup_n X_n = X$.

Nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 5.1. *Soit (X, Y) une paire topologique. Supposons qu'il existe un ouvert U de X tel que Y soit férmé dans U, et que U se retracte par déformation sur Y ; alors :*

$$\widehat{C}^*(Y;\, \mathcal{B}) \xrightarrow{\simeq} C^*(Y;\, \mathcal{B}).$$

Soit maintenant V une variété topologique de dimension n, et $\mathcal{B}$ un faisceau localement trivial sur V. Nous avons une flèche naturelle $\Omega^* \to Hom(\mathcal{B}\otimes\underline{Z};\, \mathcal{B})$ - car $\mathcal{B}$ est naturellement isomorphe à $\mathcal{B} \otimes \Omega^* \otimes \Omega^*$- qui induit l'homomorphisme :

$$\begin{aligned} &H^n(V\times V, V\times V - \Delta V;\, \Omega^* \otimes \underline{Z}) \\ &\qquad \longrightarrow H^n(V\times V, V\times V - \Delta V; Hom((\mathcal{B}\widehat{\otimes}\Omega^*) \otimes \underline{Z};\, \underline{Z} \otimes \mathcal{B})). \end{aligned}$$

D'où un slant produit par une classe dans $H^n(V\times V, V\times V - \Delta V;\, \Omega^* \otimes \underline{Z})$.

Si $u \in H^n(V\times V, V\times V - \Delta V;\, \Omega^* \otimes \underline{Z})$ et (A, B) est une paire de fermés de V, nous avons pour tout k le slant-produit par u :

$$\widehat{S}(u) :\ H_k(V - B, V - A;\, \mathcal{B}\widehat{\otimes}\Omega^*) \longrightarrow \widehat{H}^{n-k}(A, B;\, \mathcal{B}).$$

PROPOSITION 5.2. *Soit V une variété topologique sans bord, de dimension n ; pour toute paire (A, B) de compacts de V, $\widehat{S}(V^*)$ est un isomorphisme de $H_*(V - B, V - A;\, \mathcal{B}\widehat{\otimes}\Omega^*)$ dans $\widehat{H}^*(A, B;\, \mathcal{B})$.*

Démonstration. Il suffit bien entendu de faire la démonstration dans le cas $B = \phi$. Si A est assez petit pour être inclus dans une carte locale de V sur laquelle les faisceaux considérés sont triviaux, voir [6]. Maintenant par transport de la carte, on démontre successivement que :
- c'est vrai si A est compact contenu dans une carte de V,
- c'est vrai si A est réunion finie de compacts contenus dans des cartes de V, en utilisant Mayer–Vietoris.

Finallement si $A = \cup_k A_k$ et si c'est vrai pour les A_k alors c'est vrai pour A par passage à la limite inductive. ∎

THÉORÈME 5.3. *Soit V une n-variété topologique, connexe et sans bord, soit (A, B) une paire de compacts de V possédant la propriété suivante :*

"Tout point de A admet un voisinage U dans V, tel que la paire $(U, U \cap A)$ soit homéomorphe à une paire simpliciale" ;

alors pour tout entier $0 \leq k \leq n$

$$\widehat{S}(V^*) : H_k(V - B, V - A; \mathcal{B}\widehat{\otimes}\Omega^*) \longrightarrow H^{n-k}(A, B; \mathcal{B})$$

est un isomorphisme.

Démonstration. D'aprés la proposition 5.2 il suffit de montrer que $\widehat{H}^* = H^*$, ce qui résulte du corollaire 4.4. ∎

Remarque 5.4. 1) La condition imposée à A et à B est vérifiée si (A, B) est une paire de sous-variétés de V.
2) Le théorème reste vrai si (A, B) est une paire de retracts absolus de voisinages .

Corollaire 5.5. *Pour une variété topologique férmée de dimension n*

$$S(V^*) : H_k(V; \mathcal{B}\widehat{\otimes}\Omega^*) \longrightarrow H^{n-k}(V; \mathcal{B})$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Dans le théorème 5.3, prendre $A = V$ et $B = \phi$. ∎

Proposition 5.6. *Soit V une n-variété toplogique sans bord, et (A, B) une paire de férmés de V qui sont des voisinages de l'infini. Alors :*

$$\widehat{S}(V^*) : H_k(V - B, V - A; \mathcal{B}\widehat{\otimes}\Omega^*) \longrightarrow \widehat{H}_c^{n-k}(A, B; \mathcal{B})$$

est un isomorphisme.

Démonstration. On suppose $B = \phi$, et on considère une suite de compacts (K_p) de V telle que $V = \cup K_p$ et K_p un voisinage de K_{p-1} ; notons qu'on peut trouver un p_0 tel que $\forall p > p_0$, $V - A \subset K_p$. Nous avons les isomorphismes

$$\begin{aligned} &H_k((V - A) \cup (V - K_p); \mathcal{B}\widehat{\otimes}\Omega^*) \\ &\qquad \simeq H_k(V - (K_p \cap A); \mathcal{B}\widehat{\otimes}\Omega^*) \xrightarrow{\simeq} \widehat{H}^{n-k}(A \cap K_p; \mathcal{B}) \end{aligned}$$

en passant à la limite inductive on obtient l'isomorphisme

$$\widehat{S}(V^*) : H_k(V - A; \mathcal{B}\widehat{\otimes}\Omega^*) \longrightarrow \widehat{H}_c^{n-k}(A; \mathcal{B})$$

finallement, pour $B \neq \phi$, on écrit les deux suites exactes correspondantes aux paires (A, B) et $(V - B, V - A)$ et on applique le lemme des cinq. ∎

Corollaire 5.7. *Soit V une variété topologique de dimension n sans bord, et soit (A,B) une paire de férmés de V*

$$\widehat{S}(V^*) : H_k(V-B, V-A;\, \mathcal{B}\widehat{\otimes}\Omega^*) \longrightarrow \widehat{H}_c^{n-k}(A,B;\, \mathcal{B})$$

est un isomorphisme.

Maintenant, en appliquant le corollaire 4.4 et le corollaire 5.7, on obtient le théorème suivant, à partir de l'équivalence d'homotopie $C_c^* \overset{\simeq}{\rightrightarrows} \widehat{C}_c^*$.

Théorème 5.8. *Soit V une variété topologique de dimension n sans bord, si (A,B) est une paire de férmés de V telle que tout point de A admet un voisinage U dans V de façon que la paire $(U, U\cap A)$ soit homéomorphe à une paire simpliciale, alors le slant-produit :*

$$S(V^*) : H_*(V-B, V-A;\, \mathcal{B}\widehat{\otimes}\Omega^*) \longrightarrow H_c^{n-*}(A,B;\, \mathcal{B})$$

est un isomorphisme.

Soit maintenant V une variété topologique férmée de dimension n, et Ω^* son faisceau des orientations.

Définition 5.9. On appelle classe fondamentale de la variété topologique V notée $[V]$, l'image inverse de $1 \in H^0(V;\, \underline{Z})$ par l'isomorphisme

$$S(V^*) : H_n(V;\, \Omega^*) \longrightarrow H^0(V;\, \underline{Z}).$$

Théorème 5.10. *Pour toute n-variété topologique férmée V, nous avons l'isomorphisme*

$$S_{\mathcal{B}}(V^*) : H_k(V; \mathcal{B}\widehat{\otimes}\Omega^*) \to H^{n-k}(V; \mathcal{B})$$

qui est un slant-produit par la classe d'orientation V^*, et dont l'inverse est le cap-produit par la classe fondamentale $[V]$:

$$P_{\mathcal{B}}([V]) : H^{n-k}(V;\, \mathcal{B}) \longrightarrow H_k(V;\, \mathcal{B}\widehat{\otimes}\Omega^*).$$

6. Torsion de l'homomorphisme de dualité

On suppose maintenant que V est une variété semi-linéaire ([1],[6]) de dimension n, munie d'une structure simpliciale $K(V)$. Nous supposerons toujours V férmée. Soit $K_1(V)$ et $K_2(V)$ la première et la deuxième subdivision barycentrique de V respectivement. Si $\widehat{K}(V)$ est le complexe dual de $K(V)$, il a une cellule $\widehat{\sigma}$ de dimension $n-p$, pour tout simplexe σ de dimension p dans $K(V)$. Cette cellule $\widehat{\sigma}$ est l'intersection des étoiles dans $K_1(V)$, des sommets de σ.

Nous désignerons par $\widehat{K}_1(V)$ le complexe dual de $K(V)$; il a une cellule $\widehat{\tau^*}$ de dimension $n-p$, pour tout p-simplexe τ^* de $K_1(V)$. Là aussi, la cellule $\widehat{\tau^*}$ est l'intersection des étoiles dans $K_2(V)$, des sommets de τ^* (pour plus de détails voir [1]).

Puisque les 0-simplexes de $K_1(V)$ correspondent bijectivement aux simplexes (en toute dimension) de $K(V)$, les cellules de dimension n de $\widehat{K}_1(V)$ correspondent aussi, bijectivement aux simplexes de $K(V)$.

Posons $\mathcal{S}(K_i)$ pour désigner l'ensemble des sommets de $K_i(V)$. On définit deux applications de $\mathcal{S}(K_2)$ dans $\mathcal{S}(K_1)$ de la manière suivante :

$$f_1 : \mathcal{S}(K_2) \longrightarrow \mathcal{S}(K_1)$$

qui à tout sommet α fait correspondre le barycentre du simplexe σ de $K(V)$ qui contient α dans son interieur, et

$$f_2 : \mathcal{S}(K_2) \longrightarrow \mathcal{S}(K_1)$$

qui fait correspondre à tout sommet α le centre de la cellule $\widehat{\sigma}$ de $\widehat{K}(V)$ qui contient α dans son interieur.

LEMME 6.1. *Les applications f_1 et f_2 se prolongent en des applications simpliciales de $K_2(V)$ dans $K_1(V)$.*

Démonstration. Il suffit de voir, que pour tout simplexe ω^{**} de $K_2(V)$, les sommets de ω^{**} sont appliqués dans l'ensemble des sommets d'un même simplexe de $K_1(V)$.

Pour f_1 : Soit τ^* le simplexe de $K_1(V)$ qui contient ω^{**}. Soit σ_i le simplexe de $K(V)$ qui contient le sommet α_i de ω^{**} dans son intérieur. Nous avons alors, $\tau^* \cap \mathrm{Int}(\sigma_i)\varphi$, donc le barycentre de σ_i est un sommet de τ^*. Ainsi, les images par f_1 des sommets de ω^{**} sont des sommets de τ^*.

Pour f_2 : On fait un raisonnement analogue en remplaçant σ_i par la cellule de $\widehat{K}(V)$ qui contient α dans son interieur. ∎

LEMME 6.2. *Soit σ un simplexe de $K(V)$. La n-cellule $\widehat{\sigma}^*$ de $\widehat{K}_1(V)$ qui correspond à σ, a une image par f_2 contenue dans le simplexe σ, et une image par f_1 contenue dans la cellule $\widehat{\sigma}$ de $\widehat{K}(V)$, duale de σ.*

Démonstration. Tous les n-simplexes de $K_2(V)$ contenus dans $\widehat{\sigma}^*$ ont le barycentre de σ pour sommet, donc tous ces sommets sont intérieurs aux simplexes de l'étoile de σ, et par conséquent leurs images par f_1 sont des barycentres des simplexes de l'étoile de σ, c'est à dire des sommets de $\widehat{\sigma}$. De même pour f_2. ∎

LEMME 6.3. *L'application* $\widehat{\Delta} = (f_1, f_2) : V \to V \times V$ *est cellulaire de* $\widehat{K_1}(V)$ *dans* $K(V) \times \widehat{K}(V)$.

Démonstration. On sait déjà que l'image par $\widehat{\Delta}$ d'une n-cellule $\widehat{\sigma^*}$ de $\widehat{K_1(V)}$ est contenue dans la n-cellule $\sigma \times \widehat{\sigma}$. Considérons une k-cellule α de $\widehat{K_1(V)}$; α s'écrit alors $\cap_{i=1}^{n-k} \widehat{\sigma_i^*}$ (σ_i étant des simplexes de $K(V)$). Or deux n-cellules $\widehat{\sigma_1^*}$ et $\widehat{\sigma_2^*}$ ne peuvent avoir des points communs que si $\sigma_1 \subset \sigma_2$ ou $\sigma_2 \subset \sigma_1$. Ainsi les σ_i sont ordonnés par inclusion, on supposera $\sigma_{n-k} \subset \ldots \subset \sigma_2 \subset \sigma_1$. On a :

$$\bigcap_{i=1}^{n-k} \sigma_i \times \widehat{\sigma_i} = \sigma_{n-k} \times \widehat{\sigma_1}$$

la cellule $\sigma_{n-k} \times \widehat{\sigma_1}$ contient ainsi l'image de α ; et elle est de dimension au plus k, car sinon $\dim \sigma_{n-k} = p$, $\dim \sigma_1 \geq p + n - k$, et $\dim \widehat{\sigma_1} \leq n - (p + n - k) = (k - p)$. ∎

L'application $\widehat{\Delta}$ est clairement homotope à la diagonale Δ. C'est l'approximation cellulaire de Δ ; elle va nous permettre de définir un "cap-produit cellulaire".

A $\widehat{\Delta}$ correspond un homomorphisme de complexes de chaines :

$$C_*(\widehat{K}_1(V);\, \widehat{\Delta^*}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A})) \xrightarrow{\widehat{\Delta}} C_*(K(V);\, \mathcal{A}) \underset{\pi}{\otimes} C_*(\widehat{K}(V);\, \mathcal{A})$$

En reprenant cependant les constructions vues au paragraphe 3, on obtient un cap-produit (voir (5)) :

$$C_*(\widehat{K}_1(V);\, \mathcal{C}) \longrightarrow Hom_\pi(C^*(K(V);\, \mathcal{A});\, C_*(\widehat{K}(V);\, \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{C}))$$

Et pour tout $c \in C_*(\widehat{K}_1(V);\, \mathcal{C})$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} C^*(K(V);\, \mathcal{A}) & \xrightarrow{\cap c} & C_*(\widehat{K}(V);\, \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{C}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C^*(V;\, \mathcal{A}) & \xrightarrow{\cap c} & C_*(V;\, \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{C}) \end{array}$$

est homotopiquement commutatif, car $\widehat{\Delta}$ et Δ sont homotopes, où les flèches verticales sont les homomorphismes de décomposition cellulaire.

Soit c une n-cellule de $\widehat{K}_1(V)$; notons ∂c son bord et b_c son barycentre. En considèrant l'injection j de b_c dans V, nous obtenons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H_n(V;\,\Omega^*) & \xrightarrow{S(V^*)} & H^0(V;\,\underline{Z}) \\ \downarrow & & \\ H_n(c,\partial c;\,\Omega^*) & & \big\downarrow{\scriptstyle j^*} \\ \downarrow & & \\ H_n(V, V-b_c;\,\Omega^*) & \xrightarrow{S(V^*)} & H^0(b_c;\,\underline{Z}) \end{array}$$

Par ailleurs, $H_n(V,V-b_c;\,\Omega^*) \simeq H_n(V,V-b_c;\,\underline{Z})\hat{E}\otimes\Omega^*_{b_c} \simeq \Omega^*_{b_c}\otimes\Omega^*_{b_c}$, et l'élément unité de $H^0(b_c;\,\underline{Z})$ correspond par $S(V^*)$ à $\alpha\otimes\alpha$ de $\Omega^*_{b_c}\otimes\Omega^*_{b_c}$, où α est un générateur de $\Omega^*_{b_c}$. Cet élément $\alpha\otimes\alpha$ est donc l'image par

$$H_n(V;\,\Omega^*) \longrightarrow H_n(c,\partial c;\,\Omega^*) \xrightarrow{\simeq} H_n(V,V-b_c;\,\Omega^*)$$

de la classe fondamentale $[V]$ de V.

Notons $C_*(\widehat{K}_1(V);\Omega^*)$ le complexe de chaines cellulaires à valeurs dans Ω^*. Nous savons que $C_n(\widehat{K}_1(V);\,\Omega^*)$ s'identifie à

$$\bigoplus_{c\in\widehat{K}_1(V)} H_n(V,V-b_c;\,\Omega^*)$$

c'est la théorie classique de décomposition cellulaire (voir [6]).

DÉFINITION 6.4. Nous appelons cycle fondamental de V noté $((V))$, l'image de $[V]$ dans $C_n(\widehat{K}_1(V);\,\Omega^*)$; (c'est à dire la somme de tous les $\alpha\otimes\alpha$).

Maintenant, on a

$$C^*(K(V);\,\mathcal{A}) = \bigoplus_{\sigma\in K(V)} \mathcal{A}_\sigma \quad \text{et} \quad C_*(\widehat{K}(V);\,\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{C}) = \bigoplus_{\widehat{\sigma}\in\widehat{K}(V)} (\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{C})_{\widehat{\sigma}}$$

Pour tout σ, $\mathcal{A}_\sigma$ est isomorphe (non canoniquement) à $\mathcal{A}_{x_0}$, donc à $\underline{Z}[\pi]$. De même, $(\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{C})_{\widehat{\sigma}} \simeq (\mathcal{A}_{x_0}\widehat{\otimes}\mathcal{C}_{x_0})$, et puisque $\mathcal{C}_0 \simeq \underline{Z}$, $(\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{C})_{\widehat{\sigma}}$ est isomorphe entant que $Z[\pi]$-module à $Z[\pi]$. Il en résulte que $C^*(K(V);\,\mathcal{A})$ et $C_*(\widehat{K}(V);\,\mathcal{A})$ sont des $Z[\pi]$-modules libres, munis de décompositions naturelles en sous modules libres de rang 1, les deux décompositions étant indexées par l'ensemble des simplexes de K.

Par ailleurs, pour tout simplexe σ de $K(V)$, $\widehat{\Delta}(\sigma)$ est contenu dans $\sigma \otimes \widehat{\sigma}$ donc, pour tout α,

$$\cap((V)) : C^*(K(V); \mathcal{A}) \longrightarrow C_*(\widehat{K}(V); \mathcal{A}\widehat{\otimes}\Omega^*)$$

envoie $\mathcal{A}_\sigma$ dans $(\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{C})_{\widehat{\sigma}}$. Autrement dit, l'équivalence d'homotopie $\cap((V))$ est simple [4] pour les structures libres naturelles de $C^*(K(V); \mathcal{A})$ et $C_*(\widehat{K}(V); \mathcal{A}\widehat{\otimes}\Omega^*)$ définies ci-dessus.

Considérons finalement $\delta : V \to V{\times}V$ une application simpliciale de $K_1(V)$ dans $K_1(V) \otimes K_1(V)$ homotope à Δ. Soit $\{V\}$ un cycle de $C^*(K_1(V); \Omega^*)$ qui représente la classe fondamentale $[V]$. Il définit par cap-produit une application :

$$\cap\{V\} : C^*(K_1(V); \mathcal{A}) \longrightarrow C_*(K_1(V); \mathcal{A}\widehat{\otimes}\Omega^*)$$

et le diagramme suivant est homotopiquement commutatif :

$$\begin{tikzcd}
C^*(K_1(V); \mathcal{A}) \arrow[r, "\cap\{V\}"] & C_*(K_1(V); \mathcal{A}\widehat{\otimes}\Omega^*) \\
C^*(K(V); \mathcal{A}) \arrow[u] \arrow[r, "\cap((V))"] & C_*(\widehat{K}(V); \mathcal{A}\widehat{\otimes}\Omega^*) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont les applications de subdivision. Comme ces dernières sont simples, on déduit le résultat :

THÉORÈME 6.5. *L'application*

$$\cap\{V\} : C^*(K_1(V); \mathcal{A}) \longrightarrow C_*(K_1(V); \mathcal{A}\widehat{\otimes}\Omega^*)$$

est simple.

Ainsi, quelle que soit la triangulation de V, et quelle que soit l'approximation cellulaire de la diagonale choisie pour définir un cap-produit simplicial, celui-ci est simple.

RÉFÉRENCES

[1] BRASSELT, J.P., Dualité à la Poincaré, "College on Singularity Theory", Trieste. 19 August - 6 September 1991, I.C.T.P.

[2] IVERSEN, B., "Cohomology of Sheaves", University Textbook, Springer–Verlag, Berlin–New York, 1986.

[3] KHELDOUNI, A., "Problèmes de Dualité", Thèse de toisième cycle, Nancy, 1982.

[4] Rham, G. de, Maumary, S., Kervaire, M.A., "Torsion et Type Simple d'Homotopie", Lecture Notes in Math. 48, Springer–Verlag, New York–Berlin, 1967.

[5] Samelson, H., On Poincaré duality, *Amer. J. Math.,* **14** (1965), 323 – 336.

[6] Spanier, E.H., "Algebraic Topology", McGraw–Hill, New York, 1966.

[7] Swan, R.G., "The Theory of Sheves", Chicago Lectures in Math., Univ. Chicago Press, Chicago, IL, 1971.

[8] Wall, C.T.C., Poincaré Complexes I, *Ann. of Math.,* **86** (2) (1967), 213 – 245.